Publ. Math. Debrecen
50 / 1-2 (1997), 37–55

Eine Butlergruppe mit Regulatorkette der Länge 2

Von STEPHAN LEHRMANN (Würzburg)
und OTTO MUTZBAUER (Würzburg)

Abstract. The intersection of all regulating subgroups of a Butler group is called regulator. It is a subgroup of finite index, i.e. itself again a Butler group. In the class of the almost completely decomposable groups, an important subclass of the class of Butler groups, the regulator is completely decomposable, i.e. it is its own regulator, and in this subclass the regulator plays the dominant role. It is an open question if there is a comparable regulator concept in the class of Butler groups. Certainly Butler groups have a priori a chain of iterated regulators. It is very natural to ask if there are Butler groups with a regulator chain of length bigger than one. This paper gives a first example of a Butler group with a regulator chain of length two. The rank of this group is 9 and the cardinality of the critical typeset is 15. Both, the rank and the critical typeset are probably not minimal.

1. Einleitung

Butlergruppen sind torsionsfreie homomorphe Bilder von vollständig zerlegbaren Gruppen endlichen Ranges. In der Arbeit [3] wurde die Frage gestellt, ob Butlergruppen grundsätzlich endliche Regulatorketten besitzen. Allerdings war bislang noch kein Beispiel einer Butlergruppe bekannt mit einer Regulatorkette der Länge größer als 1. In dieser Arbeit wird eine Butlergruppe mit Regulatorkette der Länge 2 angegeben. Diese Gruppe hat Rang 9 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 15.

Die verwendeten Bezeichnungen beziehen sich weitgehend auf L. Fuchs [1] und D. M. Arnold [2]. Gelegentlich werden jedoch aktualisierte Notationen benutzt, die dann an entsprechender Stelle explizit eingeführt werden.

Sei A eine torsionsfreie abelsche Gruppe und a ein Element aus A. Dann bezeichnet $t(a) = t_A(a)$ den *Typ* von a in A, und die *Typenmenge* von A ist definiert als $T(A) = \{t_A(a) \mid 0 \neq a \in A\}$. Für jeden Typ t

setzt man $A(t) = \{a \in A \mid t_A(a) \geq t\}$, $A^*(t) = \langle\{a \in A \mid t_A(a) > t\}\rangle$ und $A^\sharp(t) = A^*(t)_*$, die man die *Typen-Untergruppen* von A bezüglich Typ t nennt. $A(t)$ und $A^\sharp(t)$ sind rein in A, und es gelten die Inklusionen $A^*(t) \subseteq A^\sharp(t) \subseteq A(t)$. Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe A bezeichnet $T_{kr}(A) = \{t \in T(A) \mid A(t) \neq A^\sharp(t)\}$ die *kritische Typenmenge* von A. Untergruppen A_t von $A(t)$ heißen *Typen-Komplemente* von $A(t)$, wenn sie die Butler-Gleichung $A(t) = A^\sharp(t) \oplus A_t$ lösen. Weiter nennt man Untergruppen der Form $U = \sum_{t \in T_{kr}(A)} A_t$ *regulierende Untergruppen* von A. Dabei beachte man, daß A_t nur bis auf Isomorphie eindeutig ist. Die Menge aller regulierenden Untergruppen von A wird mit $\mathrm{Regg}(A)$ bezeichnet. Ist sogar $A \in \mathrm{Regg}(A)$, so nennt man A *selbstregulierend*. Für eine Butlergruppe A bezeichnet $\mathrm{R}(A) = \bigcap\{B \mid B \in \mathrm{Regg}(A)\}$ den *Regulator* von A. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man weiter $\mathrm{R}^{n+1}(A) = \mathrm{R}(\mathrm{R}^n(A))$ mit $\mathrm{R}^1(A) = \mathrm{R}(A)$ und definiert dadurch eine Folge von iterierten Regulatoren, die sogenannte *Regulatorkette* von A. Der Schnitt aller Regulatoren, $\mathrm{R}^\infty(A) = \bigcap\{\mathrm{R}^n(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$, heißt *Hyporegulator* von A. Gibt es ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{R}^{m+1}(A) = \mathrm{R}^m(A)$, so hat A eine Regulatorkette der Länge m. Gilt bereits $\mathrm{R}(A) = A$, dann nennt man A *regulatorgleich*.

2. Präliminarien

Im folgenden wird jede torsionsfreie abelsche Gruppe G grundsätzlich als Untergruppe ihrer divisiblen Hülle $\mathbb{Q}G$ aufgefaßt.

Lemma 2.1. *Ist A eine Butlergruppe mit $\mathrm{R}(A) \in \mathrm{Regg}(A)$, dann ist $\mathrm{R}(A)$ regulatorgleich.*

Beweis. Wegen $\mathrm{R}(A) \in \mathrm{Regg}(A)$ ist jede regulierende Untergruppe U von $\mathrm{R}(A)$ nach [2, Proposition 3.1 (b)] auch eine regulierende Untergruppe von A. Also gilt $U \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq U$ mit Gleichheit, und $\mathrm{R}(A)$ ist regulatorgleich. $\square$

Die Umkehrung ist bereits für die fast vollständig zerlegbaren Gruppen falsch.

Lemma 2.2. *Sei A eine rationale Gruppe mit $1 \in A \subseteq \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Dann gilt $A = \langle pA, 1\rangle$.*

Beweis. Sowieso ist $\langle pA, 1\rangle \subseteq A$. Sei nun $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ein beliebiges Element aus A mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 \neq 0$ und $\mathrm{ggT}\,(p, \alpha_2) = 1$. Nach Bézout gibt es dann $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit $l_1 p + l_2\alpha_2 = 1$, so daß $\alpha = (l_1 p + l_2\alpha_2)\alpha = l_1 p\alpha + l_2\alpha_1 \in \langle pA, 1\rangle$ ist. Also gilt auch $A \subseteq \langle pA, 1\rangle$. $\square$

Korollar 2.3. *Für eine Primzahl p und eine rationale Gruppe $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ gilt $\langle A, 1\rangle = \langle pA, 1\rangle$.*

Lemma 2.4. *Sei A eine rationale Gruppe, und sei $G = A(a+b) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S und $Ab \subseteq S$. Dann ist $G = Aa + S$.*

Bewies. Die Behauptung folgt sofort aus

$$\begin{aligned} G = A(a+b) + S &\subseteq Aa + \underbrace{Ab}_{\subseteq S} + S = Aa + S \\ &= A(a+b-b) + S \subseteq A(a+b) + \underbrace{Ab}_{\subseteq S} + S = A(a+b) + S = G. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 2.5. *Sei A eine rationale Gruppe mit $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Sei $G = A(a+b) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S, $Apb \subseteq S$ und $a+b \in S$. Dann ist $G = Apa + S$.*

Beweis. Sowieso gilt $Ap(a+b) \subseteq Apa + Apb \subseteq Apa + S$. Mit Korollar 2.3 folgt damit

$$\begin{aligned} G &= A(a+b) + S = \langle A(a+b), \underbrace{a+b}_{\in S}\rangle + S = \langle A, 1\rangle(a+b) + S \\ &\overset{\text{Korollar 2.3}}{=} \langle Ap, 1\rangle(a+b) + S = \langle \underbrace{Ap(a+b)}_{\subseteq Apa+S}, \underbrace{a+b}_{\in S}\rangle + S \subseteq Apa + S \\ &= A[p(a+b) - pb] + S \subseteq A(a+b) + \underbrace{Apb}_{\subseteq S} + S \\ &= A(a+b) + S = G. \end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichheit. $\square$

Lemma 2.6. *Sei A eine rationale Gruppe, und sei $\beta \in \mathbb{Q}$. Sei $G = A(a+\beta b) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S und sei p eine Primzahl mit $\beta \in \mathbb{Q}_p$ und $A\beta pb \subseteq S$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß gilt $G = A(a+kb) + S$.*

Beweis. Wegen $\beta \in \mathbb{Q}_p$ gibt es $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$, $\beta_2 \neq 0$ mit $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ und $\mathrm{ggT}(p, \beta_2) = 1$. Nach Bézout lassen sich $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ wieder so wählen, daß die Gleichung $l_1p + l_2\beta_2 = 1$ erfüllt ist. Setzt man nun $k = l_2\beta_1 \in \mathbb{Z}$, so erhält man $\beta = (l_1p + l_2\beta_2)\beta = l_1p\beta + l_2\beta_1 = l_1p\beta + k$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} G &= A(a+\beta b) + S = A(a + l_1p\beta b + kb) + S \subseteq A(a+kb) + \underbrace{A\beta pb}_{\subseteq S} + S \\ &= A(a+kb) + S = A(a+\beta b - l_1p\beta b) + S \subseteq A(a+\beta b) + \underbrace{A\beta pb}_{\subseteq S} + S \\ &= A(a+\beta b) + S = G \end{aligned}$$

mit Gleichheit, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Lemma 2.7. *Sei A eine rationale Gruppe mit $1 \in A \subseteq \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $G = A(a+kb) + S$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit Untergruppe S, $Apb \subseteq S$ und $a + b \in S$. Dann gilt*

$$G = \begin{cases} Apa + S & \text{für} \quad k \equiv_p 1 \\ Aa + S & \text{für} \quad k \not\equiv_p 1 \end{cases}.$$

Beweis. Wegen $Apb \subseteq S$ genügt es nach Lemma 2.4 die Fälle $k = 1, \dots, p$ zu untersuchen. Für $k = 1$ liefert bereits Lemma 2.5 das gewünschte Ergebnis $G = Apa + S$. Für $k \in \{2, \dots, p\}$ ist wegen $(a+kb) - (a+b) = (k-1)b$, $pb \in G$ nach Bézout auch $b \in G$. Mit Lemma 2.2 folgt $Ab = \langle Apb, b\rangle \subseteq G$, und mit Lemma 2.4 für $Akb \subseteq Ab \subseteq S + Ab$ erhält man zunächst $G = A(a+kb) + (S + Ab) = Aa + (S + Ab)$. Weiter ist wegen $b = (a+b) - a \in Aa + S$ und $Apb \subseteq S$ nach Lemma 2.2 auch $Ab = \langle Apb, b\rangle \subseteq Aa + S$. Also gilt sogar $G = Aa + S$. $\square$

Das nächste Lemma wurde in einer allgemeineren Form bereits von Mader, Mutzbauer und Rangaswamy [4, Lemma 2.2] formuliert. Es wird später bei der Bestimmung von Typen-Komplementen einer Butlergruppe benutzt und ist dort ein Kriterium für die Vollständigkeit bei der Konstruktion von regulierenden Untergruppen.

Lemma 2.8. *Für $\beta \in \mathbb{Q}$ und rationale Gruppen A und B ist $Aa \oplus Bb = A(a+\beta b) \oplus Bb$, genau dann wenn $A\beta \subseteq B$ ist.*

Beweis. $Aa \oplus Bb = A(a+\beta b) \oplus Bb$ impliziert $A\beta b = A(a + \beta b - a) \subseteq A(a+\beta b) + Aa \subseteq Aa \oplus Bb$. Also ist $A\beta b \subseteq Bb$ und damit $A\beta \subseteq B$. Die Umkehrung gilt nach Lemma 2.4. $\square$

Die folgende Aussage vereinfacht die Berechnung des Regulators einer Butlergruppe, wenn dabei der Schnitt aller regulierenden Untergruppen zu bilden ist.

Lemma 2.9. *Sei A eine rationale Gruppe mit $1 \in A$. Sei $G = \bigcap \{A(a+kb)+S \mid k \in \mathbb{Z}\}$ der Schnitt von torsionsfreien abelschen Gruppen mit Untergruppe S. Für eine Primzahl p gelte $Apb \subseteq S$, und es gebe ein $l \in \mathbb{Z}$ prim zu p mit $b \notin A(a+lb)+S$. Dann ist $G = Apa + S$.*

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$Apa+S = A[p(a+kb)-pkb]+S \subseteq Ap(a+kb)+\underbrace{Apb}_{\subseteq S}+S \subseteq A(a+kb)+S.$$

Also ist $Apa+S \subseteq \bigcap\{A(a+kb)+S \mid k \in \mathbb{Z}\} = G$. Andererseits gilt mit $k=0$ sowieso $G \subseteq Aa+S$ und damit $Apa+S \subseteq G \subseteq Aa+S$. Nimmt man nun an, daß $G = Aa+S$ ist, so folgt $Aa+S \subseteq A(a+kb)+S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daraus erhält man für $k=l$ aber $lb = (a+lb)-a \in A(a+lb)+Aa \subseteq A(a+lb)+S$. Nach Bézout gilt wegen $\mathrm{ggT}(l,p)=1$ und $pb \in S$ auch $b \in A(a+lb)+S$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $G \subsetneq Aa+S$ und damit $G = Apa+S$. □

3. Eine Regulatorkette der Länge 2

Proposition 3.1. *Es gibt eine Butlergruppe des Ranges* 9 *mit einer kritischen Typenmenge der Mächtigkeit* 15*, die eine Regulatorkette der Länge* 2 *besitzt.*

Beweis. Seien A, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E, F, G, V, W, X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \subseteq \mathbb{Q}_p$ für eine Primzahl p. Die Gruppen B_2, C_2, E, F, G, V, W, X_1, X_2, Y_1, Y_2 mögen ein starres System bilden und es gelte

$$\mathbb{Z} \subsetneq A \subseteq B_1 \cap C_1, \qquad B_1,\ C_1 \subseteq B_2 \cap C_2,$$
$$\mathbb{Z} \subsetneq D \subseteq E \cap F, \qquad \mathbb{Z} = N \cap M$$

für $N, M \in \{B_2, C_2, E, F, G, V, W, X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$, $N \neq M$ und $\{N, M\} \notin \{\{B_2, C_2\}, \{E, F\}\}$. Insbesondere ist die 1 damit in allen rationalen Gruppen A, $B_1, \dots, Y_2$ enthalten.

Nun definiert man die Butlergruppe

$$H \subseteq \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b_1 \oplus \mathbb{Q}b_2 \oplus \mathbb{Q}c_1 \oplus \mathbb{Q}c_2 \oplus \mathbb{Q}d \oplus \mathbb{Q}e \oplus \mathbb{Q}f \oplus \mathbb{Q}g$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} H = {} & Aa + B_1pb_1 + C_1pc_1 + X_1(pa+pb_1+pd) + Y_1(pc_1-pd) \\ & + B_2pb_2 + C_2pc_2 + X_2(pb_1+b_2+g) + Y_2(c_2-g) \\ & + Dpd + Epe + Fpf + Gpg + V(pd+e+g) + W(f-g). \end{aligned}$$

H hat Rang 9 und eine kritische Typenmenge der Mächtigkeit 15 bestehend aus den Typen der oben angegebenen 15 rationalen Gruppen.

Schritt 1. Die Gruppe H ist damit als Summe von reinen Untergruppen dargestellt. Um dies nachzuprüfen ist es notwendig für jeden Summanden nacheinander ähnliche Gleichungssysteme zu analysieren. Exemplarisch wird gezeigt, daß Aa eine reine Untergruppe von H ist. Denn man erhält für ein Element $qa \in H$ mit $q \in \mathbb{Q}$ eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} qa = \alpha a &+ \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + \xi_1(pa + pb_1 + pd) + \upsilon_1(pc_1 - pd) \\ &+ \beta_2 pb_2 + \gamma_2 pc_2 + \xi_2(pb_1 + b_2 + g) + \upsilon_2(c_2 - g) \\ &+ \delta pd + \varepsilon pe + \varphi pf + \eta pg + \nu(pd + e + g) + \omega(f - g), \end{aligned}$$

mit $\alpha \in A$, $\beta_1 \in B_1$, $\beta_2 \in B_2$, $\gamma_1 \in C_1$, $\gamma_2 \in C_2$, $\delta \in D$, $\varepsilon \in E$, $\varphi \in F$, $\eta \in G$, $\nu \in V$, $\omega \in W$, $\xi_1 \in X_1$, $\xi_2 \in X_2$, $\upsilon_1 \in Y_1$ und $\upsilon_2 \in Y_2$. Durch Umsortieren nach Basiselementen folgt daraus

$$\begin{aligned} qa = (\alpha + \xi_1 p)a &+ (\beta_1 + \xi_1 + \xi_2)pb_1 + (\beta_2 p + \xi_2)b_2 + (\gamma_1 + \upsilon_1)pc_1 \\ &+ (\gamma_2 p + \upsilon_2)c_2 + (\delta + \xi_1 - \upsilon_1 + \nu)pd + (\varepsilon p + \nu)e + (\varphi f + \omega)f \\ &+ (\eta p + \xi_2 - \upsilon_2 + \nu - \omega)g. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von a, pb_1 und b_2 liefert $q = \alpha + \xi_1 p$, $0 = \beta_1 + \xi_1 + \xi_2$ und $0 = \beta_2 p + \xi_2$. Folglich ist $-\xi_2 = \beta_2 p$ und damit $\xi_1 = \beta_2 p - \beta_1 \in X_1 \cap B_2 = \mathbb{Z}$. Also gilt $qa = \alpha + \xi_1 p \in A + p\mathbb{Z} = A$, so daß man insgesamt $H \cap \mathbb{Q}a = Aa$ erhält. Damit ist Aa aber eine reine Untergruppe von H.

Schritt 2. Zur Bestimmung aller regulierenden Untergruppen, die durch die Summe von Typen-Komplementen zu kritischen Typen definiert sind, untersucht man für jeden kritischen Typ von H die Butler-Gleichung. Dazu setzt man nun $t_A = t(A)$, $t_{B_1} = t(B_1), \ldots, t_{Y_2} = t(Y_2)$. Bis auf t_A,

t_{B_1}, t_{C_1} und t_D sind alle kritischen Typen maximal. Stellvertretend für die maximalen Typen gilt beispielsweise $H_{t_{B_2}} = H(t_{B_2}) = B_2pb_2$. Man faßt die Typen-Komplemente aller maximalen Typen von H zusammen und setzt

$$\begin{aligned} R = \sum_{\substack{t \in T_{kr}(H) \\ t \text{ maximal}}} H_t = \sum_{\substack{t \in T_{kr}(H) \\ t \text{ maximal}}} H(t) \\ &= X_1(pa + pb_1 + pd) + Y_1(pc_1 - pd) + B_2pb_2 + C_2pc_2 \\ &\quad + X_2(pb_1 + b_2 + g) + Y_2(c_2 - g) + Epe + Fpf + Gpg \\ &\quad + V(pd + e + g) + W(f - g). \end{aligned}$$

Damit ist R in jeder regulierenden Untergruppe von H enthalten, und man erhält die Darstellung $H = Aa + B_1pb_1 + C_1pc_1 + Dpd + R$. Für die Typen t_A, t_{B_1}, t_{C_1} und t_D gilt dagegen

$$\begin{aligned} H^\sharp(t_{B_1}) = H^\sharp(t_{C_1}) &= \langle B_2pb_2, C_2pc_2 \rangle_* \\ &= B_2pb_2 + C_2pc_2 + \langle b_2 + c_2 \rangle_* \\ &= B_2pb_2 + C_2pc_2 + \langle (B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2), b_2+c_2 \rangle \\ &\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} B_2pb_2 + C_2pc_2 + (B_2 \cap C_2)(b_2 + c_2), \\ H^\sharp(t_A) &= \langle B_1pb_1, C_1pc_1, H^\sharp(t_{B_1}) \rangle_* \\ &= B_1pb_1 + C_1pc_1 + B_2pb_2 + C_2pc_2 \\ &\quad + (B_2 \cap C_2)(b_2 + c_2), \\ H^\sharp(t_D) &= \langle Epe, Fpf \rangle_* \\ &= Epe + Fpf + \langle e + f \rangle_* \\ &= Epe + Fpf + \langle (E \cap F)p(e + f), e + f \rangle \\ &\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} Epe + Fpf + (E \cap F)(e + f). \end{aligned}$$

Somit treten in den Butler-Gleichungen der nicht-maximalen kritischen Typen nach Lemma 2.8 genau die folgenden Typen-Komplemente auf

$$\begin{aligned} H(t_A) &= H^\sharp(t_A) \oplus A(a + \beta_1pb_1 + \gamma_1pc_1 + \beta_2pb_2 + \gamma_2pc_2 + i_A(b_2 + c_2)) \\ &\quad \text{für } \beta_i, \gamma_i, i_A \in \mathbb{Q}, A\beta_i \subseteq B_i, A\gamma_i \subseteq C_i, Ai_A \subseteq B_2 \cap C_2 \\ &\quad \text{und } i \in \{1, 2\}, \\ H(t_{B_1}) &= H^\sharp(t_{B_1}) \oplus B_1(pb_1 + \widehat{\beta}_2pb_2 + \widehat{\gamma}_2pc_2 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) \\ &\quad \text{für } \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_2, i_{B_1} \in \mathbb{Q}, B_1\widehat{\beta}_2 \subseteq B_2, B_1\widehat{\gamma}_2 \subseteq C_2, B_1i_{B_1} \subseteq B_2 \cap C_2, \end{aligned}$$

$$H(t_{C_1}) = H^\sharp(t_{C_1}) \oplus C_1(pc_1 + \widetilde{\beta}_2 pb_2 + \widetilde{\gamma}_2 pc_2 + i_{C_1}(b_2 + c_2))$$
$$\text{für } \widetilde{\beta}_2, \widetilde{\gamma}_2, i_{C_1} \in \mathbb{Q}, C_1\widetilde{\beta}_2 \subseteq B_2, C_1\widetilde{\gamma}_2 \subseteq C_2, C_1 i_{C_1} \subseteq B_2 \cap C_2,$$

$$H(t_D) = H^\sharp(t_D) \oplus D(pd + \varepsilon pe + \varphi pf + i_D(e + f))$$
$$\text{für } \varepsilon, \varphi, i_D \in \mathbb{Q}, D\varepsilon \subseteq E, D\varphi \subseteq F, Di_D \subseteq E \cap F.$$

Da man nun alle möglichen Typen-Komplemente von kritischen Typen von H beschreiben kann, läßt sich jetzt die in der Definition angegebene allgemeine Form der regulierenden Untergruppen von H angeben.

$$\begin{aligned} H_{t_A} + H_{t_{B_1}} + H_{t_{C_1}} + H_{t_D} + R \\ = A(a + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + \beta_2 pb_2 + \gamma_2 pc_2 + i_A(b_2 + c_2)) \\ + B_1(pb_1 + \widehat{\beta}_2 pb_2 + \widehat{\gamma}_2 pc_2 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) \\ + C_1(pc_1 + \widetilde{\beta}_2 pb_2 + \widetilde{\gamma}_2 pc_2 + i_{C_1}(b_2 + c_2)) \\ + D(pd + \varepsilon pe + \varphi pf + i_D(e + f)) + R \end{aligned}$$

$$\text{(1)} \quad \text{mit} \quad A\beta_1 \subseteq B_1, A\gamma_1 \subseteq C_1, Ai_A, B_1 i_{B_1}, C_1 i_{C_1} \subseteq B_2 \cap C_2,$$
$$Di_D \subseteq E \cap F,$$

$$\text{(2)} \quad A\beta_2, B_1\widehat{\beta}_2, C_1\widetilde{\beta}_2 \subseteq B_2, A\gamma_2, B_1\widehat{\gamma}_2, C_1\widetilde{\gamma}_2 \subseteq C_2,$$
$$D\varepsilon \subseteq E, D\varphi \subseteq F$$

$$\text{für} \quad \beta_1, \beta_2, \widehat{\beta}_2, \widetilde{\beta}_2, \gamma_1, \gamma_2, \widehat{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_2, \varepsilon, \varphi, i_A, i_{B_1}, i_{C_1}, i_D \in \mathbb{Q}.$$

Schritt 3. Diese Darstellung der regulierenden Untergruppen von H wird nun vereinfacht, um Gleichheiten festzustellen.

Nach (2) gilt $A\beta_2 pb_2$, $A\gamma_2 pc_2$, $B_1\widehat{\beta}_2 pb_2$, $B_1\widehat{\gamma}_2 pc_2$, $C_1\widetilde{\beta}_2 pb_2$, $C_1\widetilde{\gamma}_2 pc_2$, $D\varepsilon pe$, $D\varphi pf \subseteq R$. Somit erhält man mit Lemma 2.4

$$\begin{aligned} & A(a + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + \beta_2 pb_2 + \gamma_2 pc_2 + i_A(b_2 + c_2)) \\ & + B_1(pb_1 + \widehat{\beta}_2 pb_2 + \widehat{\gamma}_2 pc_2 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) \\ & + C_1(pc_1 + \widetilde{\beta}_2 pb_2 + \widetilde{\gamma}_2 pc_2 + i_{C_1}(b_2 + c_2)) \\ & + D(pd + \varepsilon pe + \varphi pf + i_D(e + f)) + R \\ \overset{\text{Lemma 2.4}}{=} & A(a + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + i_A(b_2 + c_2)) + B_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) \\ & + C_1(pc_1 + i_{C_1}(b_2 + c_2)) + D(pd + i_D(e + f)) + R. \end{aligned}$$

Weiter folgt aus (1) insbesondere auch $A\beta_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) \subseteq B_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2 + c_2))$ und $A\gamma_1(pc_1 + i_{C_1}(b_2 + c_2)) \subseteq C_1(pc_1 + i_{C_1}(b_2 + c_2))$. Also läßt sich Lemma 2.4 ein weiteres Mal anwenden, und es gilt

$$\begin{aligned}
&A(a+\beta_1 pb_1+\gamma_1 pc_1+i_A(b_2+c_2))+B_1(pb_1+i_{B_1}(b_2+c_2))\\
&\quad+C_1(pc_1+i_{C_1}(b_2+c_2))+D(pd+i_D(e+f))+R\\
\overset{\text{Lemma 2.4}}{=}&A(a+(i_A-\beta_1 i_{B_1}-\gamma_1 i_{C_1})(b_2+c_2))\\
&\quad+B_1(pb_1+i_{B_1}(b_2+c_2))+C_1(pc_1+i_{C_1}(b_2+c_2))\\
&\quad+D(pd+i_D(e+f))+R.
\end{aligned}$$

Man setzt nun $i=i_A-\beta_1 i_{B_1}-\gamma_1 i_{C_1}\in\mathbb{Q}$ und betrachtet im folgenden die regulierenden Untergruppen

$$\begin{aligned}
U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)}=&A(a+i(b_2+c_2))+B_1(pb_1+i_{B_1}(b_2+c_2))\\
&+C_1(pc_1+i_{C_1}(b_2+c_2))+D(pd+i_D(e+f))+R
\end{aligned}$$

unter den Voraussetzungen von (1).

Schritt 4. Aufgrund der Substitution von β_1, γ_1 und i_A durch i sind für die rationale Variable i genau die Einschränkungen von (1) relevant, die sich auf die Variablen β_1, γ_1 und i_A beziehen. Für diese Bedingungen wird eine äquivalente Aussage angegeben, die nur von i abhängt. Anschließend werden die Zulässigkeitsbereiche aller relevanten Variablen weiter eingeschränkt. Unter den Voraussetzungen für β_1, γ_1 und i_{B_1}, i_{C_1} aus (1) ergeben sich aus der Definition von i die Beziehungen

$$\begin{aligned}
Ai&=A(i_A-\beta_1 i_{B_1}-\gamma_1 i_{C_1}) & Ai_A&=A(i+\beta_1 i_{B_1}+\gamma_1 i_{C_1})\\
&\subseteq Ai_A+A\beta_1 i_{B_1}+A\gamma_1 i_{C_1} & &\subseteq Ai+A\beta_1 i_{B_1}+A\gamma_1 i_{C_1}\\
&\subseteq Ai_A+B_1 i_{B_1}+C_1 i_{C_1} & &\subseteq Ai+B_1 i_{B_1}+C_1 i_{C_1}\\
&\subseteq Ai_A+(B_2\cap C_2), & &\subseteq Ai+(B_2\cap C_2).
\end{aligned}$$

Also ist $Ai_A\subseteq B_2\cap C_2$ äquivalent zu $Ai\subseteq B_2\cap C_2$, und $U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)}$ ist genau dann eine regulierende Untergruppe von H, wenn die Bedingungen $Ai, B_1 i_{B_1}, C_1 i_{C_1}\subseteq B_2\cap C_2\subseteq\mathbb{Q}_p$ und $Di_D\subseteq E\cap F\subseteq\mathbb{Q}_p$ für $i,i_{B_1},i_{C_1},i_D\in\mathbb{Q}$ erfüllt sind. Da die 1 in jeder der rationalen Gruppen A, B_1, C_1 und D enthalten ist, folgt dann insbesondere $i,i_{B_1},i_{C_1},i_D\in\mathbb{Q}_p$. Nach Lemma 2.6 genügt es deshalb bereits $i,i_{B_1},i_{C_1},i_D\in\mathbb{Z}$ zu betrachten, um alle regulierenden Untergruppen von H darzustellen. Man erhält für $i,i_{B_1},i_{C_1},i_D\in\mathbb{Z}$ auch ausschließlich regulierende Untergruppen von H, da in diesem Fall die Voraussetzungen $Ai, B_1 i_{B_1}, C_1 i_{C_1}\subseteq B_2\cap C_2$ und $Di_D\subseteq E\cap F$ gelten. Folglich beschreibt auch $\{U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)}\mid i,i_{B_1},i_{C_1},i_D\in\mathbb{Z}\}$ die Menge aller regulierenden Untergruppen von H.

Schritt 5. Von Krapf [3, Theorem 1.1] und Mader [3, Theorem 1.2] wurde gezeigt, daß Butler-Gruppen nur endlich viele verschiedene regulierende Untergruppen besitzen. Jede der Variablen i, i_{B_1}, i_{C_1} und i_D kann folglich auf eine endliche Wertemenge beschränkt werden.
Es gilt nun

$$pb_1 + b_2 + c_2 = (pb_1 + b_2 + g) + (c_2 - g) \in R, \tag{3}$$

so daß mit Lemma 2.7, angewandt auf $G = B_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) + R$ mit $B_1p(b_2 + c_2) \subseteq R$ und $pb_1 + (b_2 + c_2) \in R$ nach (3), folgt

$$B_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2 + c_2)) + R = \begin{cases} B_1p^2b_1 + R & \text{für} \quad i_{B_1} \equiv_p 1 \\ B_1pb_1 + R & \text{für} \quad i_{B_1} \not\equiv_p 1 \end{cases}. \tag{4}$$

Insbesondere ist damit $U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)} = U_{(i,0,i_{C_1},i_D)}$ für $i_{B_1} \not\equiv_p 1$.
Analog gilt wegen

$$pd + e + f = (pd + e + g) + (f - g) \in R \tag{5}$$

und mit Lemma 2.7 für $G = D(pd + i_D(e + f)) + R$ mit $Dp(e + f) \subseteq R$ und $pd + (e + f) \in R$ nach (5) auch

$$D(pd + i_D(e + f)) + R = \begin{cases} Dp^2d + R & \text{für} \quad i_D \equiv_p 1 \\ Dpd + R & \text{für} \quad i_D \not\equiv_p 1 \end{cases}. \tag{6}$$

Also erhält man $U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)} = U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},0)}$ für $i_D \not\equiv_p 1$.
Schließlich läßt sich noch ein entsprechendes Resultat für i_{C_1} formulieren. Dazu verwendet man, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} Apa &= Ap(a + i(b_2 + c_2) - i(b_2 + c_2)) \\ &\subset Ap(a + i(b_2 + c_2)) + Apb_2 + Apc_2 \\ &\subset A(a + i(b_2 + c_2)) + B_2pb_2 + C_2pc_2 \\ &\subset A(a + i(b_2 + c_2)) + R. \end{aligned} \tag{7}$$

Mit $pa + pb_1 + pc_1 = (pa + pb_1 + pd) + (pc_1 - pd) \in R$ und $pb_1 + b_2 + c_2 \in R$ nach (3) folgt somit für alle $i \in \mathbb{Z}$ auch

$$pc_1 - b_2 - c_2 = (pa + pb_1 + pc_1) - pa - (pb_1 + b_2 + c_2) \in A(a + i(b_2 + c_2)) + R. \tag{8}$$

Wiederum erhält man nach Lemma 2.7, angewandt auf $G = C_1(pc_1 + (-i_{C_1})(-b_2 - c_2)) + S$, wobei $S = A(a + i(b_2 + c_2)) + R$ ist mit $C_1p(-b_2 - c_2) \subseteq S$ und $pc_1 + (-b_2 - c_2) \in S$ nach (8), für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$C_1(pc_1 + (-i_{C_1})(-b_2 - c_2)) + S = \begin{cases} C_1p^2c_1 + S & \text{für} \quad -i_{C_1} \equiv_p 1 \\ C_1pc_1 + S & \text{für} \quad -i_{C_1} \not\equiv_p 1 \end{cases}. \tag{9}$$

Damit ist auch $U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},i_D)} = U_{(i,i_{B_1},0,i_D)}$ für $i_{C_1} \not\equiv_p -1$.

Schritt 6. Bisher hat man jede der Variablen i_{B_1}, i_{C_1} und i_D unabhängig voneinander betrachtet, und festgestellt, daß nur die Werte 0 und 1 für i_{B_1} und i_D sowie 0 und -1 für i_{C_1} entscheidend sind. Nun wird gezeigt, daß durch die Belegung einer dieser Variablen mit 0 die resultierende regulierende Untergruppe in jedem Fall gleich H ist.

Zuerst betrachtet man den Fall $i_{B_1} = 0$ bezüglich i und i_{C_1}. Wegen $A \subseteq C_1 \subseteq B_2 \cap C_2$ und $i, i_{C_1} \in \mathbb{Z}$ ist sowohl $Ai(b_2+c_2) \subseteq (B_2 \cap C_2)(b_2+c_2)$ als auch $C_1 i_{C_1}(b_2+c_2) \subseteq (B_2 \cap C_2)(b_2+c_2)$. Mit Lemma 2.2 erhält man weiter $(B_2 \cap C_2)(b_2+c_2) = \langle (B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2), b_2+c_2 \rangle$. Da sowieso $(B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2) \subseteq B_2pb_2 + C_2pc_2 \subseteq R$ ist und $b_2+c_2 = (pb_1+b_2+c_2) - pb_1 \in B_1pb_1 + R$ nach (3) gilt, folgt insgesamt

$$\begin{aligned} Ai(b_2+c_2),\ C_1 i_{C_1}(b_2+c_2) &\subseteq (B_2 \cap C_2)(b_2+c_2) \\ &\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} \langle (B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2), b_2+c_2 \rangle \\ &\subseteq B_1pb_1 + R. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man $G = A(a + i(b_2+c_2)) + S$ und $S = B_1pb_1 + C_1(pc_1 + i_{C_1}(b_2+c_2)) + D(pd + i_D(e+f)) + R$, so läßt sich jetzt Lemma 2.4 anwenden, denn nach (10) ist $Ai(b_2+c_2) \subseteq S$ erfüllt. Demnach erhält man für beliebige $i, i_{C_1}, i_D \in \mathbb{Z}$

$$U_{(i,0,i_{C_1},i_D)} = U_{(0,0,i_{C_1},i_D)}. \tag{11}$$

Andererseits folgt wieder mit Lemma 2.4 für $G = C_1(pc_1 + i_{C_1}(b_2+c_2)) + S$, wobei nun $S = A(a + i(b_2+c_2)) + B_1pb_1 + D(pd + i_D(e+f)) + R$ ist mit $C_1 i_{C_1}(b_2+c_2) \subseteq S$ nach (10), für alle $i, i_{C_1}, i_D \in \mathbb{Z}$ auch

$$U_{(i,0,i_{C_1},i_D)} = U_{(i,0,0,i_D)}. \tag{12}$$

Als nächstes untersucht man die Auswirkungen von $i_{C_1} = 0$ auf i_D. Hier erhält man wegen $D \subseteq E \cap F$ und $i_D \in \mathbb{Z} \subseteq E \cap F$ nun $Di_D(e+f) \subseteq (E \cap F)(e+f)$. Mit Lemma 2.2 folgt wieder $(E \cap F)(e+f) = \langle (E \cap F)p(e+f), e+f \rangle$. Nach (5) ist $pd + e + f \in R$, und wegen $pc_1 - pd \in R$ ist damit $e + f = (pd + e + f) + (pc_1 - pd) - pc_1 \in C_1pc_1 + R$. Mit $(E \cap F)p(e+f) \subseteq Epe + Fpf \subseteq R$ gilt also

$$\begin{aligned} Di_D(e+f) &\subseteq (E \cap F)(e+f) \\ &\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} \langle (E \cap F)p(e+f), e+f \rangle \\ &\subseteq C_1pc_1 + R. \end{aligned} \tag{13}$$

Für $G = D(pd+i_D(e+f))+S$ und $S = A(a+i(b_2+c_2))+B_1(pb_1+i_{B_1}(b_2+c_2))+C_1pc_1+R$ mit $Di_D(e+f) \subseteq S$ nach (13) liefert nun Lemma 2.4 für alle $i, i_{B_1}, i_D \in \mathbb{Z}$

$$U_{(i,i_{B_1},0,i_D)} = U_{(i,i_{B_1},0,0)}. \tag{14}$$

Schließlich kann man im Fall $i_D = 0$ auch noch ein analoges Resultat in Bezug auf i_{B_1} angeben. Aus $B_1 \subseteq B_2 \cap C_2$ und $i_{B_1} \in \mathbb{Z}$ folgt nämlich $B_1 i_{B_1}(b_2+c_2) \subseteq (B_2 \cap C_2)(b_2+c_2)$. Nun ist $pc_1 - b_2 - c_2 \in R$ nach (8), und sowieso gilt $pc_1 - pd \in A(a+i(b_2+c_2)) + R$. Also ist $b_2 + c_2 = (pc_1 - pd) + pd - (pc_1 - b_2 - c_2) \in A(a+i(b_2+c_2)) + Dpd + R$. Wegen $(B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2) \subseteq R$ gilt deshalb

$$\begin{aligned} B_1 i_{B_1}(b_2+c_2) &\subseteq (B_2 \cap C_2)(b_2+c_2) \\ &\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} \langle (B_2 \cap C_2)p(b_2+c_2), b_2+c_2 \rangle \\ &\subseteq A(a+i(b_2+c_2)) + Dpd + R. \end{aligned} \tag{15}$$

Damit folgt durch Anwenden von Lemma 2.4 auf $G = B_1(pb_1 + i_{B_1}(b_2+c_2))+S$, wobei hier $S = A(a+i(b_2+c_2))+C_1(pc_1+i_{C_1}(b_2+c_2))+Dpd+R$ ist mit $B_1 i_{B_1}(b_2+c_2) \subseteq S$ nach (15), für alle $i, i_{B_1}, i_{C_1} \in \mathbb{Z}$

$$U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},0)} = U_{(i,0,i_{C_1},0)}. \tag{16}$$

Man faßt nun die Teilergebnisse von (11), (12), (14) und (16) zusammen und erhält so für beliebige $i, i_{B_1}, i_{C_1}, i_D \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lclclcl} U_{(i,0,i_{C_1},i_D)} & \overset{(11)}{=} & U_{(0,0,i_{C_1},i_D)} & \overset{(12)}{=} & U_{(0,0,0,i_D)} & \overset{(14)}{=} & U_{(0,0,0,0)}, \\ U_{(i,i_{B_1},0,i_D)} & \overset{(14)}{=} & U_{(i,i_{B_1},0,0)} & \overset{(16)}{=} & U_{(i,0,0,0)} & \overset{(11)}{=} & U_{(0,0,0,0)}, \\ U_{(i,i_{B_1},i_{C_1},0)} & \overset{(16)}{=} & U_{(i,0,i_{C_1},0)} & \overset{(11)}{=} & U_{(0,0,i_{C_1},0)} & \overset{(11)}{=} & U_{(0,0,0,0)}. \end{array}$$

Schritt 7. Damit lassen sich nun alle paarweise verschiedene regulierende Untergruppen von H angeben. Denn nach (4), (6) und (9) genügt es $i_{B_1}, -i_{C_1}, i_D \in \{0,1\}$ zu betrachten. Wie oben gezeigt wurde, erhält man aber für $0 \in \{i_{B_1}, -i_{C_1}, i_D\}$ in jedem Fall $U_{(0,0,0,0)}$. Folglich gibt es in H nur die regulierenden Untergruppen

$$
\begin{aligned}
U_{(0,0,0,0)} &= Aa + B_1pb_1 + C_1pc_1 + Dpd + R = H, \\
U_{(i,1,-1,1)} &= A(a + i(b_2 + c_2)) + B_1(pb_1 + b_2 + c_2) \\
&\quad + C_1(pc_1 - b_2 - c_2) + D(pd + e + f) + R \\
&\overset{(4)}{=} A(a + i(b_2 + c_2)) + B_1p^2b_1 + C_1(pc_1 - b_2 - c_2) \\
&\quad + D(pd + e + f) + R \\
&\overset{(9)}{=} A(a + i(b_2 + c_2)) + B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 \\
&\quad + D(pd + e + f) + R \\
&\overset{(6)}{=} A(a + i(b_2 + c_2)) + B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 + Dp^2d + R
\end{aligned} \tag{17}
$$

für $i \in \mathbb{Z}$. Nach Lemma 2.4 reicht es wegen $Ap(b_2+c_2) \subseteq B_2pb_2+C_2pc_2 \subseteq R$ aber aus, $i \in \{0, \dots, p-1\}$ zu betrachten. Im folgenden wird nun gezeigt, daß diese $p+1$ regulierenden Untergruppen von H sogar paarweise verschieden sind.

Für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$ ist $pb_1 \notin U_{(i,1,-1,1)}$ und $U_{(i,1,-1,1)}$ damit eine echte Untergruppe von $U_{(0,0,0,0)} = H$. Denn nimmt man an, daß es eine Darstellung von pb_1 in $U_{(i,1,-1,1)}$ gibt, so muß es $\alpha \in A$, $\beta_1 \in B_1$, $\beta_2 \in B_2$, $\gamma_1 \in C_1$, $\gamma_2 \in C_2$, $\delta \in D$, $\varepsilon \in E$, $\varphi \in F$, $\eta \in G$, $\nu \in V$, $\omega \in W$, $\xi_1 \in X_1$, $\xi_2 \in X_2$, $\upsilon_1 \in Y_1$ und $\upsilon_2 \in Y_2$ geben mit

$$
\begin{aligned}
pb_1 = {} & \alpha(a + i(b_2 + c_2)) + \beta_1p^2b_1 + \gamma_1p^2c_1 \\
& + \xi_1(pa + pb_1 + pd) + \upsilon_1(pc_1 - pd) \\
& + \beta_2pb_2 + \gamma_2pc_2 + \xi_2(pb_1 + b_2 + g) + \upsilon_2(c_2 - g) \\
& + \delta p^2d + \varepsilon pe + \varphi pf + \eta pg + \nu(pd + e + g) + \omega(f - g).
\end{aligned}
$$

Man sortiert nun nach den Basiselementen und erhält durch einen Koeffizientenvergleich die Gleichungen

$$
\begin{array}{llll}
\text{(a)} & 0 = \alpha + \xi_1p, & (\mathrm{b}_1) & 1 = \beta_1p + \xi_1 + \xi_2, \\
\text{(d)} & 0 = \delta p + \xi_1 - \upsilon_1 + \nu, & (\mathrm{b}_2) & 0 = \alpha i + \beta_2p + \xi_2, \\
\text{(e)} & 0 = \varepsilon p + \nu, & \text{(f)} & 0 = \varphi p + \omega, \\
(\mathrm{c}_1) & 0 = \gamma_1p + \upsilon_1, & (\mathrm{c}_2) & 0 = \alpha i + \gamma_2p - \upsilon_2, \\
\text{(g)} & 0 = \eta p + \xi_2 - \upsilon_2 + \nu - \omega. & &
\end{array}
$$

Aus (c_1) folgt sofort $\upsilon_1 \in Y_1 \cap pC_1 = p\mathbb{Z}$, und aus (e) erhält man ebenso leicht $\nu \in V \cap pE = p\mathbb{Z}$. Also ist nach (d) auch $\xi_1 \in X_1 \cap (pD + p\mathbb{Z}) =$

$p\mathbb{Z}$. Nach Substitution von α in (b_2) mit Hilfe von (a) gilt somit $\xi_2 = \xi_1 pi - \beta_2 p \in X_2 \cap (p^2\mathbb{Z} + pB_2) = p\mathbb{Z}$ wegen $i \in \mathbb{Z}$. Setzt man nun diese Ergebnisse in (b_1) ein, so erhält man $1 - \beta_1 p \in p\mathbb{Z}$ und damit $\beta_1 \in p^{-1}\mathbb{Z}$ im Widerspruch zu $\beta_1 \in B_1 \subseteq \mathbb{Q}_p$. Also ist $U_{(i,1,-1,1)} \subsetneq U_{(0,0,0,0)} = H$ für beliebiges $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Außerdem sind alle regulierenden Untergruppen der Form $U_{(i,1,-1,1)}$ für $0 \leq i < p$ paarweise verschieden. Denn nimmt man an, daß $U_{(k,1,-1,1)} = U_{(l,1,-1,1)}$ ist für gewisse $k, l \in \{0, \ldots, p-1\}$, so liegt auch $[a + k(b_2 + c_2)] - [a + l(b_2 + c_2)] = (k - l)(b_2 + c_2)$ in dieser Untergruppe. Da sowieso auch $p(b_2 + c_2) \in R$ enthalten ist, wären für $k \neq l$ und damit $k \not\equiv_p l$ nach Bézout auch $b_2 + c_2$ und nach (3) sogar $pb_1 = (pb_1 + b_2 + c_2) - (b_2 + c_2)$ Elemente dieser Untergruppe. Dies widerspricht jedoch obiger Feststellung, daß $pb_1 \notin U_{(i,1,-1,1)}$ ist für beliebiges $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Insgesamt gibt es also genau $p + 1$ paarweise verschiedene regulierende Untergruppen von H.

Schritt 8. Nun kann man den Regulator von H leicht bestimmen und erhält mit Lemma 2.9

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(H) &= \bigcap_{0 \leq i < p} U_{(i,1,-1,1)} = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} U_{(i,1,-1,1)} \\ &= \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \Big(A(a + i(b_2 + c_2)) + B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R \Big) \qquad (18) \\ &\overset{\text{Lemma 2.9}}{=} Apa + B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen von Lemma 2.9 sind erfüllt. Sowieso gilt $Ap(b_2 + c_2) \subseteq B_2 pb_2 + C_2 pc_2 \subseteq R$. Und wegen $pb_1 \notin U_{(i,1,-1,1)}$ aber $pb_1 + b_2 + c_2 \in U_{(i,1,-1,1)}$ nach (3) ist auch $b_2 + c_2 \notin U_{(i,1,-1,1)}$ für jedes beliebige $i \in \mathbb{Z}$.

Schritt 9. Als Abkürzung für den Regulator verwendet man im folgenden $I = \mathrm{R}(H)$. Um nun alle regulierenden Untergruppen von I zu bestimmen, müssen prinzipiell die gleichen Schritte wie oben durchgeführt werden. Also betrachtet man insbesondere für jeden nicht-maximalen kritischen Typ von I die zugehörige Butler-Gleichung.
Es gilt

$$I^\sharp(t_{B_1}) = I^\sharp(t_{C_1}) = \langle B_2 pb_2, C_2 pc_2 \rangle_* = B_2 pb_2 + C_2 pc_2,$$

$$\begin{aligned}
I^\sharp(t_A) &= \langle B_1p^2b_1, C_1p^2c_1, I^\sharp(t_{B_1})\rangle_* \\
&= B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 + B_2pb_2 + C_2pc_2 + \langle pb_1 + pc_1\rangle_* \\
&= B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 + B_2pb_2 + C_2pc_2 \\
&\quad + \langle (B_1 \cap C_1)(p^2b_1 + p^2c_1), pb_1 + pc_1\rangle \\
&\overset{\text{Lemma 2.2}}{=} B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 + B_2pb_2 + C_2pc_2 \\
&\quad + (B_1 \cap C_1)(pb_1 + pc_1), \\
I^\sharp(t_D) &= \langle Epe, Fpf\rangle_* = Epe + Fpf.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.8 gibt es zu diesen Typen genau die folgenden Typen-Komplemente

$$\begin{aligned}
I(t_A) &= I^\sharp(t_A) \oplus A(pa + \beta_1p^2b_1 + \gamma_1p^2c_1 + \beta_2pb_2 + \gamma_2pc_2 + j(pb_1 + pc_1)) \\
&\quad \text{für } \beta_i, \gamma_i, j \in \mathbb{Q}, A\beta_i \subseteq B_i, A\gamma_i \subseteq C_i, Aj \subseteq B_1 \cap C_1 \\
&\quad \text{und } i \in \{1, 2\}, \\
I(t_{B_1}) &= I^\sharp(t_{B_1}) \oplus B_1(p^2b_1 + \widehat{\beta}_2pb_2 + \widehat{\gamma}_2pc_2) \\
&\quad \text{für } \widehat{\beta}_2, \widehat{\gamma}_2 \in \mathbb{Q}, B_1\widehat{\beta}_2 \subseteq B_2, B_1\widehat{\gamma}_2 \subseteq C_2, \\
I(t_{C_1}) &= I^\sharp(t_{C_1}) \oplus C_1(p^2c_1 + \widetilde{\beta}_2pb_2 + \widetilde{\gamma}_2pc_2) \\
&\quad \text{für } \widetilde{\beta}_2, \widetilde{\gamma}_2 \in \mathbb{Q}, C_1\widetilde{\beta}_2 \subseteq B_2, C_1\widetilde{\gamma}_2 \subseteq C_2, \\
I(t_D) &= I^\sharp(t_D) \oplus D(p^2d + \varepsilon pe + \varphi pf) \\
&\quad \text{für } \varepsilon, \varphi \in \mathbb{Q}, D\varepsilon \subseteq E, D\varphi \subseteq F.
\end{aligned}$$

Damit läßt sich wieder die allgemeine Form einer regulierenden Untergruppe von I aufstellen, und man erhält

$$\begin{aligned}
&I_{t_A} + I_{t_{B_1}} + I_{t_{C_1}} + I_{t_D} + R \\
&\quad = A(pa + \beta_1p^2b_1 + \gamma_1p^2c_1 + \beta_2pb_2 + \gamma_2pc_2 + j(pb_1 + pc_1)) \\
&\qquad + B_1(p^2b_1 + \widehat{\beta}_2pb_2 + \widehat{\gamma}_2pc_2) \\
&\qquad + C_1(p^2c_1 + \widetilde{\beta}_2pb_2 + \widetilde{\gamma}_2pc_2) \\
&\qquad + D(p^2d + \varepsilon pe + \varphi pf) + R
\end{aligned}$$

(19) mit $\quad A\beta_1 \subseteq B_1, A\gamma_1 \subseteq C_1, Aj \subseteq B_1 \cap C_1,$

$$\begin{aligned}(20)\qquad & A\beta_2, B_1\widehat{\beta}_2, C_1\widetilde{\beta}_2 \subseteq B_2, A\gamma_2, B_1\widehat{\gamma}_2, C_1\widetilde{\gamma}_2 \subseteq C_2,\\ & D\varepsilon \subseteq E, D\varphi \subseteq F\\ \text{für}\quad & \beta_1, \beta_2, \widehat{\beta}_2, \widetilde{\beta}_2, \gamma_1, \gamma_2, \widehat{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_2, \varepsilon, \varphi, j \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Schritt 10. Man vereinfacht diese Darstellung nun mehrmals mit Lemma 2.4. Denn nach (20) sind $A\beta_2 pb_2$, $A\gamma_2 pc_2$, $B_1\widehat{\beta}_2 pb_2$, $B_1\widehat{\gamma}_2 pc_2$, $C_1\widetilde{\beta}_2 pb_2$, $C_1\widetilde{\gamma}_2 pc_2$, $D\varepsilon pe$, $D\varphi pf \subseteq R$, so daß gilt

$$\begin{aligned}& A(pa + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + \beta_2 pb_2 + \gamma_2 pc_2 + j(pb_1 + pc_1))\\ & +B_1(p^2 b_1 + \widehat{\beta}_2 pb_2 + \widehat{\gamma}_2 pc_2) + C_1(p^2 c_1 + \widetilde{\beta}_2 pb_2 + \widetilde{\gamma}_2 pc_2)\\ & \qquad +D(p^2 d + \varepsilon pe + \varphi pf) + R\\ & \overset{\text{Lemma 2.4}}{=} A(pa + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + j(pb_1 + pc_1))\\ & \qquad +B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R.\end{aligned}$$

Aus (19) folgt insbesondere auch $A\beta_1 p^2 b_1 \subseteq B_1 p^2 b_1$ und $A\gamma_1 p^2 c_1 \subseteq C_1 p^2 c_1$, und man erhält weiter

$$\begin{aligned}& A(pa + \beta_1 pb_1 + \gamma_1 pc_1 + j(pb_1 + pc_1)) + B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R\\ & \overset{\text{Lemma 2.4}}{=} A(a + j(pb_1 + pc_1)) + B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R = V_j.\end{aligned}$$

Schritt 11. Somit ist V_j genau dann eine regulierende Untergruppe von I, wenn für $j \in \mathbb{Q}$ die Bedingung $Aj \subseteq B_1 \cap C_1 \subseteq \mathbb{Q}_p$ erfüllt ist. Wegen $1 \in A$ folgt insbesondere $j \in \mathbb{Q}_p$, und nach Lemma 2.6 genügt es damit bereits $j \in \mathbb{Z}$ zu betrachten. Umgekehrt ist für $j \in \mathbb{Z}$ auch $Aj \subseteq B_1 \cap C_1$ und V_j damit regulierende Untergruppe von I. Man kann j sogar auf die Werte 0 und 1 beschränken, um alle regulierenden Untergruppen von I zu beschreiben. Denn es gilt

$$(21)\qquad pa + pb_1 + pc_1 = (pa + pb_1 + pd) + (pc_1 - pd) \in R,$$

und mit Lemma 2.7, angewandt auf $G = A(pa + j(pb_1 + pc_1)) + R$ mit $Ap(pb_1 + pc_1) \subseteq R$ und $pa + (pb_1 + pc_1) \in R$ nach (21), folgt

$$(22)\qquad A(pa + j(pb_1 + pc_1)) + R = \begin{cases} Ap^2 a + R & \text{für} \quad j \equiv_p 1,\\ Apd + R & \text{für} \quad j \not\equiv_p 1.\end{cases}$$

Das heißt $V_j = V_1$ für $i_D \equiv_p 1$ und $V_j = V_0 = I$ für $i_D \not\equiv_p 1$. Dabei ist V_1 eine echte Untergruppe von I wegen $pa \notin V_1$. Nimmt man nämlich an, daß $pa \in V_1$ ist, so existiert mit $\alpha \in A$, $\beta_1 \in B_1$, $\beta_2 \in B_2$, $\gamma_1 \in C_1$, $\gamma_2 \in C_2$,

$\delta \in D$, $\varepsilon \in E$, $\varphi \in F$, $\eta \in G$, $\nu \in V$, $\omega \in W$, $\xi_1 \in X_1$, $\xi_2 \in X_2$, $\upsilon_1 \in Y_1$ und $\upsilon_2 \in Y_2$ eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} pa &= \alpha p^2 a + \beta_1 p^2 b_1 + \gamma_1 p^2 c_1 + \xi_1(pa + pb_1 + pd) + \upsilon_1(pc_1 - pd) \\ &\quad + \beta_2 pb_2 + \gamma_2 pc_2 + \xi_2(pb_1 + b_2 + g) + \upsilon_2(c_2 - g) \\ &\quad + \delta p^2 d + \varepsilon pe + \varphi pf + \eta pg + \nu(pd + e + g) + \omega(f - g). \end{aligned}$$

Nach Umsortierung und Vergleich der Koeffizienten von a, b_1 und b_2 erhält man die Gleichungen $1 = \alpha p + \xi_1$, $0 = \beta_1 p + \xi_1 + \xi_2$ und $0 = \beta_2 p + \xi_2$. Durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die erste ergibt sich mit $1 = (\alpha + \beta_2 - \beta_1)p \in pB_2$ ein Widerspruch zu $B_2 \subseteq \mathbb{Q}_p$. Folglich hat I genau die beiden verschiedenen regulierenden Gruppen I und V_1 mit $V_1 \subsetneq I$.

Damit gilt für den Regulator von I

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^2(H) &= \mathrm{R}(I) = I \cap V_1 = V_1 \\ &= Ap^2 a + B_1 p^2 b_1 + C_1 p^2 c_1 + Dp^2 d + R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= Ap^2a + B_1p^2b_1 + C_1p^2c_1 + X_1(pa + pb_1 + pd) + Y_1(pc_1 - pd)\\ &\quad + B_2pb_2 + C_2pc_2 + X_2(pb_1 + b_2 + g) + Y_2(c_2 - g)\\ &\quad + Dp^2d + Epe + Fpf + Gpg + V(pd + e + g) + W(f - g).\end{aligned}$$

Diese Gruppe ist nun nach Lemma 2.1 regulatorgleich, so daß man insgesamt die Regulatorkette $\mathrm{R}^2(H) \subsetneq \mathrm{R}(H) \subsetneq H$ der Länge 2 erhält. □

Als Ergänzung werden nun noch alle Zwischengruppen der Regulatorkette von H angegeben.

Bemerkung 3.2. Mit Lemma 2.2 folgt aus (17) sofort $\langle U_{(i,1,-1,1)}, pb_1\rangle = U_{(i,0,-1,1)}$ für jedes $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Wegen (11), (12) und (14) ist demnach $\langle U_{(i,1,-1,1)}, pb_1\rangle = U_{(0,0,0,0)} = H$. Da $p^2b_1 \in U_{(i,1,-1,1)}$ ist, gilt $\frac{H}{U_{(i,1,-1,1)}} \cong \mathbb{Z}_p$ für alle $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Aus (7), (17) und (18) erhält man außerdem

$$\begin{aligned}U_{(i,1,-1,1)} &\overset{(7)}{=} Apa + U_{(i,1,-1,1)}\\ &\overset{(17),(18)}{=} A(a + i(b_2 + c_2)) + \mathrm{R}(H)\\ &= A(a + i(b_2 + c_2)) + \langle \mathrm{R}(H), a + i(b_2 + c_2)\rangle.\end{aligned}$$

Also folgt mit Lemma 2.5 angewandt auf $G = U_{(i,1,-1,1)} = A(a + i(b_2 + c_2)) + S$, wobei hier $S = \langle \mathrm{R}(H), a + i(b_2 + c_2)\rangle$ ist mit $Api(b_2 + c_2) \subseteq S$ nach (10) und $a + i(b_2 + c_2) \in S$, für alle $i \in \{0, \dots, p-1\}$

$$U_{(i,1,-1,1)} = Apa + \langle \mathrm{R}(H), a + i(b_2 + c_2)\rangle.$$

Weiter ist $U_{(i,1,-1,1)} = Apa + \langle \mathrm{R}(H), a + i(b_2 + c_2)\rangle \overset{(18)}{=} \langle \mathrm{R}(H), a + i(b_2 + c_2)\rangle \overset{(3)}{=} \langle \mathrm{R}(H), a - ipb_1\rangle$ wegen $R \subseteq \mathrm{R}(H)$. Da $p(a - ipb_1) \in \mathrm{R}(H) \subsetneq U_{(i,1,-1,1)}$ ist, erhält man nun auch $\frac{U_{(i,1,-1,1)}}{\mathrm{R}(H)} \cong \mathbb{Z}_p$ für jedes $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Also ist $|H : \mathrm{R}(H)| = p^2$ mit $\langle \mathrm{R}(H), a, pb_1\rangle = H$ und $\frac{H}{\mathrm{R}(H)} \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Deshalb enthalten die Gruppen H und $\mathrm{R}(H)$ genau die $p+1$ verschiedenen Zwischengruppen $\langle \mathrm{R}(H), a\rangle = U_{(0,1,-1,1)}$, $\langle \mathrm{R}(H), a+pb_1\rangle = U_{(p-1,1,-1,1)}, \dots, \langle \mathrm{R}(H), a+(p-1)pb_1\rangle = U_{(1,1,-1,1)}$ und $\langle \mathrm{R}(H), pb_1\rangle = \widetilde{U}$. Wegen $pb_1 \in \widetilde{U}$ und $pa, pa+pb_1+pd, pc_1-pd \in \mathrm{R}(H)$ ist sowohl $pd = (pa+pb_1+pd)-pa-pb_1 \in \widetilde{U}$ als auch $pc_1 = (pc_1-pd)+pd \in \widetilde{U}$. Also folgt mit Lemma 2.2 sofort $\widetilde{U} = \langle \mathrm{R}(H), pb_1, pc_1, pd\rangle = Apa + B_1pb_1 + C_1pc_1 + Dpd + R$, und es gibt mit $\widetilde{U}$ eine echte Zwischengruppe von H und $\mathrm{R}(H)$, die keine regulierende Untergruppe von H ist. Schließlich gilt noch $\mathrm{R}^2(H) \subsetneq \langle \mathrm{R}^2(H), pa \rangle = \mathrm{R}(H)$ und $p^2 a \in \mathrm{R}^2(H)$, so daß $\frac{\mathrm{R}(H)}{\mathrm{R}^2(H)} \cong \mathbb{Z}_p$ ist. Damit erhält man für die Regulatorkette von H sowie alle Zwischengruppen die obige Darstellung in Form eines Hassediagramms.

Literaturverzeichnis

[1] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups I+II, *Academic Press* (1970, 1973).
[2] D. M. Arnold, Pure subgroups of finite rank completely decomposable groups, *Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics* **874** (1981), 1–31.
[3] O. Mutzbauer, Regulating subgroups of Butler groups, Abelian Groups: Proc. 1991 Curaçao Conf., Marcel Dekker, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **146** (1993), 209–217.
[4] A. Mader, O. Mutzbauer and K. M. Rangaswamy, A generalization of Butler groups, Abelian Groups: Proc. 1994 Oberwolfach Conf., *Contemporary Mathematics* **171** (1994), 257–275.

STEPHAN LEHRMANN
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT AM HUBLAND
97074 WÜRZBURG
DEUTSCHLAND

OTTO MUTZBAUER
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT AM HUBLAND
97074 WÜRZBURG
DEUTSCHLAND

(Eingegangen am 1. Juni 1995)