Die Ringe, deren sämtliche Unterringe Hauptrechtsidealringe sind

Von ALFRED WIDIGER (Halle)

Dem Andenken von Prof. A. Kertész gewidmet

1. Einleitung

In [2] wurden alle Integritätsbereiche mit Einselement bestimmt, die nur noethersche Unterringe enthalten. Das analoge Problem wurde in [1] für beliebige torsionsfreie Ringe behandelt. Wie die Struktur der Klasse aller der Ringe beschaffen ist, deren sämtliche Unterringe noethersch sind, ist bisher nicht bekannt.

In dieser Arbeit werden wir die Struktur der Klasse aller Ringe mit Einselement angeben, für die jeder Unterring ein Hauptrechtsidealring ist, also einer „starken" Maximalbedingung für seine Rechtsideale genügt. Für den halbprimen Fall ergibt sich, daß diese Ringe gerade die endlichen direkten Summen von absolut algebraischen Körpern von Primzhalcharakteristik und höchstens eines Unterringes der rationalen Zahlen sind (Satz 4). Wenn R nicht halbprim ist, so ist R eine endliche direkte Summe von p_i-Ringen, von denen jeder seinerseits wieder die direkte Summe von absolut algebraischen Körpern und eines gewissen endlichen Ringes ist (siehe genauer Satz 7). Insbesondere bemerken wir, daß die betrachteten Ringe sich als kommutativ herausstellen.

Für die gesamte Arbeit nehmen wir an, daß R ein assoziativer Ring mit Einselement 1 ist, dessen Unterringe alle Hauptrechtsidealringe sind. Wir nennen einen solchen Ring der Kürze halber hier einen strengen Hauptrechtsidealring.

Wir bezeichnen mit R_n den Ring aller n-reihigen Matrizen mit Elementen aus dem Ring R; $(R, +)$ sei die additive Gruppe des Ringes R und $Z(p^i)$ die zyklische Gruppe der Ordnung p^i. $\oplus$ bzw. $\boxplus$ sollen stets eine gruppentheoretische bzw. ringtheoretische direkte Summe bezeichnen. $N(R)$ sei das obere Nilradikal von R. Ferner vereibaren wir für den Ring der ganzen Zahlen bzw. für den Körper der rationalen Zahlen die festen Bezeichnungen $\mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{Q}$.

2. Halbprime strenge Hauptrechtsidealringe

Lemma 1. *Ist R nullteilerfrei, und enthält R einen Primkörper K, so ist R ein Schiefkörper.*

Beweis. Es sei $0 \neq a \in R$. Ist $a^2 R \cap K \neq (0)$, so folgt für ein $r \in R$ $a^2 r = k \neq 0$ mit $k \in K$, also $a^2 r k^{-1} = 1$, d. h. a ist eine Einheit.

Nun sei $a^2R\cap K=(0)$. Da a^2R ein Hauptrechtsidealring ist, gibt es ein a^2x, so daß für jedes $r\in R$ ein $b_r\in a^2R$ und eine natürliche Zahl n_r existiert mit

$$a^2xr = a^2xb_r+a^2xn_r,$$

also wegen der Nullteilerfreiheit

$$r = b_r+n_r.$$

Daraus folgt

(1) $$R = a^2R\oplus K.$$

Ist nun $aR=a^2R$, so folgt für ein $y\in R$ $a=a^2y$, $1=ay$, a ist also Einheit. Ist $aR\supset a^2R$, so folgt wegen (1), daß es ein $0\neq k\in K$ und ein $r\in R$ gibt mit

$$ar = a^2r'+k,$$

d. h. $a(r-ar')k^{-1}=1$. Jedes Element $\neq 0$ von R ist also eine Einheit, was zu zeigen war.

Satz 2. *Ist R nullteilerfrei mit Charakteristik $\neq 0$, so ist R ein absolut algebraischer Körper.*

Beweis. Nach Lemma 1 ist R ein Schiefkörper. Es sei P der Primkörper von R. Ist $x\in R$, so erfüllt der Ring $P[x]$ die Voraussetzungen von Lemma 1. Dann folgt also, daß x algebraisch über P ist. Nach Theorem 2 auf Seite 183 von [4] ist R dann auch kommutativ.

Satz 3. *Ist R nullteilerfrei mit Charakteristik 0, so ist R ein Unterring von Q.*

Beweis. Nach [1] besitzt R einen Quotientenschiefkörper, der endliche Dimension über Q hat. Angenommen, u wäre ein Element aus R, das über Q linear unabhängig von 1 ist. Da u algebraisch über Q ist, folgt

$$u^k+c_{k-1}u^{k-1}+\ldots+c_1u+c_0 = 0, \quad c_i\in Q, \quad k>1.$$

Dies sei das Minimalpolynom für u über Q.
Es sei $c_i=a_i/b_i$ mit relativ primen $a_i, b_i\in I$; v das kleinste gemeinsame Vielfache der b_i. Es folgt

$$(vu)^k+c_{k-1}v(vu)^{k-1}+\ldots+c_1v^{k-1}(vu)+c_0v^k = 0.$$

Wir setzen $vu=z$, $z\in R$, und z ist linear unabhängig von 1 über Q. Es ist

(*) $$z^k+d_{k-1}z^{k-1}+\ldots+d_1z+d_0 = 0, \quad d_i\in I.$$

Wir definieren

$$U = \{a_0+a_1pz+\ldots+a_{k-1}pz^{k-1}|a_i\in I,\ p \text{ feste Primzahl}\}.$$

U ist ein kommutativer Unterring von R mit dem Einselement 1.

$$J = \{a_0p+a_1pz+\ldots+a_{k-1}pz^{k-1}|a_i\in I\}$$

ist ein Ideal von U. J müßte Hauptideal von U sein, etwa

$$J = (b_0p+b_1pz+\ldots+b_{k-1}pz^{k-1}), \quad b_i\in I.$$

Dann gäbe es $e_i, e_i' \in I$ mit

(2) $$p = (b_0 p + b_1 pz + \ldots + b_{k-1} pz^{k-1})(e_0 + e_1 pz + \ldots + e_{k-1} pz^{k-1}),$$

(3) $$pz = (b_0 p + b_1 pz + \ldots + b_{k-1} pz^{k-1})(e_0' + e_1' pz + \ldots + e_{k-1}' pz^{k-1}).$$

Aus (2) folgt

$$1 = b_0 e_0 + px, \quad x \in I$$

also $p \nmid b_0$. Aus (3) folgt

$$0 = b_0 e_0' + py, \quad y \in I,$$

also $p \mid b_0 e_0'$ und wegen $p \nmid b_0$ $p \mid e_0'$. Damit folgt dann weiter aus (3) (durch Vergleich der Koeffizienten von z)

$$p = p^2 a, \quad a \in I.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also hat R den Quotientenschiefkörper Q, d. h. R ist ein Unterring von Q.

Jetzt formulieren wir unser erstes Hauptergebnis:

Satz 4. *Die halbprimen Ringe mit Einselement, deren sämtliche Unterringe Hauptrechtsidealringe sind, sind die endlichen direkten Summen von absolut algebraischen Körpern mit Primzhalcharakteristik und höchstens eines Unterringes (mit Einselement) des Körpers der rationalen Zahlen.*

Beweis. Nach [3], Theoreme A und B ist R endliche direkte Summe von vollen Matrizenringen $D_{n_i}^{(i)}$ über nullteilerfreien Ringen $D^{(i)}$ $(i=1, \ldots, n)$. Da $D_{n_i}^{(i)}$ einen zu $D^{(i)}$ isomorphen Unterring enthält, sind die $D^{(i)}$ also nullteilerfreie strenge Hauptidealringe, nach den Sätzen 2 und 3 also absolut algebraische Körper mit Primzahlcharakteristik oder Unterringe von Q.
Ein solcher Unterring D von Q enthält I als Unterring, und für $n>1$ enthält D_n $2I \boxplus 2I$ als Unterring. Wir zeigen, daß $2I \boxplus 2I$ kein Hauptidealring ist. Anderenfalls müßte es ganze Zahlen i, j, k, l, m derart geben, daß gilt:

$$(2, 0) = (2i, 2j)(2l, 2k) + (2mi, 2mj),$$

d. h.

$$2 = 4il + 2mi, \quad 0 = 4jk + 2mj.$$

Aus $j \neq 0$ würde $2 \mid m$ folgen im Widerspruch zur ersten Gleichung. Also müßte $j=0$ gelten. Analog könnte man auf $i=0$ schließen, und das ist nicht möglich. Es kommt also höchstens ein Unterring von Q unter den $D_{n_i}^{(i)}$ vor.

Es sei D ein Körper. Dann ist

$$\begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

ein Unterring von D_n falls $n>1$ ist. Aber $\begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & D \end{bmatrix}$ ist kein Hauptrechtsidealring: Angenommen $\begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & D \end{bmatrix}$ würde von $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$ erzeugt. Dann gäbe es $a, b \in D$, $m \in I$ mit

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mx \\ 0 & my \end{bmatrix},$$

das heißt

$$x = xb + mx, \quad 0 = yb + my.$$

Hieraus folgt, daß wenigstens eines der Elemente x, y Null sein muß. Wäre $x=0$, so müßte es $c, d \in D$, $n \in I$ geben mit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ny \end{bmatrix},$$

was nicht möglich ist. Analog folgt $y \neq 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß ein Ring R der Form

$$(\#) \qquad R = K^{(1)} \boxplus \ldots \boxplus K^{(n)} \boxplus D,$$

wobei $K^{(i)}$ $(i=1, \ldots, n)$ absolut algebraische Körper von Primzahlcharakteristik sind und D ein Unterring von Q ist, ein strenger Hauptidealring ist. Zunächst zwei Bemerkungen:

a) Jeder Unterring D von $\mathbf{Q}$ hat die Form

$$D = \left\{ l_D \frac{k}{p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}} \,\middle|\, p_1, \ldots, p_r \in \text{Primzahlmenge } M_D, n_1, \ldots, \right.$$

$\left. n_r, k \in I,\ l_D \text{ feste natürliche Zahl relativ prim zu allen } p_i \in M_D \right\}$ und wird folglich als Ideal von l_D erzeugt, ist also ein strenger Hauptidealring.

b) Jeder Unterring U eines absolut algebraischen Körpers K mit Primzahlcharakteristik ist ein Unterkörper, falls $U \neq (0)$: Ist nämlich P der Primkörper von K, $0 \neq u \in U$, so ist $P(u)$ wegen der Voraussetzungen über K ein Galoisfeld, seine multiplikative Gruppe also zyklisch, also enthält U das Einselement und u ein Inverses in U.

Wir beweisen nun die zweite Teilbehauptung mit Induktion nach der Anzahl n der in (#) vorkommenden Körper mit Primzahlcharakteristik.

Für $n=0$ ist die Behauptung nach a) richtig.

Es sei U ein Unterring von R in (#), π die Einschränkung der Projektion von R auf $K^{(2)} \boxplus \ldots \boxplus K^{(n)} \boxplus D$ auf U. $\pi(U)$ ist nach Induktionsvoraussetzung ein Hauptidealring. Ist $\operatorname{Ker} \pi = (0)$, so gilt $U \cong \pi(U)$; die Behauptung ist dann also richtig. Es sei $\operatorname{Ker} \pi \neq (0)$. Nach b) ist $\operatorname{Ker} \pi$ zu einem Unterkörper L von $K^{(1)}$ isomorph, und man hat daher

$$U = L \boxplus \pi(U).$$

Also ist U ein Hauptidealring.

3. Der nicht halbprime Fall

Unter einem primären Ring R verstehen wir einen Ring mit Einselement, so daß $N(R)$ nilpotent und $R/N(R)$ ein voller Matrizenring über einem Schiefkörper ist.

Lemma 5. *Ein strenger Hauptrechtsidealring R ist direkte Summe eines halbprimen strengen Hauptrechtsidealringes und endlich vieler primärer strenger Hauptrechtsidealringe.*

Beweis. Nach dem Satz von Levitzki ist $N(R)$ nilpotent. Da $N(R)$ Hauptrechtsidealring sein soll, genügt $N(R)$ der Maximalbedingung für Rechtsideale, also (wegen der Nilpotenz von $N(R)$) $(N(R), +)$ der Maximalbedingung für Unter-gruppen; insbesondere ist $N(R)$ daher auch linksnoethersch. $R/N(R)$ ist nach Satz 4 kommutativ, also auch linksnoethersch. Daher ist R linksnoethersch, und die Behauptung folgt nach [3], Theorem C.

Lemma 6. *Ein primärer nicht primer strenger Hauptrechtsidealring R hat eine der folgenden Formen:*

(i) $I/(p^k)$, $k>1$

(ii) $I[x]/(p, x^2)$

(iii) $I[x]/(p^2, px, x^2+mp)$, $p \nmid m$

(iv) $I[x]/(p, x^3)$

mit einer Unbestimmten x.

Beweis. k sei der Nilpotenzgrad von $N(R)$. $N(R)^{k-1}$ ist ein Zeroring und wegen $N(R)^k=(0)$ auch ein unitärer $R/N(R)$-Modul. Nach Lemma 5 und nach Satz 4 ist $R/N(R)$ ein Körper. Da $N(R)^{k-1}$ ein Hauptidealring sein soll, muß $(N(R)^{k-1}, +)$ eine zyklische Gruppe sein. Da $N(R)^{k-1}$ auch $R/N(R)$-Vektorraum ist, ist $(N(R)^{k-1}, +)$ eine zyklische Gruppe $Z(p)$ der Primzahlordnung p. Dann folgt auch $R/N(R)\cong I/(p)$.
Ebenso folgt $(N(R)^{k-2}/N(R)^{k-1}, +)\cong Z(p)$ usw., also $|R|=p^k$.

Wir nehmen jetzt an, daß $(N(R)^{k-n+1}, +)$ zyklisch (von der Ordnung p^{n-1}) wäre. Wäre nun $(N(R)^{k-n}, +)$ nicht zyklisch, so müßte gelten

$$(4) \qquad \begin{aligned} (N(R)^{k-n}, +) &= (N(R)^{k-n+1}, +)\oplus Z(p) \\ &= \qquad (a) \qquad \oplus \ (b). \end{aligned}$$

$N(R)^{k-n}$ ist Hauptrechtsidealring, wird also insbesondere als Rechtsideal selbst von einem Element erzeugt und zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit für $k-n>1$ von $a+b$. (Ist a_1+b_1 erzeugendes Element, so sind nämlich a_1 bzw. b_1 erzeugende Elemente der Gruppen $(N(R)^{k-n+1}, +)$ bzw. $Z(p)$. Für b_1 ist das klar. Wäre a_1 nicht erzeugendes Element, d. h. $a_1\in N(R)^{k-n+2}$, so wäre wegen $b^2\in N(R)^{2k-2n}\subseteq N(R)^{k-n+2}$ (für $k-n>1$) a_1+b_1 nicht erzeugendes Element von $N(R)^{k-1}$). Es gibt also ganze Zahlen l, f, g mit

$$b = l(a+b)+(a+b)(fa+gb) = la+lb+y,$$

wobei $y\in N(R)^{2k-2n}$. Für $k-n>1$ folgt daher aus (4) einerseits

$$l \equiv 1 \pmod p,$$

andererseits

$$l \equiv 0 \pmod p.$$

Also ist $(N(R)^{k-n}, +)$ zyklisch, wenn $k-n>1$, folglich ist $(N(R)^2, +)$ zyklisch. Da das Einselement 1 von R maximale additive Ordnung hat, folgt für den von 1 erzeugten Unterring A von R $|A|\geqq p^{k-2}$.

Wir zeigen zunächst weiter, daß $N(R)$ kommutativ ist. Ist $(N(R), +)$ zyklisch, so ist das klar. Anderenfalls ist

$$\begin{aligned}(N(R), +) &= (N(R)^2, +) \oplus Z(p)\\ &= \quad (a) \quad \oplus \quad (b).\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $b^2 = a$ gilt, also $ab = b^3 = ba$. $N(R)$ ist also kommutativ. Es sei $N(R) = cR$. Im folgenden unterscheiden wir 3 Fälle:

1. Fall: $|A| = p^k$. Dann ist $R \cong I/(p^k)$, $k > 1$, also gilt (i).

2. Fall: $|A| = p^{k-1}$. Da dann $(R, +) = (A, +) \oplus Z(p)$ gilt, ist R kommutativ. Aus

$$pA \subseteqq pR \subseteqq N(R), \quad |N(R)| = p^{k-1}, \quad (pR)^{k-1} = (0), \quad |pA| = p^{k-2}$$

folgt

$$pA = pR = N(R)^2 \quad \text{und} \quad p^2 A = N(R)^3.$$

Da $N(R)^2 = c^2 R$ gilt, ist $c^2 = mp$ $(p \nmid m \in I)$. Aus $N(R)^3 = p^2 A$ folgt $pc \in p^2 A$, also

$$p^2 m = pc^2 \in p^2 cA \subseteqq p^3 A.$$

Folglich hat man $p^2 = pc = c^3 = 0$. Demnach ist nur möglich

a) $k = 2$, d.h. $c^2 = p = 0$, und es folgt (ii).

b) $k = 3$, also (iii).

3. Fall: $|A| = p^{k-2}$. Wie oben folgt

$$pA = pR = N(R)^3.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(R, +) &= (N(R)^2, +) \oplus Z(p) \oplus Z(p)\\ &= (N(R), +) \oplus Z(p) \quad \text{mit} \quad Z(p) = (b).\end{aligned}$$

Man kann annehmen, daß gilt

$$1 = s + b \quad (s \in N(R)),$$

also $b = 1 - s$, und für beliebige $r_1, r_2 \in R$ hat man (mit $s_1, s_2 \in N(R)$, $n_1, n_2 \in I$)

$$r_1 r_2 = (s_1 + n_1 b)(s_2 + n_2 b) = ((s_1 - n_1 s) + n_1)((s_2 - n_2 s) + n_2) = r_2 r_1,$$

weil $N(R)$ kommutativ ist. R ist also kommutativ. Dann hat man $N(R)^3 = c^3 R$ und $c^3 = mp$ $(p \nmid m \in I)$. Wie im zweiten Fall folgt $p^2 = pc = c^4 = 0$.
Ist $c^3 = 0$, so folgt $p = 0$, also (iv).
Wäre $c^3 \neq 0$, so wäre (p, c^2) ein Zeroring mit nicht zyklischer Gruppe, was nicht sein kann. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun haben wir:

Satz 7. *R ist genau dann ein nicht halbprimer strenger Hauptrechechtsidealring mit Einselement wenn R endliche direkte Summe von zu verschiedenen Primzahlen p_i gehörenden p_i-Ringen ist, von denen jeder endliche direkte Summe absolut algebraischer Körper und höchstens eines Ringes der Form wie in Lemma 6 ist. Mindestens für ein p_i kommt so ein Ring vor.*

BEWEIS. Nach Lemma 5 und Lemma 6 ist R direkte Summe eines halbprimen Ringes S und eines endlichen Ringes, der für eine Primzahl p den Zeroring R_p über $Z(p)=(a)$ enthält. Wir zeigen, daß S keinen Unterring von Q enthalten kann: Dann wäre nämlich

$$R_p \boxplus pI$$

Unterring von R, der aber nicht (als Ideal) von einem Element erzeugt werden kann: Erzeugendes Element müßte $a+p$ sein. Aber

$$p = n(a+p)+(a+p)(ka+lp), \quad n, k, l \in I$$
$$= na+(np+lp^2)$$

führt auf

$$n \equiv 0 \pmod p \quad \text{und} \quad 1 = n+pl,$$

was nicht möglich ist. Also zerfällt R als Torsionsring in endlich viele p_i-Ringe. Nach Lemma 5, Satz 2 und Lemma 6 folgt die Behauptung, wenn man bedenkt, daß für ein festes p nur ein primärer nicht primer Summand vorkommen kann, da anderenfalls der Zeroring über $Z(p)\oplus Z(p)$ als Unterring vorkäme.

Für die Umkehrung verifiziert man zunächst leicht, daß die Ringe in (i) bis (iv) strenge Hauptidealringe sind. Dann kann man den Beweis genauso wie bei Satz 4 führen.

Wir formulieren noch besonders

Folgerung 8. Die strengen Hauptrechtsidealringe mit Einselement sind kommutativ.

Literatur

[1] W. BORHO, Die torsionsfreien Ringe mit lauter noetherschen Unterrigne, *Math. Abh. Univ. Hamburg* **38** (1970), 1—7.

[2] R. GILMER, Integral domains with noetherian subrings, *Mat. Helvetice* **45** (1970), 129—134.

[3] A. W. GOLDIE, Non-commutative principal ideal rings, *Archiv der Math.* **13** (1962), 213—221.

[4] N. JACOBSON, Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol.* **37**, *Providence* 1956.

[5] L. RÉDEI, Vollidealringe, *Monatshefte f. Math.* **56.** (1952), 89—95.

[6] L. RÉDEI, Vollidealringe im weiteren Sinn. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3.** (1952), 243—268.

[7] F. SZÁSZ, Ringe, deren endlich erzeugbare Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **13.** (1962), 115—132.

[8] F. SZÁSZ, Bemerkungen zu assoziativen Hauptidealringen, Indiagationes Math. 64. (1961), 577—583.

[9] F. SZÁSZ, Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *Publications of Math. Institut of Hungar. Acad. Sci.* **5.** (1960), 287—292.

[10] F. SZÁSZ, Radikale der Ringe, *Berlin—Budapest* (1975).

[11] F. SZÁSZ, Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques, *Czechoslovak Mat. Žurnal* **7.** (82) (1957), 21—25.

[12] П. А. Фрейдман, Колца с идеализаторным условыем I, II, *Изв. Высших Учёдн. Заведен.* *2* (**15**) (1960), 213—222, Учёдн. Записки Государ Университета имини А. М. Горкого, *Математика, Свердловск* **2.** (1959), 35—48.

[13] П. А. Фрейдман, О Кольцах разрешимого типа, Диссертация Кандидата *Физ-математ. Наук, Свердловск* (1960)

(Received September 16, 1975.)