Über eine Darstellung linearer Operatoren im Hilbertraum

Von ISTVÁN FENYŐ (Budapest)

Problemstellung

Es sei H ein separabler Hilbertraum über den komplexen Zahlenkörper $\mathbf{C}$ und A ein von Null verschiedener vollstetiger (stetiger und kompakter) Operator von H in H. Dann, wie bekannt, gibt es höchstens abzählbar unendlich viele relle Zahlen p_j ($j=1, 2, 3, \dots$) und dazu zwei Elementenfolgen $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ aus H so daß

$$(1) \qquad p_j y_j = Ax_j \quad \text{und} \quad p_j x_j = A^* y_j; \quad \|x_j\| = \|y_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3 \dots)$$

gilt, wobei A^* der, bezüglich des Skalarproduktes $(.,.)$ des Hilbertraumes adjungierter Operator von A ist. Die Zahlen p_j sind die Schmidtschen Eigenwerte, x_j und y_j die zugehörigen Schmidtschen Eigenelemente von A. Auch das ist wohlbekannt, daß p_j^2 die Eigenwerte der nichtnegativen vollsetigen Operatoren A^*A und AA^* sind, $\{x_j\}$ bildet das vollstendige orthonormiertes System der Eigenelemente von A^*A, $\{y_j\}$ das von AA^*. Der Operator A läßt sich als

$$(2) \qquad Ax = \sum_{(j)} p_j(x, y_j)x_j$$

darstellen, wobei x ein beliebiges Element aus H ist, die Reihe (2) konvergiert nach der Norm von H zu Ax. Auch die Umkehrung dieser Behauptung gilt: Gilt für irgendeinen Operator A die Reihendarstellung (2), so ist A ein vollstetiger Operator. Wenn A unendlich viele Schmidtsche Eigenwerte und Eigenelemente hat, so gilt $p_j \to 0$ $(j \to \infty)$ (vgl. z. B. [1]; Satz 6.10. p. 82.).

Unser Ziel ist die obigen bekannten Tatsachen auf lineare und steteigen (aber nicht unbedingt vollstetigen) Operatoren, selbsverständlich in einer abgeänderten Form, zu übertragen. Zu diesem Zweck werden wir eine Verallgemeinerung der Schmidtschen Eigenwerte und Eigenelemente nach dem Muster eines von W. SCHMEIDLER ([2]) stammenden Verfahrens einführen.

Die verallgemeinerten Schmidtschen Eigenwerte und Eigenelemente

Falls A beschränkt ist, so besitzt A einen linearen und beschränkten adjungierten Operator A^* bezüglich des Skalarproduktes des Hilbertraums.

Es sei $x_1 \neq 0$ ein beliebiges element orthogonal zu $N(A^*)$, woraus $Ax_1 \neq 0$ folgt.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen folgende Bezeichnung einzuführen: Ist das Element x aus H zum Teilraum X von H orthogonal so schreiben wir $(x, X)=0$. Nach dieser Bezeichnung sei also $(x_1, N(A^*))=0$.

Wir setzen

$$A^* x_1 = \bar{k}_1 y_1, \quad \|y_1\| = 1 \tag{3}$$

und bemerken, daß $k_1 \neq 0$ ist, und zeigen, daß $(y_1, N(A)) = 0$ ist. Denn ist $y_0 \in N(A)$, so ist wegen (3)

$$0 = (Ay_0, x_1) = (y_0, A^* x_1) = k_1 (y_0, y_1)$$

und da $k_1 \neq 0$ ist, folgt $(y_0, y_1) = 0$.

Nachdem die Zahl k_1 und das Elementenpaar $\{x_1, y_1\}$ bestimmt sind, werden wir eine weitere Zahl m_1 und ein Element x_2 definieren:

$$Ay_1 - k_1 x_1 = m_1 x_2, \quad \|x_2\| = 1. \tag{4}$$

Jetzt aber können zwei Fälle auftreten:

a) $m_1 = 0$; b) $m_1 \neq 0$. Tritt der Fall a) auf, so werden wir wiederum zwei Unterfälle unterscheiden:

a_1) $N(A^*) \oplus L(x_1) = H$, wobei $L(x_1)$ die lineare Hülle von x_1 ist, in diesem Fall brechen wir das Verfahren ab;

a_2) $N(A^*) \oplus L(x_1) \neq H$, dann können wir ein Element x_2 so wählen, daß $\|x_2\| = 1$ und $(x_2, N(A^*) \oplus \{x_1\}) = 0$ gilt.

Im Fall b) ist x_2 durch (4) bestimmt und zeigen jetzt, daß auch in diesem Fall $(x_2, N(A^*) \oplus \{x_1\}) = 0$ gilt.

Aus (3) folgt nämlich

$$(A^* x_1, y_1) = \bar{k}_1 \tag{5}$$

und aus (4) ergibt sich

$$(x_1, Ay_1) - \bar{k}_1 = \bar{m}_1 (x_1, x_2). \tag{6}$$

Ein Vergleich von (5) und (6) gibt $(x_1, x_2) = 0$. Ist andererseits $x_0 \in N(A^*)$, dann gilt

$$(x_0, Ay_1) = (A^* x_0, y_1) = 0$$

und wir wissen, daß $(x_0, x_1) = 0$ ist und da $m_1 \neq 0$ gilt, ergibt sich durch Multiplizieren von (4) durch x_0: $(x_0, x_2) = 0$.

Als nächstes bestimmen wir zu x_2 ein Element y_2 durch folgende Vorschrift:

$$A^* x_2 - \bar{m}_1 y_1 = \bar{k}_2 y_2, \quad \|y_2\| = 1.$$

u.s.w.

Wir wollen unser Verfahren ganz allgemein formulieren:

Satz 1. *Es sei $A: H \to H$ ein beschränkter linearer Operator. Ausgehend aus einem beliebigen, Element $x_1 \in H$ mit $\|x_1\| = 1$, $(x_1, N(A^*)) = 0$ bilden wir die Elementenfolgen $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $\{y_1, y_2, \ldots\}$ sowie die Zahlenfolgen $\{k_1, k_2, \ldots\}$, $\{m_1, m_2, \ldots\}$ durch folgendes rekursives Verfahren:*

$$A^* x_j - \bar{m}_{j-1} y_{j-1} = \bar{k}_j y_j, \quad \|y_j\| = 1 \tag{A_j}$$

$(j = 1, 2, \ldots;\ m_0 = 0)$ *und ist* $m_{j-1} \neq 0$ *für irgendein* j, *so soll* x_j *durch*

$$Ay_{j-1} - k_{j-1} x_{j-1} = m_{j-1} x_j, \quad \|x_j\| = 1 \tag{B_j}$$

bestimmt sein. Ist jedoch $m_{j-1}=0$ *für ein* j, *so wählen wir* x_j *beliebig, jedoch derart, daß* $\|x_j\|=1$, $(x_j, N(A^*))=0$ *und* $(x_j, \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\})=0$ *gelte. Dann besitzen die derart eingeführten Elementenfolgen und Zahlenfolgen folgende Eigenschaften:*

1°. $$k_j \neq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

2°. $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ *und* $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ *sind orthonormierte Elementensysteme.*

3°. $$(x_j, N(A^*)) = 0; \quad (y_j, N(A)) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Es sei bemerkt, falls für irgendein j die Beziehung $N(A^*) \oplus L(x_1, x_2, \dots, x_j) = H$ gilt, dann brechen wir das Verfahren ab.

Den Beweis der Behauptungen führen wir durch vollständige Induktion. Offensichtlich gilt der Satz für $j=1$. Wir nehmen somit an, daß $\{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}$, $\{y_1, y_2, \dots, y_{j-1}\}$, $\{k_1, k_2, \dots, k_{j-1}\}$ und $\{m_1, m_2, \dots, m_{j-2}\}$ den Gleichungen (A_r) und (B_r) für $r=1, 2, \dots, j-2$ genügen und die Eigenschaften 1°, 2°, 3° besitzen. Wir müßen ferner annehmen, daß $N(A^*) \oplus L(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}) \neq H$ ist (sonst brechen wir das Verfahren ab und es bleibt nichts zu beweisen).

Wir setzen x_{j-1}, y_{j-1} und k_{j-1} in die linke Seite von (B_j) ein, dabei können zwei Fälle auftreten:

Fall a): Die rechte Seite von (B_j) ist das Nullelement. Wir setzen jetzt $m_{j-1}=0$ und wählen das Element x_j derart, daß $\|x_j\|=1$, $(x_j, N(A^*))=0$, $(x_j, x_r)=0$ $(r=1, 2, \dots, j-1)$ gelte.

Fall b): Die rechte Seite von (B_j) ist vom Nullelement verschieden, dann liefert, diese Gleichung unter der Bedingung $\|x_j\|=1$ das Element x_j und die Zahl m_{j-1}. Wir zeigen jetzt, daß $(x_j, N(A^*))=0$ gilt. Dazu sei das Skalarprodukt von (B_j) mit einem beliebigen Element $x_0 \in N(A^*)$ gebildet:

$$(x_0, Ay_{j-1}) - k_{j-1}(x_0, x_{j-1}) = m_{j-1}(x_0, x_j).$$

Da aber $(x_0, Ay_{j-1}) = (A^* x_0, y_{j-1}) = 0$ ist, das zweite Glied an der linken Seite dieser Gleichung verschwindet, laut Induktionsannahme demzufolge verschwindet auch die rechte Seite. Da nach Voraussetzung $m_{j-1} \neq 0$ ist, ist $(x_0, x_j)=0$, womit die Behauptung $(x_j, N(A^*))=0$ bewiesen ist.

Wir werden jetzt die Beziehung $(x_j, x_r)=0$ $(r=1, 2, \dots j-1)$ beweisen. Aus diesem Grund multiplizieren wir (B_j) mit x_r:

$$(7) \qquad (x_r, Ay_{j-1}) - \bar{k}_{j-1}(x_r, x_{j-1}) = \bar{m}_{j-1}(x_r, x_j).$$

Das zweite Glied an der linken Seite verschwindet, laut der Induktionsvoraussetzung, wenn $r \leqq j-2$ ist und wir haben

$$(8) \qquad (x_r, Ay_{j-1}) = m_{j-1}(x_r, x_j). \quad (r = 1, 2, \dots, j-2)$$

Wir multiplizieren jetzt (A_r) mit y_{j-1}:

$$(9) \qquad (A^* x_r, y_{j-1}) - \bar{m}_{r-1}(y_{r-1}, y_{j-1}) = \bar{k}_r(y_r, y_{j-1}), \quad (r = 1, 2, \dots, j-2).$$

Auf Grund der Induktionsannahme verschwindet das zweite Glied an der linken, und das Skalarprodukt an der rechten Seite, wir haben also

$$0 = (A^* x_r, y_{j-1}) = (x_r, Ay_{j-1}) \quad (r = 1, 2, \dots, j-2).$$

Wenn wir dieses Ergebnis mit (8) vergleichen, erhalten wir unter Berücksichtigung von $m_{j-1}\neq 0:(x_r, x_j)=0$ $(r=1, 2, \dots, j-2)$. Ist jedoch $r=j-1$, dann wird aus (7)

$$(x_{j-1}, Ay_{j-1})-\bar{k}_{j-1} = \bar{m}_{j-1}(x_{j-1}, x_j) \tag{10}$$

und aus (9)

$$(A^* x_{j-1}, y_{j-1}) = \bar{k}_{j-1}. \tag{11}$$

Ein Vergleich von (10) und (11) ergibt, unter Berücksichtigung von $m_{j-1}\neq 0$, $(x_{j-1}, x_j)=0$.

Wir werden jetzt die Behauptung 1° beweisen. Für $j=1$ ist das schon bewiesen, deswegen nehmen wir an, daß diese schon für $1, 2, \dots, j-1$ gilt und zeigen, daß daraus die Gültigkeit auch für j folgt. Diesen Beweis führen wir indirekt. Im Gegensatz zur Behauptung setzen wir voraus, daß $k_j=0$ wäre. Dann aber folgt aus (A_j)

$$A^* x_j = \bar{m}_{j-1} y_{j-1}. \tag{12}$$

Da aber nach Voraussetzung $k_{j-1}\neq 0$ ist, können wir aus (A_{j-1}) y_{j-1} ausdrücken und in die Gleichung (12) einsetzen:

$$A^*(\bar{k}_{j-1}x_j-\bar{m}_{j-1}x_{j-1}) = -\bar{m}_{j-1}\bar{m}_{j-2}y_{j-2}.$$

Wir wiederholen dieses Verfahren indem wir aus (A_{j-2}) den Ausdruck von y_{j-2} in die eben erhaltene Gleichung einsetzen. So ergibt sich

$$A^*(\bar{k}_{j-2}\bar{k}_{j-1}x_j-\bar{k}_{j-2}\bar{m}_{j-1}x_{j-1}+\bar{m}_{j-1}\bar{m}_{j-2}x_{j-2}) = \bar{m}_{j-1}\bar{m}_{j-2}\bar{m}_{j-3}y_{j-3}.$$

Jetzt wird der aus (A_{j-3}) erhaltene Ausdruck in diese Beziehung eingesetzt, u.s.w. Beim vorletztem Schritt ergibt sich ein Ausdruck von der Gestalt:

$$A^*(\bar{k}_2\bar{k}_3\dots\bar{k}_{j-2}\bar{k}_{j-1}x_j+c_1'x_{j-1}+\dots+c_{j-2}'x_2) = by_1,$$

wobei $c_1', c_2', \dots, c_{j-2}', b$ gewisse Konstanten sind. Zum Schluß soll aus (3) y_1 ausgedrückt und in diese Gleichung eingesetzt werden, so ergibt sich

$$A^*(\bar{k}_1\bar{k}_2\dots\bar{k}_{j-1}x_j+c_1x_{j-1}+c_2x_{j-2}+\dots+c_{j-1}x_1) = 0.$$

$c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$ sind nur von $k_1, k_2, \dots, k_{j-1}$; $m_1, m_2, \dots, m_{j-1}$ abhängige Zahlen. Die eben gewonnene Gleichung besagt, daß

$$\bar{k}_1\bar{k}_2\dots\bar{k}_{j-1}x_j+c_1x_{j-1}+\dots+c_{j-1}x_1\in N(A^*) \tag{13}$$

gilt, wobei mindestens der Koeffizient von x_j von Null verschieden ist. Die Gleichung

$$\bar{k}_1\bar{k}_2\dots\bar{k}_{j-1}x_j+c_1x_{j-1}+\dots+c_{j-1}x_1 = 0$$

kann nicht gelten, sonst würde sich durch multiplizieren mit x_j $k_1k_2\dots k_{j-1}=0$ ergeben was der Induktionsannahme wiederspricht. Bei diesem Sachverhalt steht aber (13) mit der Beziehung $\big(x_r, N(A^*)\big)=0$ $(r=1, 2, \dots, j)$ im Wiederspruch. Dieser Wiederspruch entstand aus der Voraussetzung, daß $k_j=0$ ist. Damit ist die Aussage 1° vom Satz 1 bewiesen.

Ist $k_j\neq 0$, so bestimmt die Gleichung (A_j) die Zahl k_j und das Element y_j.

Wir beweisen jetzt, daß $\big(y_j, (N(A)\big)=0$ ist. Es sei (A_j) mit einem beliebigen Element $y_0\in N(A)$ multipliziert:

$$(A^* x_j, y_0)-\bar{m}_{j-1}(y_{j-1}, y_0) = \bar{k}_j(y_j, y_0).$$

Nach der Induktionsannahme aber ist $(y_{j-1}, y_0)=0$ und $(A^* x_j, y_0)=(x_j, Ay_0)=0$, also wegen $k_j \neq 0$ gilt $(y_j, y_0)=0$.

Zum Schluß beweisen wir: $(y_j, y_r)=0$ für $r=1, 2, \dots, j-1$. Wir multiplizieren (A_j) mit y_r $(r=1, 2, \dots, j-1)$:

$$(y_r, A^* x_j)-m_{j-1}(y_r, y_{j-1}) = k_j(y_r, y_j) \tag{14}$$

und (B_{r+1}) mit x_j:

$$(Ay_r, x_j)-k_r(x_r, x_j) = m_r(x_{r+1}, x_j). \tag{15}$$

Ist $r \leqq j-2$, so folgt aus (14) und (15) unmittelbar $(y_r, y_j)=0$ wenn wir die Induktionsannahme $k_j \neq 0$ berücksichtigen. Ist $r=j-1$, so wird aus (14) und (15) folgendes:

$$(y_{j-1}, A^* x_j)-m_{j-1} = k_j(y_{j-1}, y_j), \quad (Ay_{j-1}, x_j) = m_{j-1}.$$

Aus diesen ergibt sich $(y_{j-1}, y_j)=0$.

Damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens ordenen wir jedem beschränkten Operator A zwei orthonormierte Elementen- und zwei Zahlenfolgen zu. Entweder erreichen wir nach endlich vielen Schritten, daß

$$N(A^*)\oplus L\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = H$$

gilt, oder wir setzen das Verfahren fort. Im letztern Fall gilt die obige Beziehung nach abzählbar undendlichen Schritten.

Wir nehmen an, daß $\{x_1, x_2, \dots\}$ ein vollständiges Elementensystem in $N(A^*)^\perp$ ist, *es wird behauptet, daß dann auch* $\{y_1, y_2, \dots\}$ *vollständig in* $N(A)^\perp$ *ist.* Dazu haben wir zu zeigen, wenn $y \in H$ ist und es gilt $(y, y_j)=0$ $(j=1, 2, 3, \dots)$, dann folgt daraus $y \in N(A)$.

Wir bilden das Skalarprodukt beider Seiten von (A_j) mit y:

$$(A^* x_j, y)-\overline{m}_{j-1}(y_{j-1}, y) = \bar{k}_j(y_j, y), \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

woraus wegen den Voraussetzungen über y

$$(A^* x_j, y) = (x_j, Ay) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

folgt. Da aber $\{x_j\}$ vollständig in $N(A^*)^\perp$ ist, folgt $Ay \in N(A^*)$. Andererseits aber ist Ay zu $N(A^*)$ orthogonal, da für ein beliebiges x_0 aus $N(A^*)$ $(x_0, Ay)= =(A^* x_0, y)=0$ ist, woraus $Ay=0$, d. h. $y \in N(A)$ folgt.

Da der Raum H separabel ist, können wir nach höchstens abzählar unendlich vielen Schritten eine Basis $\{x_j\}$ für das Orthogonalkomplement von $N(A^*)$ erhalten. Damit wird das entsprechende System $\{y_j\}$ auch vollständig in $N(A)^\perp$.

Wir werden die Elementenfolgen $\{x_j\}$ *und* $\{y_j\}$ *als verallgemeinerte Schmidtsche Eigenelemente, die Zahlenfolgen* $\{k_j\}$ *und* $\{m_j\}$ *als verallgemeinerte Schmidtsche Eigenwerte bezeichnen.* Ist nämlich für irgend ein $j: m_{j-1}=m_j=0$, dann liefern die Gleichungen (A_j) und (B_{j+1})

$$A^* x_j = \bar{k}_j y_j, \quad Ay_j = k_j x_j.$$

Ist zusätzlich k_j reel, so stimmen die obige Gleichungen mit dem Gleichungssystem (1) überein. Ist A vollstetig und das Ausgangselement x_1 ein Schmidtsches Eigenelement, so liefern die Gleichungen (A_j) und (B_j) die Folge der Schmidtschen Eigenelemente, alle m_j verschwinden und $k_j=p_j$ $(j=1, 2, \ldots)$.

Einem Operator zugeordnete Matrix

Ausgehend aus einem Element x_1 wie im Satz 1 bilden wir die Folgen verallgemeinerten Schmidtschen Eigenelemente und Eigenwerte. Wir werden drei Fälle unterscheiden:

a) Die Zahlenfolge $\{m_j\}$ enthält die Zahl 0 nicht und die gewonnene orthonormierte Elementenfolge $\{x_j\}$ ist vollständig in $N(A^*)^\perp$.

b) Die Zahlenfolge $\{m_j\}$ enthält die Zahl 0 nicht, jedoch ist die Elementenfolge $\{x_j\}$ in $N(A^*)^\perp$ *nicht* vollständig. In diesem Fall, nachdem wir die Elementenfolge $\{x_j\}$ berechnet haben, beginnen wir das Verfahren mit einem Element x_1' welches auf Eins normiert, zu $N(A^*)$ und zu $\{x_j\}$ orthogonal ist, von neuem an. Das wiederholen wir bis wir zu einem vollständigen orthonormiertes Elementensystem gelangen.

c) Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $m_j=0$. In diesem Fall werden wir die verallgemeinerte Schmidtsche Eigenelemente und Eigenwerte nach folgenden Gesichtspunkt Gruppieren:

Wir beginnen unser Verfahren mit einem Element, jetzt mit $x_1^{(1)}$ bezeichnet, so wie das im Satz 1 beschrieben ist und bilden der Reihe nach die x und y Elemente sowie die k und m Zahlen nach dem Verfahren (A_j) und (B_j) bis wir zum erstenmal auf die Zahl $m=0$ stoßen. Die Anzahl dieser Schritte sei j_1, wir haben also die endlichen Folgen:

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{j_1-1}^{(1)}, x_{j_1}^{(1)}\}; \quad \{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{j_1-1}^{(1)}\},$$

$$\{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \ldots, m_{j_1-1}^{(1)}, 0\}; \quad \{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \ldots, k_{j_1-1}^{(1)}\}.$$

Ist die Bedingung für das Abbrechen des Verfahren noch nicht erfüllt, so nehmen wir ein weiteres, auf Eins normiertes Element $x_1^{(2)}$ welches zu $N(A^*)$ und zu $\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{j_1}^{(1)}\}$ orthogonal ist und setzen das Verfahren fort, bis wir wieder, nach j_2 Schritten (vorausgesetzt daß wieder der Fall c) vorhanden ist) für m die Zahl 0 erhalten. So ergeben sich die endlichen Folgenabschnitte:

$$\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{j_2-1}^{(2)}, x_{j_2}^{(2)}\}; \quad \{y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_{j_2-1}^{(2)}\},$$

$$\{m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, \ldots, m_{j_2-1}^{(2)}, 0\}; \quad \{k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \ldots, k_{j_2-1}^{(2)}\},$$

usw.

Eine ähnliche Einteilung in Folgenteile werden wir auch im Fall b) duchführen, blos dann enthalten die verschiedenen Folgenabschnitte unendlich viele Glieder und der Begriff des letzten Gliedes in einem Folgenabschnittes verliert seinen Sinn. Wir werden die verschiedenen Abschnitte Zusammensetzen und auch gelegentlich umnumerieren wie folgt:

$$\bigcup_{(n)} \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Die gleiche Umnumerierung werden wir in gleicher Weise auch mit der y-Folge vollziehen. Wir wollen jetzt folgende Zahlen bilden:

$$a_{p,q} = (x_p, Ay_q) \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

und stellen auf Grund von (A_j) und (B_j) fest, daß

$$a_{j,j-1} = (x_j, Ay_{j-1}) = \overline{m}_{j-1} \quad (j = 2, 3, 4, \ldots)$$

und

$$a_{j,j} = (x_j, Ay_j) = \overline{k}_j \quad (\neq 0), \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$a_{p,q} = 0 \quad \text{für} \quad p-q \neq 0 \quad \text{und} \quad p-q \neq 1$$

gelten.

Zu den Elementenfolgen $\{x_1, x_2, \ldots\}$; $\{y_1, y_2, \ldots\}$ nehmen wir eine orthonormierte Basis von $N(A^*)$ bzw. $N(A)$ $\{\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots\}$ bzw. $\{\mathring{y}_1, \mathring{y}_2, \ldots\}$ hinzu und stellen fest, daß die dazugehörige Zahlen

$$a_{p,q} = (\mathring{x}_p, A\mathring{y}_q) = 0 \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind. Die obigen Zahlen $a_{p,q}$ werden wir zu einer Matrix

$$\mathfrak{A} = [a_{p,q}]$$

zusammenfassen welche folgende Gestalt hat auf Grund der obigen Feststellungen:

$$\mathfrak{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ \hline & \begin{matrix} \overline{k}_1^{(1)} & & \\ \overline{m}_1^{(1)} & \overline{k}_2^{(1)} & \\ & \ddots & \ddots \\ & \overline{m}_{j_1-1}^{(1)} & \overline{k}_{j_1}^{(1)} \end{matrix} & & \\ \hline & & \begin{matrix} \overline{k}_1^{(2)} & & \\ \ddots & \ddots & \\ & \overline{m}_{j_2-1}^{(2)} & \overline{k}_{j_2}^{(2)} \end{matrix} & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right]. \tag{17}$$

Der Block an der linken Seite oben, bestehend aus 0-n entspricht den Nullräumen $N(A^*)$ und $N(A)$. $\mathfrak{A}$ kann außerdem endliche und unendliche Bestandteile enthalten (es kann auch passieren, daß $\mathfrak{A}$ nur aus einem einzigen unendlichen Bestandteil besteht). Unter einem Bestandteil verstehen wir einen Block in welchem sowie in der Hauptdiagonale als auch parallel zu dieser unter ihr von Null verschiedene Zahlen stehen, die übrigen Elemente des Blocks sind gleich Null. Selbstverständlich können in $\mathfrak{A}$ auch eingliedrige Bestandteil vorkommen.

Wir werden jetzt einen endlichen, jedoch nicht eingliedrigen Bestandteil ins Auge fassen (vorausgesetzt, daß ein solcher vorhanden ist):

$$\mathfrak{a}_n = \begin{bmatrix} \bar{k}_1^{(n)} & & & & \\ \bar{m}_1^{(n)} & \bar{k}_2^{(n)} & & & \\ & \bar{m}_2^{(n)} & \bar{k}_3^{(n)} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \bar{m}_{j_n-1}^{(n)} & \bar{k}_{j_n}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathfrak{a}_n^* \mathfrak{a}_n$ ist eine Hermitesche Matrix, wobei $\mathfrak{a}_n^*$ die zu $\mathfrak{a}_n$ transponierte Matrix bedeutet. $\mathfrak{a}_n^* \mathfrak{a}_n$ kann nach einem wohlbekannen Satz aus der linearen Algebra durch eine unitäre Transformation auf Diagonalform transformiert werden. Wenn wir diese unitäre Matrix mit $\mathfrak{u}_n$ bezeichnen, dann gilt

$$\mathfrak{u}_n^* \mathfrak{a}_n^* \mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n = \begin{bmatrix} p_1^{(n)} & & & \\ & p_2^{(n)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{j_n}^{(n)} \end{bmatrix}$$

wobei $p_r^{(n)}$ die Eigenwerte von $\mathfrak{a}_n^* \mathfrak{a}_n$ (die von Null verschieden sind) bedeuten. Wir führen die Bezeichnung

$$\mathfrak{d}_n = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1^{(n)}} & & & \\ & \sqrt{p_2^{(n)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{p_{j_n}^{(n)}} \end{bmatrix}$$

ein, dann ist

$$\mathfrak{d}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{p_1^{(n)}} & & & \\ & 1/\sqrt{p_2^{(n)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sqrt{p_{j_n}^{(n)}} \end{bmatrix}.$$

Aus (18) ergibt sich

$$\mathfrak{d}_n^{-1} \mathfrak{u}_n^* \mathfrak{a}_n^* \mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n \mathfrak{d}_n = \mathfrak{e}_n,$$

wobei $\mathfrak{e}_n$ die Einheitsmatrix von der Ordnung j_n ist.

Es sei

$$\mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n \mathfrak{d}_n^{-1} = \mathfrak{v}_n.$$

dann sehen wir, daß

$$\mathfrak{v}_n^* \mathfrak{v}_n = \mathfrak{e}_n$$

gilt. Da es sich hier um endliche Matrizen handelt gilt ferner

$$\mathfrak{v}_n \mathfrak{v}_n^* = \mathfrak{e}_n.$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{v}_n^* = \mathfrak{v}_n^{-1}$ ist, $\mathfrak{v}_n$ ist somit eine unitäre Matrix. Aus der Definition von $\mathfrak{v}_n$ folgt

$$\mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n = \mathfrak{v}_n \mathfrak{d}_n,$$

woraus sich

$$\bar{\mathfrak{v}}_n^* \mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n = \mathfrak{d}_n \tag{19}$$

ergibt.

Es wurde also die Existenz von zwei unitären Matrizen $\mathfrak{u}_n$ und $\mathfrak{v}_n$ bewiesen, für welche (19) gilt. Wichting ist zu bemerken, daß die rechte Seite in (19) eine Diagonalmatrix ist.

Wir setzen jetzt

$$\xi_i^{(n)} = \sum_{r=1}^{j_n} \bar{v}_{r,i}^{(n)} x_r^{(n)}; \quad \eta_h^{(n)} = \sum_{s=1}^{j_n} \bar{u}_{s,h}^{(n)} y_s^{(n)},$$

wobei $v_{r,j}^{(n)}$ Elemente von $\mathfrak{v}_n$ und $u_{s,h}^{(n)}$ die Elemente von $\mathfrak{u}_n$ sind. Mit Hilfe von $\xi_i^{(n)}$ und $\eta_h^{(n)}$ werden wir die Zahlen $b_{i,h}^{(n)}$ $(i, h=1, 2, \ldots, j_n)$ wie folgt bilden:

$$b_{i,h}^{(n)} = (\xi_i^{(n)}, A\eta_h) = \Big(\sum_{r=1}^{j_n} \bar{v}_{r,i}^{(n)} y_r^{(n)} \sum_{s=1}^{j_n} \bar{u}_{s,h}^{(n)} A y_s^{(n)}\Big) = \sum_r \sum_s v_{r,i}^{(n)} a_{r,s}^{(n)} u_{s,h}^{(n)} =$$

$$= (\bar{\mathfrak{v}}_n^* \mathfrak{a}_n \mathfrak{u}_n)_{i,h} = (\mathfrak{d}_n)_{i,h} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq h \\ \sqrt{p_i^{(n)}} & \text{für} \quad i = h. \end{cases}$$

Dabei gilt

$$(\xi_i^{(n)}, N(A^*)) = 0, \quad (\xi_i^{(n)}, x_r^{(q)}) = 0 \quad \text{für} \quad q < n$$

$$(i = 1, 2, \ldots, j_n, \ r = 1, 2, \ldots, j_q)$$

und

$$(\eta_h^{(n)}, N(A)) = 0; \quad (\eta_h^{(n)}, y_r^{(q)}) = 0 \quad \text{für} \quad q < n$$

$(h=1, 2, \ldots, j_n;\ s=1, 2, \ldots, j_q)$. Die Systeme $\{\xi_i^{(n)}\}$, $\{\eta_h^{(n)}\}$ sind orthonormiert weil $\mathfrak{u}_n$ und $\mathfrak{v}_n$ unitäre Matrizen sind.

Wenn also $\mathfrak{A}$ endliche, nicht eingliedrige Bestandteile hat, dann kann man bezüglich jeden solchen Bestandteil durch geeignete unitäre Transformationen zu Elementensysteme von H übergehen, für welche die nicht eingliedrige, endliche Bestandteile in Eingliedrige übergehen. Wir haben also folgendes bewiesen:

Satz 2. *Es sei A ein linearer beschränkter Operator der den separablen Hilbertraum in sich abbildet. Dann gibt es zwei orthonormierte in $N(A^*)^\perp$ und $N(A)^\perp$ vollstendige Elementensysteme $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$, so daß die Bestandteile der Matrix $[(x_n, Ay_m)]$ entweder ein- oder unendlichgledrig sind.*

Bei einem vollsteigem Operator sind die Schmidtschen Eigenwerte immer reell. Bei den verallgemeinerten Schmidtschen Eigenwerten muß das nicht der Fall sein. Es gilt jedoch der

Satz 3. *Man kann die verallgemeinerten Schmidtschen Eigenelemente immer so wählen daß die Elemente der Zahlenfolge $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ reell seien.*

Falls für irgendeine natürliche Zahl j die verallgemeinerten Schmidtschen Eigenwerte m_{j-1} und m_j verschwinden, dann ergibt sich aus (A_j) und (B_j) automatisch, daß k_j reel (wegen der Positivität von AA^* und A^*A) ist.

Man sieht leicht ein, daß das Ausgangselement x_1 immer so bestimmt werden kann, daß k_1 reell sei. Trifft das nämlich nicht zu, dann beginnen wir unser Verfahren anstatt mit x_1 mit dem Element

$$\frac{k_1}{|k_1|} x_1$$

(auch dieses genügt den Bedingungen welche wir für das Ausgangselement gestellt haben) und sehen unmittelbar, daß der Koeffizient von y_1 reell (sogar positiv) ist.

Aus (A_j) und (B_j) folgt

$$(A_j') \qquad AA^* x_j = \overline{m}_{j-1} k_{j-1} + (|m_{j-1}|^2 + |k_j|^2) x_j + \overline{k}_j m_j x_{j+1}, \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(B_j') \qquad A^*A y_{j-1} = k_{j-1} \overline{m}_{j-2} y_{j-2} + (|k_{j-1}|^2 + |m_{j-1}|^2) y_{j-1} + m_{j-1} \overline{k}_j y_j$$

$$(j = 2, 3, 4, \ldots; \; m_0 = k_0 = 0).$$

Aus (A_j') ergibt sich

$$(x_{j-1}, AA^* x_j) = \overline{m}_{j-1} k_{j-1},$$
$$(x_j, AA^* x_j) = |m_{j-1}|^2 + |k_j|^2,$$
$$(x_{j+1}, AAx_j) = m_j \overline{k}_j.$$

Wenn wir jede dieser Gleichungen mit ihren rechten Seiten multiplizieren und nachher addieren, erhalten wir die folgende Beziehung:

$$(20) \qquad (AA^* x_j, AA^* x_j) = \overline{m}_{j-1}^2 k_{j-1}^2 + (|m_{j-1}|^2 + |k_j|^2)^2 + m_j^2 \overline{k}_j^2 > 0$$

$(j=1, 2, 3, \ldots)$. Es sei jetzt $j=1$, dann ist $m_1^2 \overline{k}_1^2$ reell, da aber k_1 reell ist, muß auch m_1^2 reell sein.

Analog erhalten wir aus (B_j')

$$(y_{j-2}, A^*A y_{j-1}) = k_{j-1} \overline{m}_{j-2},$$
$$(y_{j-1}, A^*A y_{j-1}) = |k_{k-1}|^2 + |m_{j-1}|^2,$$
$$(y_j, A^*A y_{j-1}) = m_{j-1} \overline{k}_j.$$

Wenn wir diese Gleichungen der Reihe nach mit ihren rechten Seiten multiplizieren und dann addieren, ergibt sich

$$(21) \qquad (A^*A y_{j-1}, A^*A y_{j-1}) = k_{j-1}^2 \overline{m}_{j-2}^2 + (|m_{j-1}|^2 + |k_{j-1}|^2)^2 + m_{j-1}^2 \overline{k}_j^2 > 0$$

$(j=2, 2, 4, \ldots)$. Falls $j=2$ ist, dann erweist sich $m_1^2 \overline{k}_1^2$ als reell und da m_1 eine relle Zahl ist, ist auch k_2^2 reell. (Wie schon darauf hingewiesen wurde kann man voraussetzen ohne die Allgemeinheit einzuschränken, daß $m_1 \neq 0$ ist.) Die Gleichung (A_2) bestimmt k_2 und y_2 nicht eindeutig. Da k_2^2 reell ist und wäre k_2 immaginär, so betrachten wir anstatt y_2 das Element iy_2 (welches ebenfalls mit y_2 den gestellten Bedingungen genügt) wodurch als Koeffizient $-ik_2$ sicht ergibt, und das ist reell. Wir können sogar erreichen durch geeignete Wahl des Vorzeichens, daß der Koeffizient von y_2 positiv sei.

Wir fahren durch vollstendige Induktion fort. Angenommen, daß $k_1, k_2, \ldots, k_{j-1}$ sowie $m_1^2, m_2^2, \ldots, m_{j-1}^2$ rell sind, ergibt sich aus (21) daß auch $m_{j-1}^2 \overline{k}_j^2$ rell ist. Vorausgesetzt, daß $m_{j-1} \neq 0$ ist, folgt, daß auch k_j^2 reell ist. Dann aber können wir auf Grund (A_j) y_j nach voriger Begründung so wählen, daß auch k_j^2 rell, sogar positiv sei. Ist das aber erreicht, so folgt aus (20) daß auch m_j^2 reell ist.

Eine Charakterisierung beschränkter Operatoren

Wir bestimmen die Systeme verallgemeinerter Schmidtschen Eigenelemente $\{x_1, x_2, \ldots\}$; $\{y_1, y_2, \ldots\}$ sowie die Folgen von verallgemeinerten Schmidtschen Eigenwerte $\{k_1, k_2, \ldots\}$; $\{m_1, m_2, \ldots\}$ des beschränkten Operators A. Die Systeme von verallgemeinerten Schmidtschen Eigenelemente sollen durch vollständige orthonormierte Basen $\{\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \mathring{x}_3, \ldots\}$ und $\{\mathring{y}_1, \mathring{y}_2, \mathring{y}_3, \ldots\}$ der Teilräume $N(A^*)$ und $N(A)$ zu vollständigen orthonormierte Elementensysteme ergänzt werden. Ist y ein Beliebiges Element von H, so werden wir $Ay \in H$ in eine nach $\{\mathring{x}_j\} \cup \{x_j\}$ schreitende Fourier-Reihe entwickeln:

$$Ay = \sum_{(j)} \mathring{c}_j \mathring{x}_j + \sum_{(j)} c_j x_j, \tag{22}$$

wobei

$$\mathring{c}_j = (Ay, \mathring{x}_j) = (y, A^* \mathring{x}_j) = 0 \tag{23}$$

und

$$c_j = (Ay, x_j) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{24}$$

ist. Die Reihe (22) konvergiert nach der Norm von H zu Ay.

Durch Berücksichtigung von (A_j) werden wir den Ausdruck für c_j umformen:

$$c_j = (Ay, x_j) = (y, A^* x_j) = (y, \overline{m}_{j-1} y_{j-1}) + (y, \overline{k}_j y_j) = m_{j-1}(y, y_{j-1}) + k_j(y, y_j)$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Diese Werte setzen wir in (22) ein, derart ergibt sich unter Berücksichtigung von (23):

$$Ay = \sum_{(j)} [k_j(y, y_j) + m_{j-1}(y, y_{j-1})] x_j. \tag{25}$$

Hier sind auch die Reihen

$$\sum_{(j)} k_j(y, y_j) x_j, \quad \sum_{(j)} m_{j-1}(y, y_{j-1}) x_j \tag{26}$$

konvergent. Denn aus (B_j) und Beschränktheit von A folgt

$$\|Ay_{j-1}\|^2 = \|k_{j-1} x_{j-1} + m_{j-1} x_j\|^2 = |k_{j-1}|^2 + |m_{j-1}|^2 \leqq \|A\|^2,$$

woraus

$$|k_{j-1}| \leqq \|A\|; \quad |m_{j-1}| \leqq \|A\| \quad (j = 2, 3, 4, \ldots) \tag{27}$$

folgt. Deswegen ist

$$\sum_{(j)} |k_j|^2 |(y, y_j)|^2 \leqq \|A\|^2 \sum_{(j)} |(y, y_j)|^2$$

$$\sum_{(j)} |m_{j-1}|^2 |(y, y_{j-1})|^2 \leqq \|A\|^2 \sum_{(j)} |(y, y_{j-1})|^2,$$

woraus

$$\sum_{(j)} k_j(y, y_j) x_j \in H; \quad \sum_{(j)} m_{j-1}(y, y_{j-1}) x_j \in H$$

folgt.

Nun definieren wir zwei Operatoren A_1 und A_2:

$$A_1 y := \sum_{(j)} k_j(y, y_j)x_j; \quad A_2 y := \sum_{(j)} m_{j-1}(y, y_{j-1})x_j \tag{28}$$

für jedes $y \in H$. Beide sind beschränkt:

$$\|A_1 y\|^2 = \sum_{(j)} |k_j|^2 |(y, y_j)|^2 \leqq \|A\|^2 \sum_{(j)} |(y, y_j)|^2 \leqq \|A\|^2 \|y\|^2,$$

deswegen gilt

$$\|A_1\| \leqq \|A\|.$$

Genauso

$$\|A_2\| \leqq \|A\|.$$

Jeder beschränkter Operator in H kann somit zerlegt werden:

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei A_1 und A_2 unter (26) definiert sind.

Wir wählen die Elementenfolgen $\{x_j\}$ und $\{y_j\}$ derart, daß alle k_j positiv seien. Die möglichkeit einer solchen Wahl haben wir schon bewiesen.

Als eine Verallgeneinerung der in der Einleitung zitierten Aussage haben wir folgenden Satz erhalten:

Satz 4. *Ein linearer Operator definiert im separablen Hilbertraum ist genau dann beschränkt, wenn es zwei in $N(A^*)^\perp$ bzw. $N(A)^\perp$ vollständige orthonormierte Elementenfolgen $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; $\{y_1, y_2, \ldots\}$ und zwei beschränkte Zahlenfolgen $\{k_1, k_2, \ldots\}$; $\{m_1, m_2, \ldots\}$ mit $k_j > 0$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ existieren so, daß für ein beliebiges $y \in H$ die Reihenentwicklung* (25) *gilt. Diese Reihe ist in H konvergent.*

Wir sezten jetzt zusätzlich voraus, daß A kompakt ist. Da die Elementenfolge $\{y_j\}$ beschänkt ist, ist die Menge $\{Ay_j\}$ kompakt, enthält demzufolge eine konvergente Teilfolge. Mit andern Worten: Die Indexmenge $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$ enthält eine Teilmenge $J \subset I$ so beschaffen, daß

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} Ay_j = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} (k_{j-1}x_{j-1} + m_{j-1}x_j) = x \tag{29}$$

existiert. Wegen der Setigkeit des Skalarproduktes gilt

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} k_{j-1} = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} (x, x_{j-1})$$

und

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in I}} m_{j-1} = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in I}} (x, x_j),$$

woraus

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} k_{j-1} = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} (x, x_{j-1}) = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} (x, x_j) = \lim_{\substack{j\to\infty \\ j\in J}} m_{j-1}$$

folgt. Da x ein Element von H ist, dashalb gilt

$$\lim_{j\to\infty} (x, x_j) = 0. \quad (j \in J)$$

Aus diesem Grund ist

$$\liminf_{j\to\infty} k_j = \liminf_{j\to\infty} |m_j| = 0.$$

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß k_j und m_j den Grenzwert 0 besitzen.

Ist nämlich $I=J$ so ist nichts zu beweisen. Ist also $I-J=J'$ eine unendliche Indexmenge, dann hat J' eine Teilmenge J'' für welche

$$\lim_{j\to\infty} k_j = a \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} m_j = b \quad (j\in J'')$$

existieren und wenigstens eine dieser Grenzwerte ist von Null verschieden. Wegen der Beschränktheit von $\{y_j\}$ $(j\in J'')$ ist die Folge $\{Ay_j,\ j\in J''\}$ kompakt, J'' hat eine Teilfolge J''' für welche $\lim\limits_{j\to\infty} Ay_j$ $(j\in A''')$ existiert. Dann aber ist nach der obigen Begründung $\lim k_j=\lim m_j=0$ $(j\in J''')$. Das aber ist mit der Annahme daß $a\neq 0$ oder $b\neq 0$ im Wiederspruch. Also ist A beschränkt und kompakt, so gilt

$$\lim_{j\to\infty} k_j = \lim_{j\to\infty} m_j = 0. \tag{30}$$

Auch umgekehrt: Gelten die Relationen (30) so ist A vollstetig. Aus dem in der Einleitung zitierten Satz geht unmittelbar hervor, daß A_1 ein vollstetiger Operator ist. Sind alle m_j Zahlen reell, so ist auf Grund des zitierten Satzes auch A_2 vollstetig. Ist daß micht der Fall so machen wir die Zerlegung: $m_j=m_j'+im_j''$ wobei m_j' und m_j'' gegen 0 streben. Wenn wir dementsprechend A_2 zerlegen: $A_2=A_2'+iA_2''$, dann erweist sich A_2' und A_2'' als vollstetig.

Wir haben also folgendes bewiesen:

Satz 5. *Ein linearer Operator A: $H\to H$ ist genau dann kompakt, wenn die verallgemeinerten Schmidtschen Eigenwerte gegen* 0 *konvergieren.*

Wir wissen, daß wenn A vollstetig ist, dann sind A^*A und AA^* auch vollstetige Operatoren, haben also Eigenwerte (positive Zahlen) und Eigenelemente. Wenn wir folgend das Verfahren (A_j), (B_j) aus einem Eigenelement von AA^* ausgehen, so erhalten wir genau die üblichen Schmidtschen Eigenwerte $k_j=p_j$ und Eigenelemente und dabei ist $m_j=0$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$, d. h. $A_2=0$.

Aus dem Satz 5 folgt:

Corollar. Wenn irgendeine verallgemeinetre Schmidtsche Eigenwertfolge eines beschränkten Operators dem Absolutbetrage nach über einer positiven Schranke bleibt, dann ist der Operator nicht kompakt.

Über unitären und halbunitären Operatoren im Hilbertraum

Wir werden das Corollar des Satzes 5 auf unitäre Operatoren anwenden.

Den linearen Operator A nennt man unitär, falls

$$AA^* = A^*A = E; \quad R(A) = H \tag{31}$$

ist (E ist der Einheitsoperator in H, $R(.)$ is der Wertebereich). Aus (31) folgt

$$A^* = A^{-1}. \tag{32}$$

Wir wählen ein beliebiges vollständiges orthonormiertes Elementensystem $\{x_1, x_2, \ldots\}$ dann ist auch die Folge $y_j = Ax_j$ ein orthonormiertes Elementensystem:

$$(y_r, y_s) = (Ax_r, Ax_s) = (x_r, A^*Ax_s) = (x_r, x_s) = \delta_{r,s}.$$

Dabei ist auch $\{y_j\}$ vollständig. Ist y beliebig, dann gibt es wegen (31) ein $x \in H$ mit $Ax = y$ und somit ist

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{(j)} |(x, x_j)|^2 = \sum_{(j)} |(x, A^*Ax_j)|^2 =$$
$$= \sum_{(j)} |(Ax, Ax_j)|^2 = \sum_{(j)} |(y, y_j)|^2 = (Ax, Ax) = \|y\|^2.$$

Aus $Ax_j = y_j$ folgt auf Grund von (32) $Ay_j = x_j$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, d. h. die Gleichgen (A_j) und (B_j) sind mit den vorigen orthonormierten Systemen und Zahlen $k_j = 1$, $m_j = 0$ befriedigt $(j = 1, 2, \ldots)$. Daraus folgt, daß ein unitärer Operator nicht kompakt ist. Dabei is ferner $N(A^*) = N(A) = \{0\}$. Die Matrix $\mathfrak{A}$ welche wir A zugeordnet haben ist die Einheitsmatrix.

Obige Eigenschaften charakterisieren die unitäre Operatoren. Wir nehmen also an, das die A zugeordnete Matrix $\mathfrak{A}$ die Einheitsmatrix ist. Dann zeigen wir, daß A isometrisch ist.

Aus der Voraussetzung folgt $N(A) = N(A^*) = \{0\}$. Es seien x und y beliebige Elemente von H und $\{x_j\}$ das durch (A_j) und (B_j) bestimmte Elementensystem. Wegen der Vollständigkeit gilt

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j) x_j; \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} (y, x_j) x_j. \tag{33}$$

Da A beschränkt, also stetig ist, folgt unter Berücksichtigung, daß A die Einheitsmatrix ist

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j) y_j; \quad Ay = \sum_{j=1}^{\infty} (y, x_j) y_j.$$

Wegen der Parsevalschen Relation ist einerseits

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j)(\overline{y, x_j}).$$

Andererseits, wegen de Vollsändigkeit von $\{y_j\}$ gilt

$$(Ax, Ay) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, x_j)(\overline{y, x_j}).$$

Damit ist die Isometrie bewiesen. Aus $N(A^*) = \{0\}$ folgt $N(A^*) = R(A)^{\perp} = \{0\}$, also $R(A) = H$.

Satz 6. *Wenn die zugeordnete Matrix eines beschränkten Operators die Einheitsmatrix bezüglich eines Ausgangselementes x_1 ist, dann ist die Zugeordnete Matrix bezüglich eines beliebigen anderen Anfangselementes enenfalls die Einheitsmatrix und der Operator ist unitär.*

Wenn der Operator A halbunitär, z. B. linksunitär ist, dann gilt

$$A^*A = E \tag{34}$$

und es läßt sich, genau wie oben zeigen, daß A isometrische ist. A hat im allgemeinen Fall nur eine Einseitige Inverse, aus diesem Grund ist jetzt $N(A) \neq \{0\}$. Ist $\{x_j\}$ wieder ein orthonormiertes, vollständiges Elementensystem, so ist auch $Ax_j = y_j$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ ein solches, dabei ist $\{y_j\}$ zu $N(A)$ orthogonal. Auch diesmal ist $k_j = 1$, $m_j = 0$ $(j=1, 2, 3, \ldots)$ und die zugeordnete Matrix hat folgende Gestalt:

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Genau wie oben läßt sich beweisen, daß die Matrix (35) die halbunitären Operatoren charakterisiert.

Literatur

[1] JÖRGENS, K., Lineare Integraloperatoren. *Stuttgart*. 1970.
[2] W. SCHMEIDLER, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. *Leipzig*. 1950.

(Eingegangen am 6. September 1975.)