Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung im Finslerschen Raum II

Von ENDRE SZOLCSÁNYI (Budapest)

In einer meiner vorigen Arbeiten[1]) habe ich folgendes gezeigt: wenn zu jedem Linienelement (x, y) des Finschlerschen Raumes F_n wenigstens vier Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, welche zu zweien orthogonal sind, dann ist auch der Raum F_n ein Riemannscher Raum. In dieser Arbeit werden wir zeigen, wenn zu jedem Linienelement (x, y) des Raumes F_n mindestens eine tangentiale Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert, dann ist auch der Raum F_n ein Riemannscher Raum.

§ 1. Der Finslersche Raum. Die Hyperflächen.

Unter einem Finslerschen Raum F_n (eine Punktmannigfaltigkeit) versteht man in der Cartanschen Theorie der Finslerschen Raume eine $2n-1$ dimensionale Linienelementmannigfaltigkeit[2]), auf dem eine Grundfunktion $\mathscr{L}(x, y)$ definiert ist, welche zu einem regulären Variationsproblem führt. Die Grundfunktion sei mindestens viermal stetig differenzierbar und es sei in der Veränderlichen y in erster Ordnung positiv homogen. (Hier sind $x=(x^1, \ldots, x^n)$ und $y=(y^1, \ldots, y^n)$.) Es ist bekannt[3]), daß die partielle Derivation nach den Veränderlichen y^k zum Tensor einen Tensor anordnet, und die Ordnung der Homogenität vermindert sich um 1.

Der metrische Grundtensor[4]), [5]) ist

$$g_{ik} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathscr{L}^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^k}. \tag{1.1}$$

Die Funktionen $g_{ik}=g_{ik}(x, y)$ sind in der y in 0-ter Ordnung homogen, und es gilt

$$g_{ij} = g_{ij}. \tag{1.2}$$

Der Torsionstensor des Raumes ist

$$A_{ijk} = \mathscr{L} C_{ijk}, \tag{1.3}$$

[1]) E. SZOLCSÁNYI [3].
[2]) E. CARTAN [1].
[3]) H. RUND [2] S. 15.
[4]) Siehe E. CARTAN [1] und H. RUND [2]
[5]) Die lateinschen Indizes laufen von 1 bis n, die griechischen von 1 bis $n-1$.

wo

$$(1.4)\qquad C_{ijk} := \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 \mathscr{L}^2 x, y)}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k}$$

ist.
Es ist klar, daß C_{ijk} und A_{ijk} vollständig symmetrisch sind. Wenn l den Einheitsvektor bezeichnet, der im Linienelement (x, y) definiert ist und zu y parallel ist, dann gilt

$$(1.5)\qquad l^i = \frac{y^i}{\mathscr{L}},$$

und

$$(1.6)\qquad l_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y^i}.$$

Es bestehen noch auch die Beziehungen:

$$(1.7)\qquad C_{ijk} l^i = C_{ijk} l^j = C_{ijk} l^k = 0,$$

$$(1.8)\qquad A_{ijk} l^i = A_{ijk} l^j = A_{ijk} l^k = 0.$$

Der Raum F_n ist dann und nur dann Riemannscher Raum, wenn die Bedingungen

$$(1.9)\qquad C_{ijk} = 0,$$

$$(1.10)\qquad A_{ijk} = 0$$

und

$$(1.11)\qquad A_i = 0,$$

welche miteinander äquivalent sind, gelten. Hier ist

$$(1.12)\qquad A_i = \sum_{j=1}^{n} A_i{}^j{}_j.$$

Wir nehmen an, daß die Hyperfläche F_{n-1} des Raumes F_n durch die parametrische Form

$$(1.13)\qquad x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}),$$

oder kurz[6])

$$(1.14)\qquad x^i = x^i(u)$$

gegeben werden kann. Wir bezeichen das Linienelement mit (u, v), wenn es zur Hyperfläche F_{n-1} gehört. Das Linienelement (u, v) der Hyperfläche fällt mit dem Linienelement (x, y) des Raumes zusammen, wenn

$$(1.15)\qquad x^i = x^i(u^\alpha)$$

und

$$(1.16)\qquad y^i = y^i_\alpha v^\alpha$$

erfüllt sind, wo

$$(1.17)\qquad x^i_\alpha := \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

[6]) S. die Fußnote [5]).

ist. Wir nehmen an, daß

$$\text{rang}\,\|x^i_\alpha\| = n-1 \tag{1.18}$$

ist. Aus der Formel (1.16) folgt, daß

$$\frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha} = x^i_\alpha. \tag{1.19}$$

Es ist natürlich daß

$$\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial v^\beta} = 0 \tag{1.20}$$

ist. Bezeichnet ξ_α den Vektor $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$, dann spannen diese Vektoren den Tangentialraum $T_{(x)}F_{n-1}$ auf. Sie bilden eine Basis in $T_{(x)}F_{n-1}$. Wenn n der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche in (u) ist, der im Linienelement (u, v) definiert wird, d. h. gelten die Beziehungen

$$\langle n, n\rangle = 1 \tag{1.21}$$

$$\langle n, \xi_\alpha\rangle = 0, \tag{1.22}$$

dann bilden $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, n$ eine Basis von $T_{(x)}F_n$, wo das Symbol $\langle,\rangle$ das innere Produkt im Raum F_n bezeichnet. Wir benötigen noch die zur Basis $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, n$ duale Basis. Wir werden diese mit $\xi^{*\alpha}$ $(\alpha=1, \ldots, n-1)$ und mit n^* bezeichen. Natürlich gelten die Relationen:

$$\langle \xi_\alpha, \xi^{*\beta}\rangle = \delta^\beta_\alpha, \tag{1.23}$$

$$\langle \xi_\alpha, n^*\rangle = 0, \tag{1.24}$$

$$\langle n, \xi^{*\alpha}\rangle = 0, \tag{1.25}$$

$$\langle n, n^*\rangle = 1. \tag{1.26}$$

Aus den Formeln (1.21)—(1.26) folgen[7])

$$x^i_\alpha x^\beta_i = \delta^\beta_\alpha \tag{1.27}$$

und

$$x^i_\alpha x^\alpha_j = \delta^i_j - n^i n_j. \tag{1.28}$$

Dann ist $\xi^{*\alpha} = (x^\alpha_1, \ldots, x^\alpha_n)$.

Der metrische Grundtensor[8]) $\bar{g}$ der Hyperfläche

$$\bar{g} = prg \tag{1.29}$$

ist. Deshalb gilt

$$g_{\alpha\beta} = x^i_\alpha x^j_\beta g_{ij}. \tag{1.30}$$

Ähnlich bestehen die Relationen:

$$\bar{C} = pr\,C, \tag{1.31}$$

$$\bar{A} = pr\,A, \tag{1.32}$$

[7]), [8]) E. Szolcsányi [3] und O. Varga [4].

d. h.

$$C_{\alpha\beta\gamma} = x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma C_{ijk}, \tag{1.33}$$

$$A_{\alpha\beta\gamma} = x^i_\alpha x^j_\beta x^k_\gamma A_{ijk}. \tag{1.34}$$

Es gilt noch

$$A_{\alpha\beta\gamma} = L C_{\alpha\beta\gamma}, \tag{1.35}$$

wo

$$L(u, v) := \mathscr{L}\big(x(u), y(u, v)\big) \tag{1.36}$$

ist. Die Darstellung[9]) des Tensors C ist in Basis $(\xi^{*1}, \ldots, \xi^{*n-1}, \eta^*)$:

$$\begin{aligned} C = {} & C_{\alpha\beta\gamma}\xi^{*\alpha}\otimes\xi^{*\beta}\otimes\xi^{*\gamma} + C_{n\beta\gamma}n^*\otimes\xi^{*\beta}\otimes\xi^{*\gamma} + C_{\alpha n\gamma}\xi^{*\alpha}\otimes n^*\otimes\xi^{*\gamma} + \\ & + C_{\alpha\beta n}\xi^{*\alpha}\otimes\xi^{*\beta}\otimes n^* + C_{nn\gamma}n^*\otimes n^*\otimes\xi^{*\gamma} + C_{n\beta_n}n^*\otimes\xi^{*\beta}\otimes n^* + \\ & + C_{\alpha nn}\xi^{*\alpha}\otimes n^*\otimes n^* + C_{nnn}n^*\otimes n^*\otimes n^*. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Damit ist die Darstellung des Tensors A vollständig analog. Endlich besteht auch die Beziehung

$$g_{ij} = x^\alpha_i x^\beta_j g_{\alpha\beta} + n_i n_j. \tag{1.38}$$

§ 2. Finslersche Räumen, in welchen zu allen Linienelementen tangentiale Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert.

Sei (x, y) ein beliebiges Linienelement im Raum F_n und F_{n-1} eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, welche das Linienelement berührt. Wir bezeichen mit g_{ij} bzw. mit $g_{\alpha\beta}$ des Grundtensors des Raumes F_n bzw. der Hyperfläche F_{n-1} im Linienelement $(x, y)=(u, v)$ Gemäß der Formel (1.38) gilt es

$$g_{ij} = x^\alpha_i x^\beta_j g_{\alpha\beta} + n_i n_j. \tag{2.1}$$

Das erste Glied der Gleichung (2.1) ist von v unabhängig. Aus (2.1) und (1.4) folgt

$$2C_{ijk} = n_{ik} n_j + n_i n_{jk}, \tag{2.2}$$

wo

$$n_{ik} := \frac{\partial n_i}{\partial v^k} \tag{2.3}$$

ist.
Vertauschen wir die Indizes i, k und bilden wir die Differenz $2C_{ijk} - 2C_{kij}$. Zufolge der Symmetrie des Tensors C bekommen wir, daß

$$(n_{ik} - n_{ki})n_j + n_i n_{jk} - n_k n_{ij} = 0 \tag{2.4/a}$$

ist. Vollständig ähnlicherweise bekommen wir (mit dem Vertauschen der Indizes j, k):

$$(n_{jk} - n_{kj})n_i + n_j n_{ik} - n_k n_{ij} = 0. \tag{2.4/b}$$

---

[9]) S. E. Szolcsányi [3] (2.21) und O. Varga [4] (2.11)

Die Differenz von (2.4/a) und (2.4/b) ist

(2.5) $$n_{kj}n_i - n_{ki}n_j = 0$$
gleich.

Lemma 1. *Es sei (x, y) ein beliebiges Linienelement des Raumes F_n. Wir nehmen die Existenz einer Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung an, die das Linienelement (x, y) berührt. Wenn $t \in T_{(x)}F_{n-1}$ gilt, dann folgt*

(2.6) $$t^i C_{ijk} = 0$$
wo $t = t^i e_i$ ist.

Beweis. Zufolge unserer Bedingung ist $\langle t, n\rangle = 0$. Aus (2.5) folgt

$$(n_{ki}t^i)n_j = 0.$$

Wenn wir mit n_j diese Formel überschieben, dann bekommen wir aus (1.26) die Beziehung

(2.7) $$n_{ki}t^i = 0.$$

Dies überschieben wir mit t^k, dann besteht nach (2.7) die Relation

$$2C_{ijk}t^k = (n_{ik}t^k)n_j + n_i(n_{jk}t^k) = 0.$$

Aus dieser Relation — zufolge der Symmetrie des Tensors C — folgt

(2.8) $$C_{ijk}t^i = C_{ijk}t^j = C_{ijk}t^k = 0.$$

Anmerkungen: 1°. Zufolge (1.3) gilt es

(2.9) $$A_{ijk}t^i = A_{ijk}t^j = A_{ijk}t^k = 0$$

2°. Es ist klar, daß noch auch

(2.10) $$C_{ijk}x^i_\alpha = C_{ijk}x^j_\beta = C_{ijk}x^k_\gamma = 0,$$

(2.11) $$A_{ijk}x^i_\alpha = A_{ijk}x^j_\beta = A_{ijk}x^k_\gamma = 0$$
gelten.

3°. Die Formel (2.10) bedeutet: wenn $t \in T_{(x)}F_{n-1}$ ein beliebiger Vektor ist, dann ist die Verjüngung des Tensors

$$C \otimes t$$

(nebst zwei beliebigen Indizes) gleich 0.

Lemma II. *Nehmen wir an, daß zu einem Linienelement (x, y) des Finslerschen Raumes F_n mindestens eine tangentiale Hyperfläche F_{n-1} mit Riemannscher Maßbestimmung existiert. Dann ist*

(2.12) $$C = C_{nnn}n^* \otimes n^* \otimes n^*.$$

Anmerkung: Wenn wir die Vargasche Konvention einführen

(2.13) $$C_{\times\times\times} = C_{pqr}n^p n^q n^r,$$

dann kann die Formel (2.12) in der Form

$$C_{ijk} = C_{\times\times\times} n_i n_j n_k$$

geschrieben[10]) werden.

Beweis. Betrachten wir die Darstellung (1.37) des Tensors C. In diesem Falle ist der Wert der Form

$$\xi_{\bar\alpha} \otimes n \otimes \xi_{\bar\gamma}$$

auf dem Tensor C nach (1.23)—(1.26)

$$0 = C_{\bar\alpha n \bar\gamma}$$

gleich. Da $\bar\alpha$ und $\bar\gamma$ beliebig sind, deshalb ist

(2.14/a) $$C_{\alpha n \gamma} = 0.$$

Ähnlich bekommen wir mit der Verwendung des Tensors

$$n \otimes \xi_{\bar\beta} \otimes \xi_{\bar\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \xi_{\bar\alpha} \otimes \xi_{\bar\beta} \otimes n,$$

daß

(2.14/b) $$C_{n\beta\alpha} = C_{\alpha\beta n} = 0$$

ist. Da der Raum F_{n-1} Riemannscher ist, deshalb gilt

(2.14/c) $$C_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Wir bekommen, daß

$$C = C_{nn\gamma} n^* \otimes n^* \otimes \xi^{*\gamma} + C_{n\beta n} n^* \otimes \xi^{*\beta} \otimes n^* + \\ + C_{\alpha nn} \xi^{*\alpha} \otimes n^* \otimes n^* + C_{nnn} n^* \otimes n^* \otimes n^*$$

ist. Mit der Hilfe der Methode, die wir in Anfang des Beweises angewandt haben, aber mit den Anwendungen der Tensoren $n \otimes n \otimes \xi_{\bar\gamma}$; $n \otimes \xi_{\bar\beta} \otimes n$ und $\xi_{\bar\alpha} \otimes n \otimes n$ bekommen wir:

(2.16) $$C_{nn\gamma} = C_{n\beta n} = C_{\alpha nn} = 0.$$

Aus (2.15) und (2.16) folgt schon unsere Behauptung.

Anwendung: Die Gleichung $C_{\alpha\beta\gamma} = 0$ kann man mit der obigen Methode, mit Hilfe der Anwendung des Tensors $\xi_{\bar\alpha} \otimes \xi_{\bar\beta} \otimes \xi_{\bar\gamma}$, bekommen. Deshalb ist es genügend im Lemma II. anzunehmen, daß die Relation (2.6) gilt, und die Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung unnötig ist.

Lemma III. *Sei F_{n-1} eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, und nehmen wir $(x) = (x^1, \ldots, x^n) \in F_{n-1}$ an. Wir betrachten die Menge der Linienelementen (x, y) mit Zentrum (x), die die Hyperfläche F_{n-1} berührt. Die Koordinaten C_{ijk} des Tensors C sind im ganzen Raume Funktionen der Linienelementen, d. h. $C_{ijk} = C_{ijk}(x, y)$ ist. Bezeichnen wir mit $\tilde{C}_{ijk}$ die Beschränkung der Funktion C_{ijk} auf die obige Linienelementmenge. In diesem Falle ist $\tilde{C}_{ijk} = \tilde{C}_{ijk}(v)$. Wir behaupten daß*

(2.17) $$\frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial v^\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

ist.

---

[10]) S. O. Varga [4] bzw. E. Szolcsányi [3].

BEWEIS. Es gilt in allen Linienelementen der Hyperfläche F_{n-1} nach (1.16)

$$y^l = x^l_\alpha v^\alpha. \tag{2.18}$$

Mit der Anwendung der Formel (1.19) bekommen wir

$$\frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial \tilde{C}_{ijk}}{\partial y^l} \cdot \frac{\partial y^l}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x^l_\alpha. \tag{2.19}$$

Zufolge (1.4) ist

$$\frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x^l_\alpha = \frac{\partial C_{ijl}}{\partial y^k} x^k_\alpha. \tag{2.20}$$

Aus (1.20) folgt

$$\frac{\partial}{\partial y^l}(C_{ijk} x^k_\alpha) = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x^k_\alpha. \tag{2.21}$$

Die F_{n-1} ist ein Riemannscher Raum und $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha) \in T_{(x)}F_{n-1}$, deswegen gilt nach dem Lemma I.

$$\frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} x^k_\alpha = 0. \tag{2.22}$$

Aus (2.22) und (2.19) folgt bereits die Behauptung des Lemmas.

Lemma IV. *Wenn zu dem Linienelement $(x, y) \in F_n$ zwei orthogonale berührende Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung existieren, dann ist*

$$C_{ijk}(x, y) = 0. \tag{2.23}$$

BEWEIS. Im Punkt (x) des Raumes F_n wählen wir das Koordinatensystem folgendermaßen: wir betrachten eine der Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linienelement (x, y) berührt. Diese Hyperfläche bezeichnen wir mit F^1_{n-1} und, wir nehmen an, daß die Tangentialvektoren der Parameterlinien dieser Hyperfläche $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ im Punkt (x) sind. Man kann annehmen, daß diese Vektoren eine orthonormierte Basis des Raumes $T_{(n)}F^1_{n-1}$ bilden. (Dies kann man mit einer Koordinatentransformation erreichen.) Sei n der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche F^1_{n-1} im (x). In diesem Falle bilden die Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, n$ eine orthonormierte Basis des Raumes $T_{(x)}F_n$. Wir bezeichnen mit F^2_{n-1} die andere Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linienelement (x, y) enthält. Man kann leicht mit einer neueren Koordinatentransformation erreichen daß der Vektor ξ_k im Punkt (x) der Normaleinheitsvektor der Hyperfläche F^2_{n-1} sei. In diesem Falle wird der Raum $T_{(x)}F^2_{n-1}$ durch die Vektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n, n$ aufgespannt. Wir parametrisieren die F^2_{n-1} so, daß die Tangenten der Parameterlinien die obigen Basisvektoren des Raumes $T_{(x)}F^2_{n-1}$ seien. Dann gilt die Darstellung (1.37) des Tensors C. Dem Lemma II. zufolge ((2.12)) ist

$$C = C_{nnn} n^* \otimes n^* \otimes n^*. \tag{2.24/a}$$

Wenn wir das Lemma II. auf die F^2_{n-1} anwenden, bekommen wir:

$$C = C_{kkk} \xi^{*k} \otimes \xi^{*k} \otimes \xi^{*k}, \quad k \neq n. \tag{2.24/b}$$

Deshalb folgt aus (2.24/a) und (2.24/b), daß

$$C = 0 \tag{2.25}$$

ist.

Endlich beweisen wir den folgenden

Satz. *Wenn zu jedem Linielement* (x, y) *des Finslerschen Raumes* F_n *mindestens eine Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung existiert, die dieses Linienelement berührt, dann ist der Raum* F_n *ein Riemannscher Raum.*

BEWEIS. Sei (x, y) ein beliebiges Linienelement, und F^1_{n-1} eine tangentiale Hyperfläche mit Riemannscher Maßbestimmung. Wir bezeichen mit n den Normaleinheitsvektor der Hyperfläche F^1_{n-1} in (x). Zufolge des Lemmas III. ist der Tensor $\breve{C}$ auf der Menge der Linienelementen mit gemeinsamem Zentrum (x) eine Konstante, d.h.

$$\breve{C}(x, y) = \text{const} \tag{2.26}$$

ist.

Jetzt betrachten wir das Linienelement (x, n). Nach unserer Bedingung existiert eine Hyperfläche F^2_{n-1} mit Riemannscher Maßbestimmung, die das Linienelement (x, n) berührt. Natürlich enthält der $T_{(x)}(F^1_{n-1}) \cap T_{(x)}(F^2_{n-1})$ irgendeines Linienelement (x, y'). Diesem Linienelement passen sich wenigstens zwei orthogonale Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung an; wir haben sie mit F^1_{n-1} und F^2_{n-1} bezeichnet. Nun folgt aus dem Lemma IV. ((2.23)) daß

$$\breve{C}(x, y') = 0. \tag{2.27}$$

ist. Aus den Formeln (2.26) und (2.27) folgt unsere Behauptung, weil $C(x, y) = \breve{C}(x, y)$ im Definitionsbereich des Tensors $\breve{C}$ ist.

Bemerkung: Im Beweis benutzen wir natürlich, daß $n \geqq 3$ ist.

Literatur

[1] E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Paris,* 1934.

[2] H. RUND, The differential geometry of Finsler spaces. *Berlin,* 1959.

[3] E. SZOLCSÁNYI, Hyperflächen mit Riemannscher Maßbestimmung im Finslerschen Raum. *Publ. Math. (Debrecen)* **22.** (1975), 133—150.

[4] O. VARGA, Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Raumen. *Deutsche Math.* **6.** (1941), 192—212.

(Eingegangen am 3. Juli 1976.)