Additiv kommutative und idempotente Halbringe mit Faktorbedingung, I

Von DÖRTE HAFTENDORN (TU Clausthal)*)

Dem Andenken von Herrn Prof. Dr. Andor Kertész gewidmet.

§ *1 Einleitung*

Unter einem *Halbring* verstehen wir eine Algebra $S=(S, +, \cdot)$, für die $(S, +)$ und $(S, \cdot)$ Halbgruppen sind und in der die Distributivgesetze wie für Ringe gelten. Wir bezeichnen die neutralen Elemente dieser Halbgruppen, soweit sie existieren, als Nullelement bzw. Einselement von S und sprechen insbesondere von einem annullierenden Nullelement 0, wenn $a0=0a=0$ für alle $a\in S$ erfüllt ist. Dabei beschäftigen wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit Halbringen, in denen die *A*ddition *k*ommutativ und *i*dempotent ist, und die wir kurz *AKI-Halbringe* nennen. Für jeden solchen Halbring S wird durch

(1a) $$a \leqq b \quad \Leftrightarrow \quad a+b=b \quad \Leftrightarrow \quad a+x=b \text{ für ein } x\in S$$

eine natürliche Halbordnung definiert, bezüglich der $(S, \leqq)$ ein Halbverband mit $a+b=\sup(a, b)$ ist. Ersichtlich gilt

$$a \leqq b \quad \Rightarrow \quad ca \leqq cb \text{ und } ac \leqq bc \text{ für alle } a, b, c\in S.$$

Damit können AKI-Halbringe $(S, +, \cdot)$ ebenso als *halbverbandsgeordnete Halbgruppen* $(S, \leqq, \cdot)$ gekennzeichnet werden, wenn man in diese Begriffsbildung (wie in der französischen Literatur, vgl. [3]) die Distributivität der Multiplikation gegenüber $a+b=\sup(a, b)$ einschließt.

Naheliegende Beispiele für AKI-Halbringe sind einmal *distributive Verbände* $(S, \cup, \cap)$, wenn man etwa $\cup$ als Addition und $\cap$ selbst als Multiplikation interpretiert. Zum anderen sind *verbandsgeordnete Gruppen* (vgl. [4]) nach Weinert [9] genau alle AKI-Halbkörper ohne Nullelement, d. h. alle AKI-Halbringe $(S, +, \cdot)$, für die $(S, \cdot)$ eine Gruppe ist. Weiter bilden die Ideale eines kommutativen ZPI-Ringes mit der für Ideale üblichen Addition und Multiplikation einen AKI-Halbring S. In allen diesen Beispielen ist die folgende Aussage erfüllt, die wir in Anlehnung an die idealtheoretische Sprechweise als Faktorbedingung bezeichnen:

Definition 1.1 Ein AKI-Halbring S heißt ***Halbring mit Faktorbedingung*** *oder kurz* ***F-Halbring****, wenn für alle $a, b\in S$ gilt:*

F *Aus $a \leqq b$ folgt $a = bx = yb$ mit geeigneten $x, y\in S$, d. h. $a\in bS\cap Sb$.*

*) Die vorliegende Arbeit ist ein Teil der Dissertation der Verfasserin, TU Clausthal, 1975.

Diese Faktorbedingung wurde zusammen mit einem weiteren Axiom A5 (zu jedem $a \in S$ existiert ein $e_a \in S$ mit $e_a e_a = e_a$ und $ae_a = a$) von BOSBACH in [1] benutzt, um halbverbandsgeordnete Halbgruppen als *Teilbarkeitshalbgruppen* zu definieren. Unter Verwendung des Axioms A5 wird in [1] die Einbettbarkeit jeder Teilbarkeitshalbgruppe in eine Teilbarkeitshalbgruppe mit Einselement gezeigt. Aus einem Darstellungssatz für quotientenabgeschlossene Teilbarkeitshalbgruppen mit Einselement ergeben sich dann Aussagen über subdirekte Zerlegungen beliebiger Teilbarkeitshalbgruppen und auch wieder bekannte klassische Resultate über Verbände bzw. verbandsgeordnete Halbgruppen. Durch diese Arbeit wurden wir angeregt, durch Verwendung des Halbringbegriffes und von Aussagen über Quotientenhalbringe (vgl. § 2) einige Überlegungen in [1] zu vereinfachen und das zusätzliche Axiom A5 entbehrlich zu machen. [1]) Die dabei entstandenen allgemeinen Strukturaussagen über F-Halbringe sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Vorbereitend legen wir in § 2 einige Begriffsbildungen fest, die wir teilweise auch bei der folgenden Inhaltsübersicht verwenden:

In § 3 zeigen wir, daß jeder F-Halbring S bezüglich der natürlichen Halbordnung ein distributiver Verband ist und daß die Multiplikation auch gegenüber $\inf(a, b) = a \cap b$ distributiv ist (Satz 3.2). Daraus folgt neben anderen später gebrauchten Aussagen, daß jeder F-Halbring S negative Elemente (vgl. Def. 2.2) enthält, die einen F-Unterhalbring S^- von S bilden, und daß die in Def. 1.1 geforderten Faktoren $x, y \in S$ sogar stets aus S^- gewählt werden können (Satz 3.6). Weiter sind multplikativ idempotente Elemente von S stets negativ und liegen im Zentrum $Z(S^-)$ von S^- (Satz 3.8) und damit nach späteren Ergebnissen sogar im Zentrum $Z(S)$ von S (Folg. 5.6). Die multpilikativ idempotenten F-Halbringe sind daher mit den distributiven Verbänden identisch (Folg. 3.9).

Unter Verwendung allgemeiner Aussagen über Quotientenhalbringe erhalten wir in § 4: Jeder F-Halbring S mit Einselement ist Quotientenhalbring $Q(S^-, (S^+)^{-1})$ seines Negativbereiches S^- bezüglich der Unterhalbruppe $\Sigma = (S^+)^{-1} \subseteqq S^-$ der in S invertierbaren Elemente von S^- (Satz 4.2). Umgekehrt lassen sich zu jedem negativen F-Halbring S^- mit Einselement alle F-Oberhalbringe mit diesem Negativbereich als Quotientenhalbringe $Q(S^-, \Sigma)$ von S^- gewinnen (Satz 4.4); dabei entsprechen diesen F-Oberhalbringen von $(S^-, +, \cdot)$ in eineindeutiger Weise gewisse Unterhalbgruppen Σ von $(S^-, \cdot)$, die sich durch Aussagen in S^- kennzeichnen lassen (z. B. Σ ist Ende von S^-, vgl. Prop. 4.3). In diesem Sinne ist die Struktur der F-Halbringe mit Einselement bereits durch die der negativen F-Halbringe mit Einselement festgelegt.

Wir bemerken noch, daß die Voraussetzung der Existenz eines Einselementes für alle Aussagen von § 4 unerläßlich ist, da sonst gemäß Prop. 4.1 überhaupt keine kürzbaren Elemente existieren. Dies leitet zu den Überlegungen des zweiten Teiles dieser Arbeit über. Nach dem Hauptergebnis (Satz 5.5) existiert zu jedem F-Halbring S ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter minimaler F-Oberhalbring S_1 mit Einselement, und es gilt $S_1^- \cap S = S^-$.

Herrn Prof. Weinert danke ich für alle Anregungen und Förderungen beim Entstehen dieser Arbeit.

---

[1]) Wir danken Herrn PROF. BOSBACH für Hinweise und verweisen auf seine Arbeit [2], in der auf anderem Wege die Einbettbarkeit einer „schwachen Teilbarkeitshalbgruppe" (ohne A5) in eine Teilbarkeitshalbgruppe mit Einselement gezeigt wird.

§ 2 *Allgemeine Begriffsbildungen, Quotientenhalbringe*

Im ersten Teil dieses Paragraphen legen wir für AKI-Halbringe $S=(S, +, \cdot)$ einige Begriffsbildungen fest. Sie beziehen sich auf die multiplikative Struktur von S (zum Teil im Zusammenhang mit der durch (1a) definierten natürlichen Halbordnung), doch können wir wegen unserer Voraussetzung über $(S, +)$ auf den Zusatz „multiplikativ" verzichten. Auch geben wir für („multiplikativ") links-rechts-duale Feststellungen jeweils nur eine Formulierung.

Definition 2.1 Es sei S ein AKI-Halbring.
Mit $I(S)$ bezeichnen wir die Menge aller idempotenten Elemente von S, d. h. aller Elemente $e\in S$ mit $ee=e$.
Mit $Z(S)$ bezeichnen wir das Zentrum von S, d. h. die Menge aller Elemente $z\in S$ mit $za=az$ für alle $a\in S$.
Ein Element $c\in S$ heißt linkskürzbar (in S), *wenn aus $cx=cy$ mit $x, y\in S$ stets $x=y$ folgt. Die Menge aller (links- und rechts-) kürzbaren Elemente von S wird mit $C(S)$ bezeichnet.*

Es ist klar, daß $Z(S)$ für $Z(S)\neq\emptyset$ ein kommutativer Unterhalbring von $(S, +, \cdot)$ und $C(S)$ für $C(S)\neq\emptyset$ eine Unterhalbgruppe von $(S, \cdot)$ ist.

Wir bemerken sogleich, daß die (natürlichen) Halbordnungen $\leqq_S$ eines AKI-Halbringes S und $\leqq_U$ eines Unterhalbringes U von S stets

(2a) $$a \leqq_S b \Leftrightarrow a \leqq_U b \quad \text{für alle} \quad a, b\in U$$

erfüllen und daher die eben gebrauchte Bezeichnungsunterscheidung im folgenden weggelassen werden kann.

Definition 2.2 Es sei S ein AKI-Halbring und $\leqq$ seine natürliche Halbordnung. Ein Element $a\in S$ heißt linkspositiv bzw. linksnegativ, wenn $ax\geqq x$ bzw. $ax\leqq x$ für alle $x\in S$ gilt.
Die Menger aller (links- und rechts-) positiven bzw. negativen Elemente von S nennen wir den Positivbereich S^+ bzw. den Negativbereich S^- von S.
Falls $S=S^+$ bzw. $S=S^-$ gilt, bezeichnen wir den Halbring S selbst als positiv bzw. negativ.

Im übrigen werden negative Elemente (in [3]: „ganze Elemente") und S^- im folgenden eine größere Rolle spielen. Unmittelbar ersichtlich sind folgende Aussagen:

Proposition 2.3 Für jeden AKI-Halbring S sind S^- und S^+ (entweder leer oder) Unterhalbringe von S; S^- ist Anfang, S^+ Ende von $(S, \leqq)$. [2]) *Besitzt S ein Einselement* 1, *so gilt*

$$S^- = \{a\in S \mid a \leqq 1\} \quad \textit{und} \quad S^+ = \{a\in S \mid a \geqq 1\}.$$

Für einen Unterhalbring U von S gilt $S^-\cap U\subseteqq U^-$, also

(2b) $$S^-\cap U = U^- \Leftrightarrow S^- \supseteqq U^-.$$

Ab § 4 machen wir wesentlich Gebrauch von folgenden Aussagen über Rechtsquotientenhalbringe (vgl. WEINERT [10]):

---

[2]) Eine Teilmenge A einer halbgeordneten Menge T heißt *Anfang* von T, wenn $t\leqq a$ mit $a\in A$, $t\in T$ stets $t\in A$ impliziert.

Es sei $(S, +, \cdot)$ ein Halbring und $(\Sigma, \cdot)$ eine Unterhalbgruppe in S kürzbarer Elemente. Ein Oberhalbring T von S heißt *Rechtsquotientenhalbring von S bezüglich* Σ, wenn T ein Einselement besitzt, jedes $\gamma \in \Sigma$ ein Inverses $\gamma^{-1} \in T$ hat und $T = \{a\gamma^{-1} | a \in S, \gamma \in \Sigma\}$ gilt. Ein solcher RQ-Halbring T existiert genau dann, wenn die entsprechend definierte *Rechtsquotientenhalbgruppe* $(T, \cdot)$ von $(S, \cdot)$ bezüglich Σ existiert, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Ore-Asano-Bedingung

$$q_R(S, \Sigma) \qquad a\Sigma \cap \gamma S \neq \emptyset \quad \text{für alle } a \in S, \gamma \in \Sigma$$

erfüllt ist. In diesem Falle ist $(T, \cdot)$ bis auf Isomorphie durch $(S, \cdot)$ und Σ eindeutig bestimmt, und es gilt

$$a\gamma^{-1} = b\delta^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma\sigma = \delta s \text{ und } a\sigma = bs \text{ für ein Paar } \sigma \in \Sigma, s \in S,$$

$$\alpha\gamma^{-1} \cdot b\delta^{-1} = at(\delta\tau)^{-1} \quad \text{mit } b\tau = \gamma t \text{ für ein Paar } \tau \in \Sigma, t \in S.$$

Weiterhin folgt aus $q_R(S, \Sigma)$, daß je zwei Elemente aus T mit einem gemeinsamen „Nenner" $\gamma \in \Sigma$ in der Form $a\gamma^{-1}$, $b\gamma^{-1}$ geschrieben werden können. Damit kann die Addition von $(S, +, \cdot)$ auf genau eine Weise zu einer Addition von $T = (T, \cdot)$ so fortgesetzt werden, daß $(T, +, \cdot)$ ein Halbring wird, und zwar gemäß:

$$a\gamma^{-1} + b\gamma^{-1} = (a+b)\gamma^{-1}.$$

Wir können also bis auf Isomorphie von dem RQ-Halbring T von $(S, +, \cdot)$ bezüglich Σ sprechen und schreiben $T = Q_R(S, \Sigma)$. Ersichtlich ist mit S auch T ein AKI-Halbring.

Im allgemeinen sind $q_R(S, \Sigma)$ und die entsprechende linksseitige Ore-Asano-Bedingung $q_L(S, \Sigma)$ unabhängig. Gelten jedoch beide, so ist jede Rechtsquotientenhalbgruppe von S bezüglich Σ auch Linksquotientenhalbgruppe von S bezüglich Σ und entsprechend für Halbringe. Statt $T = Q_R(S, \Sigma) = Q_L(S, \Sigma)$ schreiben wir dann $T = Q(S, \Sigma)$ und sprechen von dem (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) *Quotientenhalbring von S bezüglich Σ*.

Unter allen Unterhalbgruppen Σ_i von $(S, \cdot)$, die zur gleichen RQ-Halbgruppe bzw. zum gleichen RQ-Halbring $T = Q_R(S, \Sigma_i)$ führen, gibt es genau eine größte Unterhalbgruppe Σ, die also $\Sigma \supseteq \Sigma_i$ und $T = Q_R(S, \Sigma)$ erfüllt. Sie besteht aus allen in T invertierbaren Elementen aus S und läßt sich wie folgt kennzeichnen:

1) Σ ist *konsistente Unterhalbgruppe von* $C(S)$, d. h. aus $c, d \in C(S)$ und $cd \in \Sigma$ folgt $c, d \in \Sigma$.
2) Für jedes Σ_i ist Σ die kleinste konsistente Unterhalbgruppe von $C(S)$, die Σ_i enthält.

Damit liegt also eine eindeutige Korrespondenz vor zwischen den wesentlich verschiedenen (d. h. nicht relativ bezüglich S isomorphen) RQ-Halbgruppen T von $(S, \cdot)$ bzw. RQ-Halbringen T von $(S, +, \cdot)$ und den konsistenten Unterhalbgruppen Σ von $C(S)$, die $q_R(S, \Sigma)$ erfüllen. Existieren überhaupt solche Unterhalbgruppen, so gibt es unter diesen wieder eine größte und damit einen maximalen RQ-Halbring von S, der nach [11] keine echte Erweiterung durch Rechtsquotientenbildung mehr gestattet.

§ 3 *F-Halbringe*

In diesem Paragraphen behandeln wir Aussagen, die sich für AKI-Halbringe aus der in § 1 eingeführten Faktorbedingung F ergeben.

Hilfssatz 3.1 *In einem F-Halbring S gilt:*

(1) *Zu jedem $b \in S$ existiert wenigstens ein von links reproduzierender Faktor b_L mit $b_L b = b$.*

(2) $$\textit{Aus} \quad b_L b = b \quad \textit{und} \quad a \leqq b \quad \textit{folgt} \quad b_L a = a.$$

BEWEIS. (1) folgt sofort aus F. Wegen $a \leqq b$, also $a = bx$ ergibt sich (2) gemäß $b_L a = b_L bx = bx = a$, q. e. d.

Satz 3.2 *Struktursatz für F-Halbringe*
Jeder F-Halbring $S = (S, +, \cdot)$ ist bezüglich seiner natürlichen Halbordnung ein Verband, wobei $\inf(a, b) = a \cap b$ gegeben ist durch

(3a) $$\begin{aligned} a \cap b &= ab' \quad \textit{für} \quad b = (a+b)b' \\ &= ba' \quad \textit{für} \quad a = (a+b)a' \\ &= a''b \quad \textit{für} \quad a = a''(a+b) \\ &= b''a \quad \textit{für} \quad b = b''(a+b) \end{aligned}$$

mit jeweils einem Element $a', b', a'', b'' \in S$, welches gemäß F die entsprechende Gleichung erfüllt. Dieser Verband $(S, +, \cap)$ ist distributiv. Darüber hinaus ist die Multiplikation auch gegenüber dem Durchschnitt distributiv, d. h. *es gilt*

(3b) $$c(a \cap b) = ca \cap cb, \quad (a \cap b)c = ac \cap bc.$$

BEWEIS. a) Wir zeigen zunächst, daß

(3c) $$a \cap b = ab' + ba' = a''b + b''a.$$

Infimum von a und b ist und (3b) gilt. Jedenfalls haben wir

$$b = ab' + bb' \geqq ab' = a''(a+b)b' = a''b \leqq a''a + a''b = a$$

und entsprechend

$$a \geqq ba' = b''(a+b)a' = b''a \leqq b.$$

Umgekehrt folgt aus $s \leqq a$, $s \leqq b$ zunächst $s = y(a+b)$ nach F, also

$$s = ya + yb = y(a+b)a' + y(a+b)b' = sa' + sb' \leqq ba' + ab',$$

womit $ab' + ba' = a''b + b''a$ als $\inf(a, b)$ nachgewiesen ist. Aus $a = (a+b)a'$ und $b = (a+b)b'$ folgt $ca = (ca + cb)a'$ und $cb = (ca + cb)b'$, also ergibt sich aus (3c)

$$ca \cap cb = (ca)b' + (cb)a' = c(ab' + ba') = c(a \cap b)$$

und dual dazu die zweite Gleichung von (3b).

b) Zum Beweis von (3a) setzen wir $ba' = xb$ (aus $ba' \leqq b$) und $w = (a+b)_L \cap x$. Unter Verwendung von (3b) ergibt sich

$$wb = (a+b)_L b \cap xb = b \cap xb = b \cap ba' = ba' \leqq a$$

und ähnlich $wa = a \cap xa \leqq a$. Daraus folgt.

$$ba' = wb = w(a+b)b' = (wa+wb)b' \leqq ab',$$

womit natürlich auch $ab' \leqq ba'$ gilt.

c) Zum Nachweis der Distributivität des Verbandes $(S, +, \cap)$ genügt es, etwa $c \cap (a+b) = (c \cap a) + (c \cap b)$ zu zeigen, wobei $c \cap (a+b) \geqq (c \cap a) + (c \cap b)$ trivial ist. Mit $c = y(c+a+b)$ (aus $c \leqq c+a+b$) und $w = (c+a+b)_L \cap y$ erhält man wie im Beweisschritt b) zunächst $c = w(c+a+b)$, $wa \leqq a$, $wb \leqq b$ und dann $c + wa = w(c+a+b+a) = c$, also $wa \leqq c$ und entsprechend $wb \leqq c$. Wir wenden nun die dritte Zeile von (3a) zur Bestimmung von $c \cap (a+b)$ aus $c = w\big(c+(a+b)\big)$ an und erhalten mit den bereitgestellten Abschätzungen

$$c \cap (a+b) = w(a+b) = wa + wb \leqq (c \cap a) + (c \cap b), \qquad \text{q. e. d.}$$

Folgerung 3.3 (1) *In einem F-Halbring S fallen die Begriffe minimales Element, kleinstes Element und Nullelement zusammen. Existiert ein solches Element* $0 \in S$ *so ist es annullierendes Nullelement und damit negativ.*

(2) *Existiert in einem F-Halbring S ein maximales und damit größtes Element, so ist es Einselement von S, woraus* $S = S^-$ *folgt.*

BEWEIS. Die erste Feststellung von (1) ist im Verband $(S, +, \cap)$ klar. Besitzt nun S ein Nullelement $0 \in S$, so folgt für jedes $a \in S$ wegen $0 \leqq a$ und F zunächst $0 = ax$ mit $0 \leqq x$, also $a0 \leqq ax = 0$ und damit $a0 = 0$. Für (2) sei m größtes Element von S. Aus $m_L \leqq m$ folgt dann $m = m_L m \leqq mm$, also $m^2 = m$; damit ist m Einselement von S nach Hilfssatz 3.1 (2) und $S = S^-$ nach Prop. 2.3., q. e. d.

Wie zu jedem Halbring kann man zu einem AKI-Halbring S ein annullierendes Nullelement $0 \notin S$ adjungieren (vgl. [9]). Der entstehende AKI-Halbring $S \cup \{0\}$ erfüllt F, wenn dies für S gilt. Der entsprechende Versuch, ein maximales Einselement zu adjungieren, führt aber nur im Spezialfall zum Ziel:

Proposition 3.4 Adjungiert man zu einem AKI-Halbring $(S, +, \cdot)$ *ein Element* $1 \notin S$ *gemäß*

$$1 + a = a + 1 = 1 \quad \textit{und} \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \textit{für alle} \quad a \in S \cup \{1\},$$

so ist die Algebra $(S \cup \{1\}, +, \cdot)$ *genau dann Halbring, wenn* $S = S^-$ *gilt. Natürlich ist dann* $S \cup \{1\}$ *AKI-Halbring und erfüllt F, wenn dies für S gilt.*

BEWEIS. Fraglich ist nur die Gültigkeit des Distributivgesetzes für $S \cup \{1\}$, und zwar die Gleichheit von $a = a1 = a(1+b)$ und $a + ab$. Es gilt aber $a = a + ab$ und dual $a = a + ba$ für alle $a, b \in S$ genau dann, wenn $S = S^-$ erfüllt ist. q. e. d.

Proposition 3.5 In einem F-Halbring S gilt:

(1) *Jedes linksnegative (linkspositive) Element* $a \in S$ *ist negativ (positiv).*

(2) *Aus* $ax + x = ay + y$ *folgt* $x = y$.

(3) *Für alle* $a, b \in S$ *gibt es ein* $s \in S$ *mit* $b = as + s$.

(4) *Für jedes* $a \in S$ *ergibt sich aus* $ea = a$ *die Darstellung*

$$a = (a+e)(a \cap e),$$

wobei $a \cap e$ *unabhängig von dem a von links reproduzierenden Faktor* $e = a_L$ *allein durch a festgelegt ist und* $a \cap e \in S^-$ *gilt.*

Beweis. Zum Nachweis von (1) sei $a \in S$ linksnegativ und $x \in S$ beliebig. Für einen $a+x$ von rechts reproduzierenden Faktor $z=(a+x)_R$ gilt dann $a=az \leqq z$, also ist a gemäß

$$xa = xaz \leqq xz = x$$

auch rechtsnegativ. Für (2) wählen wir $z=(x+y)_L$. Wegen $z \leqq a+z$ gilt $z=v(a+z)$ mit $v \in S$, und es folgt

$$x = zx = v(a+z)x = v(ax+x) = v(ay+y) = v(a+z)y = zy = y.$$

Unmittelbar aus F ergibt sich (3) wegen $b \leqq ab+b$ gemäß $b=(ab+b)u= =a(bu)+(bu)$ mit $bu=s \in S$. Daraus folgt für (4) $a=as+s=(a+e)s$, wobei $es=s$ wegen $a \geqq s$ gilt. Die Anwendung von Satz 3.2 (3a) zeigt $a \cap e=es=s$; gemäß (2) ist s eindeutig bestimmt, also unbabhängig von der Wahl von e mit $ea=a$. Damit bleibt nur $s=a \cap e \in S^-$ zu zeigen. Dazu sei $x \in S$ beliebig und $z=(a+x)_L$, also $za=a$ und $s=a \cap e=a \cap z$. Unter Verwendung von (3b) aus Satz 3.2 gilt dann

$$(a \cap e)x = (a \cap z)x = ax \cap zx = ax \cap x \leqq x,$$

d. h. $a \cap e$ ist linksnegativ und damit nach (1) negativ, q. e. d.

Insbesondere die letzte Behauptung dieser Proposition erweist sich als wichtiges Hilfsmittel für Strukturaussagen über F-Halbringe.

Satz 3.6 *Jeder F-Halbring S enthält negative Elemente und in Verschärfung von F gilt:*

$$a \leqq b \Rightarrow a \in bS^- \cap S^- b.$$

Insbesondere ist damit der Negativbereich S^- von S ebenfalls F-Halbring, und ein Einselement von S^- ist auch Einselement von S. Für jeden F-Unterhalbring U von S gilt $U^- \subseteqq S^-$, also $U^-=S^- \cap U$.

Beweis. Zu $a \leqq b$ existiert nach F jedenfalls ein $y \in S$ mit $a=yb$. Für $e= =(b+y)_L$ gilt $(y \cap e) \in S^-$ nach Prop. 3.5 (4) und unter Verwendung von (3b) folgt $(e \cap y)b=eb \cap yb=b \cap a=a$. Dual ergibt sich $a \in bS^-$. Für die letzte Behauptung sei $a \in U^-$; dann folgt aus $ea=a \leqq e$ mit $e \in U$ nach Prop. 3.5 (4) $a=a \cap e \in S^-$, q. e. d.

Folgerung 3.7 Zu jedem Element a eines F-Halbringes S gibt es ein a von beiden Seiten reproduzirendes Element $e \in S^-$ und es gilt

(3d) $$a = (a+e)(a \cap e) = (a \cap e)(a+e).$$

Beweis. Gemäß Satz 3.6 existieren $a_L, a_R \in S^-$ und $e=a_L+a_R$ erfüllt $ea= =(a_L+a_R)a = +a_R a=a$. Damit folgt (3d) sofort aus Prop. 3.5 (4), q. e. d.

Satz 3.8 *Die Menge $I(S)$ der idempotenten Elemente*[3]) *eines F-Halbringes S erfüllt $I(S) \subseteqq S^-$ und es gilt*

(3e) $$ae = a \cap e = ea \quad \textit{für alle} \quad e \in I(S), \quad a \in S^-.$$

---

[3]) Beispiel 6.1 zeigt, daß $I(S)=\emptyset$ möglich ist.

Beweis. Wendet man Prop. 3.5 (4) auf $ea=a$ für $a=e=e^2$ an, erhält man sofort $e \cap e = e \in S^-$. (3e) ergibt sich für $a \in S^-$ aus der ersten und letzten Zeile von (3a) gemäß

$$\begin{aligned} a \cap e &= ae \quad \text{wegen} \quad e=(a+e)e \\ &= ea \quad \text{wegen} \quad e=e(a+e), \end{aligned} \qquad \text{q. e. d.}$$

Wie wir in § 1 erwähnten, läßt sich jeder distributive Verband $(S, \cup, \cap)$ als F-Halbring $(S, +, \cdot)$ auffassen, in dem auch die Multiplikation idempotent ist. Die Umkehrung ergibt sich sofort aus Satz 3.8:

Folgerung 3.9 Ein F-Halbring $(S, +, \cdot)$ ist genau dann idempotent, wenn

$$a \cdot b = b \cdot a = a \cap b \quad \textit{für alle} \quad a, b \in S$$

gilt, d. h. wenn er bezüglich der Operationen $+$ und $\cdot$ ein distributiver Verband ist. Insbesondere gilt dann $S=S^-$.

Vorgreifend bemerken wir noch zu Satz 3.8, daß aus (3e) sogar $I(S) \subseteqq Z(S)$ folgt, da wir jeden F-Halbring S nach § 5 in einen F-Halbring mit Einselement einbetten können und in letzterem jedes Element nach § 4 Quotient negativer Elemente ist.

§ 4 *F-Halbringe mit Einselement*

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß jeder F-Halbring S mit Einselement Quotientenhalbring eines negativen F-Halbringes S^- mit Einselement ist. Entsprechende Sätze können für F-Halbringe ohne Einselement nicht gelten, da dann nach der folgenden Proposition gar keine für eine Quotientenbildung erforderlichen kürzbaren Elemente existieren:

Proposition 4.1 In einem F-Halbring S sind positive Elemente stets kürzbar, und kürzbare Elemente existieren genau dann, wenn S ein Einselement 1 enthält, d. h. es gilt:

$$S^+ \subseteqq C(S) \quad \text{und} \quad C(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow 1 \in S.$$

Beweis. Sei $p \in S^+$ und $pa=pb$. Mit $e=(a+b)_L$ und $ep \geqq e$, also $yep=e$ folgt die erste Behauptung aus $yepa=yepb$. Weiter existiert mit einem linkskürzbaren Element c wegen $cc_R=c \Rightarrow cc_R s=cs \Rightarrow c_R s=s$ $(s \in S)$ ein Linkseinselement in S, was den nichttrivialen Teil der zweiten Behauptung zeigt, q. e. d.

Satz 4.2 *In jedem F-Halbring S mit Einselement 1 sind positive Elemente invertierbar und S ist Quotientenhalbring $\mathrm{Q}(S^-, (S^+)^{-1})$ seines Negativbereiches S^- bezüglich der Unterhalbgruppe $\Sigma=(S^+)^{-1}$ von $(S^-, \cdot)$. Dabei besteht Σ aus den in S invertierbaren Elementen von S^-. Insbesondere kann jedes Element $a \in S$ gemäß*

$$\text{(4a)} \qquad a=(a+1)(a \cap 1)=(a \cap 1)(a+1)=\alpha^{-1}(a \cap 1)=(a \cap 1)\alpha^{-1}$$

sogar mit „gleichem Zähler und Nenner" $a \cap 1 \in S^-$, $\alpha=(a+1)^{-1} \in \Sigma$ als Links- und Rechtsquotient geschrieben werden. [4])

[4]) Diese Feststellung trifft für beliebige Quotientenhalbringe $Q_L(S, \Sigma)=Q_R(S, \Sigma)$ im allgemeinen nicht zu.

Beweis. Zu jedem Element $p \in S^+$ existieren wegen $1 \leqq p$ gemäß F Elemente $x, y \in S$ mit $1 = px = yp$. Also gilt $x = y = p^{-1} \in S^-$, wobei letzteres auch aus S (3.6) folgt. Die Menge $\Sigma = (S^+)^{-1} = \{p^{-1} | p \in S^+\}$ ist Unterhalbgruppe von $(S^-, \cdot)$, und (4a) folgt aus Folg. 3.7 mit $e = 1$, womit definitionsgemäß $S = Q_L(S^-, \Sigma) = Q_R(S^-, \Sigma)$ gilt. Schließlich ist jedes in S invertierbare Element $n \in S^-$ Inverses von $n^{-1} \in S^+$, q. e. d.

Entsprechend den am Ende von § 2 referierten Aussagen über Quotientenhalbringe gilt damit $q_R(S^-, \Sigma)$ und $q_L(S^-, \Sigma)$, und $\Sigma = (S^+)^{-1}$ ist konsistente Unterhalbgruppe von $C(S^-)$; weitere Aussagen über Σ enthält die nachfolgende Proposition, mit der wir eine Umkehrung von Satz 4.2 vorbereiten:

Proposition 4.3 Es sei S^- ein negativer F-Halbring mit Einselement. Dann sind für eine Unterhalbgruppe Σ von $C(S^-)$ folgende Aussagen gleichwertig:
a) *Σ ist konsistent in $C(S^-)$*
b) *Σ ist konsistent in S^-*
c) *Σ ist Ende von S^-.*
Jede solche Unterhalbgruppe Σ, insbesondere also $C(S^-)$ selbst, erfüllt $q_R(S^-, \Sigma)$ und $q_L(S^-, \Sigma)$.

Beweis. Aus a) folgt c): Sei $\gamma \leqq a$ mit $\gamma \in \Sigma$, $a \in S^-$; dann gilt $\gamma = ax = ya$, womit a ebenfalls rechts- und linkskürzbar ist, also $a \in C(S^-)$ folgt. Wegen $a \in S^-$, also $\gamma \leqq x$ ergibt dieser Schluß auch $x \in C(S^-)$. Als konsistente Unterhalbgruppe von $C(S^-)$ enthält Σ also a, d.h. Σ ist Ende von S^-.
Aus c) folgt b): Sei $\gamma = a \cdot b \in \Sigma$ mit $a, b \in S^-$; dann gilt $\gamma \leqq a, b$. Als Ende von S^- enthält Σ also a und b, was die Konsistenz von Σ in S^- zeigt.
Da b)$\Rightarrow$a) trivial ist und $C(S^-)$ natürlich a) erfüllt, bleiben nur die Ore-Asano-Bedingungen für die betrachteten Unterhalbgruppen Σ nachzuweisen; wir zeigen $q_R(S^-, \Sigma)$:
Für $a \in S^-$, $\alpha \in \Sigma$ gilt nach Satz 3.2 (3a)

$$a \cap \alpha = a\alpha' = \alpha a' \quad \text{mit} \quad \alpha = (a + \alpha)\alpha',$$

wobei $a' \in S^-$ und $\alpha \in \Sigma \Rightarrow \alpha' \in \Sigma$ nach b) gilt, q.e.d.

Satz 4.4 *Zu einem negativen F-Halbring S^- mit Einselement erhält man alle F-Oberhalbringe von S^- mit S^- als Negativbereich in Form der Quotientenhalbringe $Q(S^-, \Sigma)$ von S^- bezüglich der in Prop. 4.3 gekennzeichneten Unterhalbgruppen Σ, wobei zu verschiedenen Unterhalbgruppen nichtisomorphe Oberhalbringe korrespondieren. Wegen $\Sigma \subseteqq C(S^-)$ für alle Σ enthält der maximale F-Oberhalbring $Q(S^-, C(S^-))$ von S^- mit S^- als Negativbereich jeden anderen genau einmal.*

Beweis. Jeder solche Oberhalbring T von S^- enthält nach Satz 3.6 ein Einselement, erfüllt also $T = Q(S^-, \Sigma)$ nach Satz 4.2 mit einer in Prop. 4.3 gekennzeichneten Unterhalbgruppe Σ. Umgekehrt liefern diese Unterhalbgruppen nach Prop. 4.3 und der Feststellung am Ende von § 2 genau alle Quotientenhalbringe $T = Q(S^-, \Sigma)$ von S^-. Damit bleibt nur zu zeigen, daß jeder dieser Quotientenhalbringe F-Halbring ist und $T^- = S^-$ erfüllt. Es gilt jedoch allgemeiner:

Hilfssatz 4.5 *Jeder Quotientenhalbring $T = Q(S, \Sigma)$ eines F-Halbringes S ist F-Halbring und es gilt $T^- = S^-$.*

BEWEIS. Wir können je zwei Elemente von T mit „gleichem Nenner" schreiben und erhalten (vgl. (2a)) $a\gamma^{-1} \leqq b\gamma^{-1} \Rightarrow a \leqq b \Rightarrow a = yb$ mit $y \in S \Rightarrow a\gamma^{-1} = yb\gamma^{-1}$, also $a\gamma^{-1} \in Tb\gamma^{-1}$ und unter Verwendung der Linksquotientenschreibweise die duale Aussage, womit T ebenfalls F-Halbring ist. Damit gilt $T^- \supseteqq S^-$ nach Satz 3.6, und $T^- \subseteqq S^-$ folgt gemäß $a\gamma^{-1} \in T^- \Rightarrow a\gamma^{-1} \leqq 1 \Rightarrow a \leqq \gamma \Rightarrow a = y\gamma$ mit $y \in S^-$, also $a\gamma^{-1} = y \in S^-$, q. e. d.

Folgerung 4.6 Jeder kürzbare F-*Halbring S ist in den Quotientenhalbkörper* Q(S, S), *also in eine verbandsgeordnete Gruppe einbettbar. Entsprechendes gilt für kürzbare F-Halbringe mit Nullelement* $(C(S) = S \setminus \{0\})$ *bezüglich des Quotientenhalbkörpers* Q$(S, S \setminus \{0\})$ *als verbandsgeordneter Gruppe mit Nullelement.*

Folgerung 4.7 Ist $S = Q(S^-, \Sigma)$ *ein F-Halbring und* U^- *ein F-Unterhalbring von* S^- *mit* $U^- \supseteqq \Sigma$, *so existiert der F-Unterhalbring* $U = Q(U^-, \Sigma)$ *von S und hat* U^- *als Negativbereich.*

Der BEWEIS folgt aus der Feststellung, daß Σ in S^- und damit in U^- konsistent ist.

Literaturverzeichnis

[1] B. BOSBACH, Zur Theorie der Teilbarkeitshalbgruppen, *Semigroup Forum* **3** (1971), 1—30

[2] B. BOSBACH, Schwache Teilbarkeitshalbgruppen, *Semigroup Forum* **12** (1976), 119—135,

[3] M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT, Leçon sur la théorie de treillis des structures algébriques ordonnées et de treillis géométriques, *Paris*, 1953

[4] L. FUCHS, Teilweise geordnete algebraische Strukturen, *Göttingen* 1966

[5] M. POINSIGNON-GRILLET, Embedding of a semiring into a semiring with identity, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **20** (1969), 121—128.

[6] F. A. SMITH, A structure theory for a class of lattice ordered semirings, *Fund. Math.* **59** (1966), 49—64

[7] F. A. SMITH, A subdirect decomposition of additively idempotent semirings, *J. Nature, Sci. and Math.* **7** (1967), 253—257

[8] H. J. WEINERT, Über die Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **22** (1961), 91—105

[9] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **13** (1962), 365—378

[10] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963), 209—227

[11] H. J. WEINERT, Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965) 213—214

(Eingegangen am 22. Juli 1975.)