Краевые задачи с двумя условиями для дифференциално-функциональных уравнений первого порядка

М. М. КОНСТАНТИНОВ, Д. Д. БАЙНОВ (София)

1. Вводные замечания

Как известно, в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений число n_b краевых условий обычно равняется порядку n_0 уравнения. В задачах с n_p параметрами, однако, может иметь место случай $n_b > n_0$, причем соответствующие параметры определяются за счет удовлетворения $(n_b - n_0)$ из краевых условий, где числа n_b, n_0 и n_p связаны соотношением $n_b - n_0 \leqq n_p$.

В настоящей работе рассматривается теория краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящим от значений искомой функции, при $n_b = 2$ и $n_0 = n_p = 1$. Класс рассматриваемых дифференциально-функциональных уравнений включает уравнения смешанного типа с распределенными и дискретными отклонениями аргумента. Некоторые из полученных результатов при соответствующих изменениях будут иметь место и для систем дифференциальных уравнений с двумя векторными квазилинейными краевыми условиями.

Отметим, что для уравнений без отклонения аргумента и $n_b = 2$, $n_0 = n_p = 1$ некоторые частные результаты при слишком ограничительными предположени ями получены в [1].

2. Основные обозначения

R — вещественная ос; $R^m - m$ — мерное пространство над R; $T = [0, 1]$, $R_+ = [0, \infty)$ — интервалы; $M\colon T \to R_+$ — непрерывная функция; $\Lambda = \{\lambda\colon |\lambda| \leqq \alpha\}$,

$$\Xi = \left\{\xi : |\xi| \leqq \tilde{M} = \int_0^1 M(t)\,dt\right\}$$

— подмножества в R; C_p — пространство p — раз непрерывно дифференцируемых функций $Z\colon T \to R$; X, Y — подмножества в C_1 и C_0, такие, что

$$x \in X \Rightarrow |\dot{x}(t)| \leqq M(t), \quad y \in Y \Rightarrow |y(t)| \leqq M(t);$$

$V_t = (V_t^1, \ldots, V_t^m)$ — m-мерный функционал, определенный на множестве X;

$$\omega^i = \{\xi : |\xi| \leqq a_i\}, \quad a_i = \sup\{|V_t{}^i(x)| : (t, x) \in T \times X\}, \quad i \in \overline{1, m} \quad —$$

подмножества в R; $\omega=\omega^1\times\ldots\times\omega^m$ — подмножество в R^m; $f:(t, u, \lambda)\mapsto f(t, u, \lambda)$ — непрерывная функция определенная на множестве $T\times\omega\times\Lambda$;

$$\varphi:(t, u, \lambda_1, \lambda_2)\mapsto\varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\big(f(t, u, \lambda_1)-f(t, u, \lambda_2)\big)\in R$$

— функция, определенная на множестве $T\times Z$, $Z=\omega\times\big(\Lambda^2\setminus\Delta(\Lambda)\big)$, где $\Delta(\Lambda)$ — диагональ произведения Λ^2. Определим наконец следующие величины

$$L(t)=\sup\{|\varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2)|:(u, \lambda_1, \lambda_2)\in Z\}$$

$$l(t)=\inf\{|\varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2)|:(u, \lambda_1, \lambda_2)\in Z\},$$

$$L_1=\sup\{L(t):t\in T\},\ l_1=\inf\{l(t):t\in T\},$$

$$l_1\beta=\max\{|f(t, u, o)|:(t, u)\in T\times\omega\},$$

$$M_0=\max\{M(t):t\in T\}.$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$(1)\qquad \dot{x}(t)=f\big(t, V_t(x), \lambda\big),\quad t\in T$$

$$(2)\qquad A_0x(o)+A_1x(1)=a,\quad B_0x(o)+B_1x(1)=b;\quad D=A_0B_1-A_1B_0\neq 0,$$

где без ограничения общности будем считать, что $aB_1=bA_1$.

Пусть выполнено неравенство

$$(3)\qquad l_1>0$$

Рассмотрим операторы

$$\pi_0=(P_0, \Pi_0);\ \pi_0(Z_0)=\big(P_0(Z_0), \Pi_0(Z_0)\big),\quad Z_0=(x, \lambda)$$

и

$$\pi_1=(P_1, \Pi_1);\quad \pi_1(Z_1)=\big(P_1(Z_1), \Pi_1(Z_1)\big),\quad Z_1=(y, \lambda)$$

определенные на топологических произведениях $\Omega_0=X\times\Lambda$ и $\Omega_1=Y\times\Lambda$ формулами

$$P_0(Z_0)(t)=\int_0^t f\big(s, V_s(x), \lambda\big)\,ds,$$

$$\Pi_0(Z_0)=\lambda+\mu\Big(I-\int_0^1 f\big(t, V_t(x), \lambda\big)\,dt\Big)$$

и

$$P_1(Z_1)(t)=f\big(t, V_t(v), \lambda\big),$$

$$\Pi_1(Z_1)=\lambda+\mu\Big(I-\int_0^1 f\big(t, V_t(v), \lambda\big)\,dt\Big),$$

где

$$v : t \mapsto v(t) = \int_0^t y(s)\,ds,$$

$$\mu = 2(L_1 - l_1)^{-1} \operatorname{sing} \varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2) = \mu_1 \operatorname{sing} \varphi(t, u, \lambda_1, \lambda_2),$$

$$I = D^{-1}(bA_0 - aB_0).$$

После некоторых выкладок находим, что операторные уравнения $Z_0 = \pi_0(Z_0)$ или $Z_1 = \pi_1(Z_1)$ эквивалентны краевой задаче (I), (2).

Далее будем предполагать, что выполнено условие (A): Функционал V_t непрерывен на множестве X при $t \in T$ в следующем смысле [2] — для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $x, \bar{x} \in X$, удовлетворяющих условию

$$\|x - \bar{x}\| < \delta, \quad \|x\| = \max\{|x(t)| : t \in T\}$$

и для всех $t, \bar{t} \in T$, удовлетворяющих условию $|t - \bar{t}| < \delta$, выполнены неравенства $|V_t^i(x) - V_{\bar{t}}^i(\bar{x})| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$.

4. Существование решений краевой задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A) и (3). Пусть кроме того

$$|f(t, u, \lambda)| \leqq M(t); \quad \beta + l_1^{-1} I \leqq \alpha. \tag{4}$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x \in X$.

Доказательство. В силу условия (A) оператор π_1 непрерывен на Ω_1, а из теорем Тихонова, Асколи и Больцано — Вейерштрасса следует, что множество $\pi_1(\Omega_1) = P_1(\Omega_1) \times \Pi_1(\Omega_1)$ — компактное пространство в соответствующей индуцированной топологии.

Покажем, что $\pi_1(\Omega_1) \subset \Omega_1$. Непосредственно имеем $P_1(\Omega_1) \subset Y$ и $V \in X$ для каждого $Z_1 \in \Omega_1$. Для $Z_1 \in \Omega_1$ в силу теоремы о среднеинтегральном значении и неравенства (3) получаем

$$\Pi_1(Z_1) = \lambda + \mu\big(I - f(\bar{t}, V_{\bar{t}}(v), \lambda)\big), \quad \bar{t} \in T$$

и

$$|\Pi_1(Z_1)| \leqq \frac{L_1 - l_1}{L_1 + l_1}|\lambda| + \mu_1\big(I + |f(\bar{t}, V_{\bar{t}}(v), 0)|\big) \leqq \frac{L_1 - l_1}{L_1 + l_1}\alpha + \frac{2l_1\alpha}{L_1 + l_1} = \alpha,$$

т. е. $\Pi_1(\Omega_1) \subset \Lambda$ и $\pi_1(\Omega_1) \subset \Omega_1$. Ссылка на принцип Шаудера о неподвижной точке завершает доказательство теоремы.

Случай когда функционал V_t зависит и от λ $(V_t = V_{t,\lambda})$ рассматривается аналогично, если при определении функции φ, $f(t, u, \lambda_1)$ и $f(t, u, \lambda_2)$ заменить на $f(t, V_{t,\lambda_1}(x), \lambda_1)$ и $f(t, V_{t,\lambda_2}(x), \lambda)$, а при определении $L(t)$ и $l(t)$ брать дополнительно supremum и infimum по $x \in X$.

Рассмотрим конкретный вид функционала V_t:

$$V_t(x) = \int_0^1 h(s, t, x(s), \lambda)\, d_s g(s, t, x(t), \lambda), \tag{5}$$

где $h=(h^1, \dots, h^m)$, $g=\operatorname{diag}(g^1, \dots, g^m)$, а дифференцирование ведется по s.

Предположим, что выполнена следующая группа условий (Б):

Б1. Функции h и g определены в области $T^2\times\Xi\times\Lambda$.

Б2. Функция $h(s, t, \xi, \lambda)$ непрерывна по s, t, ξ и удовлетворяет условию Липшица по λ с достатолчно малой константой.

Б3. Функции

$$\bigvee_{s=0}^{1} g^i(s, t, \xi, \lambda), \quad i=1, \dots, m,$$

непрерывны по t, ξ и удовлетворяют условию Липшица по λ с достаточно малой константой.

При выполении условий (Б) для функционала (5) будет иметь место условие. (А). Таким образом справедлива следующая.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (Б) *и* (3). *Пусть кроме того*

$$|f(t, u, \lambda)| \leqq M(t), \quad \beta+l_1^{-1}I<\alpha.$$

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет хотя бы одно решение* $x\in X$.

5. Единственность рещения краевой задачи

Рассмотрим частный случай функционала (5):

$$V_t(x)=\big(x(\tau_1(t, x(t))), \dots, x(\tau_m(t, x(t)))\big)$$

(аналогичные результаты будут иметь место и когда функции τ_i зависят от λ).

Предположим, что в областях $T\times\Xi^m\times\Lambda$ и $T\times\Xi$ функции f и $0<\tau_i<1$, $i=1, \dots, m$, удовлетворяют условиям Липшица

$$\begin{gathered} |f(t, u, \lambda)-f(t, \bar{u}, \lambda)| \leqq \sum_{i=1}^{m} N_i|u^i-\bar{u}^i|, \\ |\tau_i(t, \xi)-\tau_i(t, \bar{\xi})| \leqq \nu_i|\xi-\bar{\xi}|. \end{gathered} \tag{6}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и* (6). *Пусть кроме того*

$$q_0=N_0\left(1+\frac{L_1}{l_1}\right)<1,$$

где

$$N_0=\sup\Big\{\sum_{i=1}^{m} N_i\big(\tau_i(t, \xi)+M_0\nu_i t\big) : (t, \xi)\in T\times\Xi\Big\}.$$

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет единственное решение* $x \in X$. *Доказательство.* Введем в Ω_1 норму

$$\|Z_1\|_1 = \|y\| + q|\lambda|, \quad \|y\| = \max\{|y(t)| : t \in T\},$$

где $q = \dfrac{1}{2\mu_1}\left(\dfrac{L_1}{l_1} + \dfrac{1}{N_0} - 1\right)$. Пусть $Z_1, \bar{Z}_1 = (\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \Omega_1$. Тогда

$$\|P_1(Z_1) - P_1(\bar{Z}_1)\| \leqq \sum_{i=1}^{m} N_i |v(\tau_i) - \bar{v}(\bar{\tau}_i)| + L_1|\lambda - \bar{\lambda}| \leqq N_0\|y - \bar{y}\| + L_1|\lambda - \bar{\lambda}|$$

и

$$|\Pi_1(Z_1) - \Pi_1(\bar{Z}_1) \leqq \mu_1 \sum_{i=1}^{m} N_i |v(\tau_i) - \bar{v}(\bar{\tau}_i)| + \frac{\mu_1(L_1 - l_1)}{2}|\lambda - \bar{\lambda}| \leqq$$
$$\leqq \mu_1 N_0 \|y - \bar{y}\| + \frac{\mu_1(L_1 - l_1)}{2}|\lambda - \bar{\lambda}|.$$

Следовательно

$$\|\pi_1(Z_1) - \pi_1(\bar{Z}_1)\|_1 \leqq N_0(1 + \mu_1 q)\|y - \bar{y}\| + \left(L_1 + \frac{\mu_1 q}{2}(L_1 - l_1)\right)|\lambda - \bar{\lambda}|.$$

Так как

$$N_0(1 + \mu_1 q) = \frac{N_0}{2}\left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{1}{N_0} + 1\right) = \frac{1}{2}(1 + q_0) < 1$$

и

$$L_1 + \frac{\mu_1 q}{2}(L_1 - l_1) = \frac{q}{h+1}\left(\frac{4h}{h - 1 + q_1^{-1}(h+1)} + h - 1\right) =$$
$$= q\frac{h(1 + q_0) + q_0 - 1}{h(1 + q_0) + 1 - q_0} < q, \quad h = \frac{L_1}{l_1},$$

то π_1 оператор сжатия на множестве Ω_1. Отсюда в силу принципа Банаха получаем утверждение теоремы.

Отметим, что при применении оператора π_0 в условиях теоремы 3 пришлось бы принять

$$N_0 = \sum_{i=1}^{m} N_i(1 + M_0 v_i).$$

Отсюда следует, что в краевых задачах с отклоняющимся аргументом надо использовать операторы вида π_1.

Введением другой метрики в множестве Ω_1 результаты теоремы 3 можно несколько улучшить. Точнее, имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и* (6). *Пусть кроме того*

$$q_0^* = N(\varrho_0)\left(1 + \frac{L_1}{l_1}\right) < 1,$$

где

$$N(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\max\left\{\sum_{i=1}^{m} N_i\left(e^{\varrho\tau_i(t,\xi)} - 1 + M_0 v_i(e^{\varrho t} - 1)\right)e^{-\varrho t} : (t, \xi) \in T \times \Xi\right\}$$

и

$$N(\varrho_0) = \min\{N(\varrho) : 0 < \varrho < \infty\}.$$

Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $x \in X$.

Доказательство теоремы 4 проводится вполне аналогично как в теореме 3 при использовании нормы

$$\|Z_1\|_1^* = \|y\|^* + q^*|\lambda|, \quad \|y\|^* = \max\{|y(t)|e^{\varrho_0 t} : t \in T\},$$

где

$$q^* = \frac{1}{2\mu_1}\left(\frac{L_1}{l_1} + \frac{1}{N(\varrho_0)} - 1\right),$$

и при учитывании, что $|y(t)| \leqq \|y\|^* e^{\varrho_0 t}$.

Литература

[1] К. Т. Ахмедов, Н. А. Сваричевская, М. А. Ягубов, Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок. *Докл. АН Азерб. ССР, т.* XXIX, № 8, 1973.

[2] В. П. Рудаков, К вопросуосуществовании решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения. *Дифференциальные уравнения, т.* 7, № 11, 1971.

ВЫСШИЙ МАШИННО—ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА — СОФИЯ
ПЛОВДИВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ П. ХИЛЕНДАРСКОГО

(Поступила: 24. XII. 1974.)