Der rechts- und linksseitige Wert einer Distribution im Punkte

Von JOSEF MATUŠŮ (Prag)

In diesem Aufsatz wird der Begriff des rechts- und linksseitigen Wertes einer Distribution im Punkte eingeführt und über den Zusammenhang dieser einseitigen Werte mit dem Wert der Distribution im Punkte behandelt. Die Distributionen werden im Sinne der Definition von MIKUSIŃSKI—SIKORSKI (sieh [1]) aufgefasst. Alle hier auftretenden Distributionen sind auf der ganzen Zahlengeraden definiert.

A. Wir definieren die Heavisidesche Funktion durch

$$H(t)=\begin{cases}1 & \text{für} \quad t\geqq 0,\\ 0 & \text{für} \quad t<0.\end{cases}$$

Ihre Ableitung im distributiven Sinne ist $H'(t)=\delta(t)$, d. h. sie ist gleich der Diracschen „Funktion".

Wir beweisen zuerst den folgenden

Satz 1. *Genügt die Distribution $g(t)$ der Bedingung*

$$g(st)=g(t) \quad \text{für alle} \quad s>0, \tag{1}$$

dann ist $g(t)$ von der Form $c+a_0H(t)$, wobei c, a_0 gewisse Konstanten sind.

BEWEIS. Für jede Distribution $f(t)$ gilt

$$f'(t)=\lim_{a\to 0+}\frac{f(t+at)-f(t)}{at} \quad \text{für} \quad t\neq 0. \tag{2}$$

Wird in (2) $f(t)=g(t)$ gesetzt, dann folgt auf Grund von (1), daß

$$g'(t)=\lim_{a\to 0+}\frac{g[(1+a)t]-g(t)}{at}=\lim_{a\to 0+}\frac{g(t)-g(t)}{at}=0$$

für $t\neq 0$. Der weitere Verlauf des Beweises gestaltet sich ähnlich wie in Satz 16.1 (sieh [1]). Zuerst muss für ein bestimmtes $k\geqq 1$

$$g'(t)=a_0\delta(t)+a_1\delta'(t)+\ldots+a_k\delta^{(k)}(t) \tag{3}$$

sein, wobei $a_0, a_1, \ldots, a_k$ Konstanten sind. Aus (3) folgt

$$g(t)=c+a_0H(t)+a_1\delta(t)+\ldots+a_k\delta^{(k-1)}(t) \tag{4}$$

mit konstantem c. Aus $\delta^{(m)}(st)=\delta^{(m)}(t)/s^{m+1}$ und (1) folgt ferner

$$g(st) = g(t) = c+a_0 H(st)+\frac{a_1}{s}\delta(t)+\ldots+\frac{a_k}{s^k}\delta^{(k-1)}(t). \tag{5}$$

Wird nun (4) von (5) subtrahiert, dann folgt

$$a_0\big(H(st)-H(t)\big)+a_1\left(\frac{1}{s}-1\right)\delta(t)+\ldots+a_k\left(\frac{1}{s^k}-1\right)\delta^{(k-1)}(t) = 0. \tag{6}$$

In (6) ist aber $H(st)-H(t)=0$, ferner muß nach Satz 13.1 (sieh [1]) $a_1=a_2=\ldots$ $\ldots=a_k=0$ sein. Aus (4) folgt dann die Darstellung $g(t)=c+a_0 H(t)$.

Satz 2. *Die Darstellung $g(t)=c+a_0 H(t)$ der Distribution aus Satz* 1 *ist eindeutig.*

Beweis. Sei $g(t)=c_1+a_{0,1}H(t)$ eine andere derartige Darstellung der Distribution $g(t)$. Durch Subtraktion folgt

$$0 = c_1-c+(a_{0,1}-a_0)H(t) = c_2+a_{0,2}H(t). \tag{7}$$

Die Differentiation von (7) ergibt

$$0 = a_{0,2}\delta(t), \quad \text{d. h.} \quad a_{0,2} = 0.$$

Wird nun $a_{0,2}$ in (7) eingesetzt, dann erhalten wir $c_2=0$. Damit ist gezeigt, daß $c=c_1$, $a_0=a_{0,1}$ ist.

Satz 3. *Sei $t_0 \in E_1$. Existiert der Limes (im distributiven Sinne)*

$$g(t) = \lim_{a\to 0+} f(at+t_0), \tag{8}$$

dann ist $g(t)=c+a_0 H(t)$, wobei c, a_0 gewisse Konstanten sind.

Beweis. Die Distribution $g(t)$ genügt offenbar den Voraussetzungen von Satz 1.

Wir definieren nun den Begriff des rechtsseitigen Wertes einer Distribution im Punkte.

Definition 1. Sei $t_0 \in E_1$ und es existiere der Limes (im distributiven Sinne)

$$g(t) = \lim_{a\to 0+} f(at+t_0),$$

d. h. $g(t)=c+a_0 H(t)$ (sieh Satz 3). Als den rechtsseitigen Wert der Distribution $f(t)$ im Punkte t_0, in Zeichen $f(t_0+)$, verstehen wir die Zahl $c+a_0$. Wir setzen $c=\mathrm{Ko}\,f(t_0+)$ (der sog. konstante Teil von $f(t_0+)$), $a_0=\mathrm{He}\,f(t_0+)$ (der sog. Heavisidesche Teil von $f(t_0+)$).

Über den Zusammenhang zwischen dem Wert $f(t_0)$ einer Distribution $f(t)$ im Punkte $t_0 \in E_1$ und dem rechtsseitigen Wert $f(t_0+)$ gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4. *Existiert der Wert $f(t_0)$, dann existiert auch der rechtsseitige Wert $f(t_0+)$ und es gilt $f(t_0)=f(t_0+)$.*

Beweis. Die Existenz von $f(t_0)$ bedeutet, daß $\lim\limits_{a\to 0} f(at+t_0)=f(t_0)$ ist, d. h.

$f(t_0)=\lim_{a\to 0+} f(at+t_0)=c+a_0H(t)$, woraus $c=f(t_0)$ und $a_0=0$ folgt. Es existiert somit auch der rechtsseitige Wert der Distribution $f(t)$ im Punkte t_0, wobei $f(t_0+)= =c+a_0=f(t_0)$ ist.

Beispiel 1. Wir betrachten die Heavisidesche Distribution $H(t)$. Für jedes $a>0$ gilt $H(at)=H(t)$, d. h. $\lim_{a\to 0+} H(at)=H(t)=c+a_0H(t)$, wobei $c=0$ und $a_0=1$ ist. Der rechtsseitige Wert der Distribution $H(t)$ im Punkte $t_0=0$ ist also gleich $H(0+)=0+1=1$.

Bekanntlich besitzt die Heavisidesche Distribution $H(t)$ keinen Wert im Punkte $t_0=0$; wie eben gezeigt wurde, besitzt sie wenigstens den rechtsseitigen Wert.

Beispiel 2. Wir betrachten die Heavisidesche Funktion $H(t-s)$ (s reell). Für $a>0$ und $t_0=s$ ist $H([at+s]-s)=H(at)=H(t)$, d. h. $\lim_{a\to 0+} H([at+s]-s)= =H(t)=c+a_0H(t)$, wobei $c=0$ und $a_0=1$ ist. Der rechtsseitige Wert der Distribution $H(t-s)$ im Punkte $t_0=s$ ist also gleich $H(s+)=0+1=1$.

Satz 5. *Genügt die Distribution $g(t)$ der Bedingung*

$$g(st) = g(-t) \quad \text{für alle} \quad s<0, \tag{9}$$

dann ist $g(t)$ von der Form $\tilde{c}+\tilde{a}_0H(t)$, wobei $\tilde{c}$, $\tilde{a}_0$ gewisse Konstanten sind.

Beweis. Für jede Distribution $f(t)$ gilt

$$[f(-t)]' = \lim_{a\to 0+} \frac{f(-[1+a]t)-f(-t)}{at} \quad \text{für} \quad t\neq 0. \tag{10}$$

Wird in (10) $f(t)=g(t)$ gesetzt, dann folgt auf Grund von (9), daß $[g(-t)]'=0$ für $t\neq 0$, d. h. $g'(t)=0$ für $t\neq 0$. Der weitere Verlauf des Beweises gestaltet sich ähnlich wie in Satz 1. Zuerst muß

$$g'(t) = \tilde{a}_0\delta(t)+\tilde{a}_1\delta'(t)+\ldots+\tilde{a}_k\delta^{(k)}(t) \tag{11}$$

sein, wobei $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_k$ Konstanten sind. Aus (11) folgt dann

$$g(t) = \tilde{c}+\tilde{a}_0H(t)+\tilde{a}_1\delta(t)+\ldots+\tilde{a}_k\delta^{(k-1)}(t) \tag{12}$$

mit konstantem $\tilde{c}$. Aus $\delta^{(m)}(st)=-\delta^{(m)}(t)/s^{m+1}$ und (9) folgt ferner

$$g(st) = g(-t) = \tilde{c}+\tilde{a}_0H(st)-\frac{\tilde{a}_1}{s}\delta(t)-\ldots-\frac{\tilde{a}_k}{s^k}\delta^{(k-1)}(t). \tag{13}$$

Wird nun (12) (mit $-t$ statt t) von (13) subtrahiert, dann erhalten wir

$$\tilde{a}_0\big(H(st)-H(-t)\big)+\tilde{a}_1\left(-\frac{1}{s}-1\right)\delta(t)+\ldots+\tilde{a}_k\left(-\frac{1}{s^k}-1\right)\delta^{(k-1)}(t) = 0. \tag{14}$$

In (14) ist aber $H(st)-H(-t)=0$, ferner muß $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2=\ldots=\tilde{a}_k=0$ sein. Aus (12) folgt dann die Darstellung $g(t)=\tilde{c}+\tilde{a}_0H(t)$.

Satz 6. *Die Darstellung $g(t)=\tilde{c}+\tilde{a}_0H(t)$ der Distribution aus Satz 5 ist eindeutig.*

Der BEWEIS dieses Satzes verlauft ähnlich wie der von Satz 2.

Satz 7. *Sei* $t_0 \in E_1$. *Existiert der Limes (im distributiven Sinne)*

$$g(t) = \lim_{a \to 0-} f(at + t_0), \tag{15}$$

dann ist $g(t) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(t)$, *wobei* $\tilde{c}$, $\tilde{a}_0$ *gewisse Konstanten sind.*

BEWEIS. Die Distribution $g(t)$ genügt offenbar den Voraussetzungen von Satz 5.

Definition 2. Sei $t_0 \in E_1$ und es existiere der Limes (im distributiven Sinne)

$$g(t) = \lim_{a \to 0-} f(at + t_0),$$

d. h. $g(t) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(t)$ (sieh Satz 7). Als den linksseitigen Wert der Distribution $f(t)$ im Punkte t_0, in Zeichen $f(t_0-)$, verstehen wir die Zahl $\tilde{c} + \tilde{a}_0$. Wir setzen $\tilde{c} = \mathrm{Ko}\, f(t_0-)$, $\tilde{a}_0 = \mathrm{He}\, f(t_0-)$ (vergl. mit Definition 1).

Beispiel 3. Wir betrachten die Heavisidesche Distribution $H(t)$. Für jedes $a < 0$ gilt $H(at) = H(-t) = 1 - H(t)$, d. h. $\lim_{a \to 0-} H(at) = 1 - H(t) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(t)$, wobei $\tilde{c} = 1$ und $\tilde{a}_0 = -1$ ist. Der linksseitige Wert der Distribution $H(t)$ im Punkte $t_0 = 0$ ist also gleich $H(0-) = 1 - 1 = 0$. Dasselbe gilt für die Distribution $H(t-s)$ (s reell) im Punkte $t_0 = s$.
Ferner gilt der folgende

Satz 8. *Existiert der Wert* $f(t_0)$, *dann existiert auch der linksseitige Wert* $f(t_0-)$ *und es gilt* $f(t_0) = f(t_0-)$.

BEWEIS. Die Existenz von $f(t_0)$ bedeutet, dass $\lim_{a \to 0} f(at + t_0) = f(t_0)$, d. h. $f(t_0) = \lim_{a \to 0-} f(at + t_0) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(t)$, woraus $\tilde{c} = f(t_0)$, $\tilde{a}_0 = 0$ folgt. Es existiert somit auch der linksseitige Wert der Distribution $f(t)$ im Punkte t_0, wobei $f(t_0-) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 = f(t_0)$ ist.
Aus den Sätzen 4, 8 folgt der

Satz 9. *Existiert der Wert* $f(t_0)$, *dann existiert auch der rechts- und linksseitige Wert* $f(t_0+)$, $f(t_0-)$ *und es gilt:* $f(t_0) = f(t_0+) = f(t_0-)$.
Nach Satz 9 kann die Heavisidesche Distribution $H(t-s)$ (s reell) wirklich keinen Wert im Punkte $t_0 = s$ besitzen.

Satz 10. *Existiert der linksseitige (rechtsseitige) Wert* $f(t_0-)$ $\big(f(t_0+)\big)$ *der Distribution* $f(t)$ *im Punkte* t_0, *dann existiert auch der rechtsseitige (linksseitige) Wert* $f(t_0+)\big(f(t_0-)\big)$.

BEWEIS. Sei $f(t_0-) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 = \mathrm{Ko}\, f(t_0-) + \mathrm{He}\, f(t_0-)$, d. h. $\lim_{a \to 0-} f(at + t_0) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(t)$. Daraus folgt $\lim_{a \to 0-} f(-at + t_0) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 H(-t) = \tilde{c} + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0 H(t) = \lim_{b \to 0+} f(bt + t_0)$, d. h. es existiert auch der rechtsseitige Wert $f(t_0+) = \tilde{c} = \mathrm{Ko}\, f(t_0-)$. Ähnlich folgt der zweite Teil des Satzes: $f(t_0-) = c = \mathrm{Ko}\, f(t_0+)$, wenn $f(t_0+) = c + a_0 = \mathrm{Ko}\, f(t_0+) + \mathrm{He}\, f(t_0+)$ ist.

Beispiel 4. Für die Heavisidesche Funktion $H(t-s)$ wurde bewiesen (sieh Beispiel 2), daß $H(s+)=0+1$ ist. Nach Satz 10 ist dann $H(s-)=0$. In Beispiel 3 wurde gezeigt, daß $H(s-)=1-1$ ist; nach Satz 10 ist dann $H(s+)=1$.

Satz 11. *Es existiere der rechts- und linksseitige Wert $f(t_0+)$, $f(t_0-)$ der Distribution $f(t)$ mi Punkte $t_0 \in E_1$ und es sei $f(t_0+)=f(t_0-)$. Dann existiert auch der Wert $f(t_0)$ und es gilt $f(t_0)=f(t_0+)=f(t_0-)$.*

Beweis. Ist $f(t_0-)=\tilde{c}+\tilde{a}_0$, dann ist nach Satz 10 $f(t_0+)=\tilde{c}$. Aus $f(t_0-)=$ $=f(t_0+)$ folgt, daß $\tilde{a}_0=0$ ist. Ähnlich folgt, daß $a_0=0$ ist. Dann ist $f(t_0+)=$ $=\tilde{c}=c+a_0=c$. Aus $\lim\limits_{a\to 0-} f(at+t_0)=\tilde{c}=c=\lim\limits_{a\to 0+} f(at+t_0)$ folgt, daß der Wert $f(t_0)$ existiert und daß $f(t_0)=f(t_0+)=f(t_0-)$ ist.

Beispiel 5. Bekanntlich besitzt die Diracsche Funktion $\delta(t)$ keinen Wert im Punkte $t_0=0$. Wir wollen annehmen, daß $\delta(t)$ wenigstens einen rechts- oder linksseitigen Wert in diesem Punkte besitzt. Sei z. B. $\lim\limits_{a\to 0+} \delta(at)=c+a_0 H(t)$. Aus der Formel $a\delta(at)=\delta(t)$ folgt dann, daß $\delta(t)=\lim\limits_{a\to 0+} a\cdot \lim\limits_{a\to 0+} \delta(at)=\lim\limits_{a\to 0+} a\cdot\big(c+$ $+a_0 H(t)\big)=0$ ist, was aber nicht zutrifft. Die Diracsche Funktion $\delta(t)$ besitzt somit im Punkte $t_0=0$ auch keinen von den einseitigen Werten. Das ist auch für die Diracsche Funktion $\delta(t-s)$ (s reell) der Fall.

B. Der Diracschen Distribution $\delta(t-s)$ (s reell) entspricht als unbestimmtes Integral die Heavisidesche Funktion $H(t-s)$. Der Wert der Distribution $H(t-s)$ im Punkte $-\infty$ ist gleich Null, der Wert im Punkte $t_0\neq s$ ist gleich $\big(1+\operatorname{sgn}(t_0-s)\big)/2$.

Für das bestimmte Integral $\int\limits_{-\infty}^{t\neq s} \delta(\tau-s)\,d\tau$ haben wir dann

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau-s)\,d\tau = \frac{1+\operatorname{sgn}(t-s)}{2}. \tag{16}$$

In (16) darf nicht $t=s$ gesetzt werden, weil die Distribution $H(t-s)$ im Punkte $t_0=s$ keinen Wert besitzt. Wird aber für diese „singuläre" Stelle der Distribution $H(t-s)$ der rechtsseitige Wert benutzt, dann kann man von einem „rechtsseitigen" Integral von $\delta(t-s)$ im Punkte $t_0=s$ sprechen:

$$\int\limits_{-\infty}^{s+} \delta(\tau-s)\,d\tau = 1. \tag{17}$$

Ähnlich kann auch der Begriff des „linksseitigen" Integrals von $\delta(t-s)$ im Punkte $t_0=s$ eingeführt werden:

$$\int\limits_{-\infty}^{s-} \delta(\tau-s)\,d\tau = 0.$$

In jedem „regulären" Punkt $t_0\neq s$ der Distribution $H(t-s)$ fallen offenbar die Begriffe des rechtsseitigen, linksseitigen und des „beiderseitigen" Integrals von $\delta(t-s)$ im Punkte t_0 zusammen.

Satz 12. *Sei $b \in E_1$, ferner sei $f(t)$ eine im Intervall $(-\infty, b)$ summierbare Funktion. Es gilt dann*

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = D \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt. \tag{18}$$

Das Zeichen D bringt zum Ausdruck, daß das Integral im distributiven Sinn aufzufassen ist.

Beweis. Wir setzen $f(t)=0$ für $t \in E_1-(-\infty, b)$ und

$$G(t) = \begin{cases} -\int_{t}^{b} f(\tau)\,d\tau & \text{für} \quad t \in (-\infty, b), \\ 0 & \text{für} \quad t \geqq b. \end{cases}$$

Die Distribution $G(t)$ ist offenbar das unbestimmte Integral der Distribution $f(t)$ in E_1. Ferner gilt $\int_{-\infty}^{b} f(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(\tau)\,d\tau = \lim_{t\to-\infty} (G(b)-G(t))$. Es existiert somit der endliche Limes $\lim_{t\to-\infty} G(t)$. Aus der Stetigkeit der Funktion $G(t)$ folgt, dass $\lim_{t\to-\infty} G(t) = G(-\infty)$, wobei $G(-\infty)$ zugleich der Wert der Distribution $G(t)$ im Punkte $-\infty$ ist. Die Funktion $G(t)$ ist lokal summierbar und im Punkte b stetig. Es existiert daher der Wert der Distribution $G(t)$ im Punkte b und dieser ist gleich $G(b)$ (sieh Satz 16.3 in [1]). Damit ist gezeigt, daß

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = G(b) - \lim_{t\to-\infty} G(t) = G(b) - G(-\infty) = D \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt.$$

Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt, dass unter den angeführten Voraussetzungen das Lebesguesche Integral der betrachteten Funktion mit dem Integral im distributiven Sinne zusammenfällt. Ähnliches gilt auch für das rechts- und linksseitige Integral von $f(t)$ im Punkte b:

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = D \int_{-\infty}^{b+} f(t)\,dt = D \int_{-\infty}^{b-} f(t)\,dt.$$

C. Im Abschluss zeigen wir eine Anwendungsmöglichkeit der oben eingeführten einseitigen Werte einer Distribution im Punkte.

Wir betrachten einen Balken von der Länge $L>0$. Auf der t-Achse lassen wir die Endpunkte des Balkens mit den Punkten $t=0$ und $t=L$ zusammenfallen. Die kontinuierliche Belastung sei durch eine stetige oder stückweise stetige Funktion $g(t)$ ausgedrückt; wir setzen $g(t)=0$ in $E_1-\langle 0, L\rangle$. Der allgemeinste Fall der in der Praxis auftretenden Belastung kann nur bei Benutzung der Distributionen mathematische korrekt erfasst werden (abgesehen von den Mikusińskischen Operatoren, die auch ähnliches leisten (sieh [2]). Die Distribution

$$F(t) = g(t) + \sum_{i=1}^{m} P_i \delta(t-a_i) + \sum_{j=1}^{n} m_j \delta'(t-b_j) \tag{19}$$

stellt nämlich eine Belastung dar, die sich aus einer kontinuierlichen Belastung $g(t)$ und aus in den Punkten $a_i \in \langle 0, L\rangle$ und $b_j \in \langle 0, L\rangle$ wirkenden Einzelkräften P_i und Einzelmomenten m_j zusammensetzt ($m, n \geqq 0$ ganzzahlig). Der Ausdruck (19) kann mit Mitteln der klassischen Analysis nicht erfasst werden.

Die Distribution

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} P_i H(t-a_i) + \sum_{j=1}^{n} m_j \delta(t-b_j) \tag{20}$$

stellt ein unbestimmtes Integral von (19) dar: $q'(t)=F(t)$. Die in (20) auftretenden Distributionen $H(t-a_i)$, $\delta(t-b_j)$ besitzen in den Punkten a_i, b_j keinen Wert. Wie gezeigt wurde (sieh. Beispiel 1 und 2), haben die Distributionen $H(t-a_i)$ in den Punkten a_i mindestens die einseitigen Werte, jedoch die Distributionen $\delta(t-b_j)$ besitzen in den Punkten b_j auch keinen von den einseitigen Werten (sieh. Beispiel 5). Auf Grund dieser Tatsachen definieren wir nun die sogenannte Querkraft im Punkte t durch die Formel

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t+} g(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} P_i \int_{-\infty}^{t+} \delta(\tau-a_i)\,d\tau; \tag{21}$$

die Einzelmomente, die in der Darstellung (19) auftreten, werden also nicht mitaufgenommen. Das Zeichen D vor den Integralen in (21) wurde ausgelassen (betreffs des ersten Integrals sieh. Satz 12).

Die Distribution

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{-\infty}^{t} \Big(\int_{-\infty}^{\tau} g(\mu)\,d\mu \Big) d\tau + \sum_{i=1}^{m} P_i \int_{-\infty}^{t} H(\tau-a_i)\,d\tau + \sum_{j=1}^{n} m_j H(t-b_j) = \\ &= \int_{-\infty}^{t} (t-\tau) g(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} P_i \int_{-\infty}^{t} H(\tau-a_i)\,d\tau + \sum_{j=1}^{n} m_j H(t-b_j) \end{aligned} \tag{22}$$

stellt ein unbestimmtes Integral von (20) dar: $m'(t)=q(t)$. Die in (22) auftretenden Distributionen $H(t-b_j)$ besitzen in den Punkten b_j keinen Wert, jedoch aber mindestens die einseitigen Werte. Wir definieren deshalb das sogenannte Biegungsmoment im Punkte t durch die Formel

$$M(t) = \int_{-\infty}^{t+} (t-\tau) g(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} P_i \int_{-\infty}^{t+} H(\tau-a_i)\,d\tau + \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{-\infty}^{t+} \delta(\tau-b_j)\,d\tau. \tag{23}$$

Das Zeichen D vor den Integralen in (23) wurde wieder ausgelassen.

Die durch (21), (23) eingeführten Begriffe der Querkraft und des Biegungsmomentes im Punkte t entsprechen den in der Mikusińskischen Operatorenrechnung definierten analogischen Begriffen (sieh [2]).

Literaturverzeichnis

[1] J. G. Mikusiński—R. Sikorski, The elementary theory of distributions (I), *Rozprawy Matematyczne* XII, Warszawa (1957).

[2] J. G. Mikusiński, Rachunek operatorów, *Monografie Matematyczne*, Tom **30**, Warszawa 1957.

(Eingegangen am 28. Juli 1975.)