Über Berwaldsche Räume I

Von TÜNDE VARGA (Debrecen)

Einführung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Berwaldschen Räumen (I) und mit der Untersuchung von Hyperflächen, die in Berwaldsche Räume eingebettet sind (II).

Berwaldsche Räume sind spezielle Finslersche Räume. Der Begriff des Berwaldschen Raumes taucht zuerst in der Arbeit [1] von L. BERWALD auf.*

E. CARTAN führt in seiner Arbeit ([4] XIV. 41.) spezielle Finslersche Räume ein, in denen der Tensor $A_{ijk|h}$ verschwindet. Er weist auch darauf hin, daß diese Räume mit denjenigen Berwaldschen affin-zusammenhängenden Räumen identisch sind, bei denen die Objekte G^i_{jk} vom Support des Linienelementes unabhängig sind.

L. Berwald zeigte, daß in diesen Finslerschen Räumen der Cartansche 2. Krümmungstensor verschwindet ([2]). Die Bezeichnung „Berwaldscher Raum" stammt von V. WAGNER, der in seiner Arbeit [11] bewies, daß die Bestimmung der Berwaldschen Räume mit dem Problem der Angabe derjenigen Hyperflächen zusammenhängt, zu denen eine transitive Untergruppe der affinen Mittelpunktstransformationen gehört.

Eine weitere Untersuchung der Berwaldschen Räume wird durch deren geometrische Eigenschaften gerechtfertigt. Die Berwaldschen Räume stellen einerseits eine Verallgemeinerung der Riemannschen Räume dar, andererseits sind sie aber auch metrische Bahnräume mit einem Grundtensor der Gestalt $g_{ij}(x, v)$.

Es ist bekannt, daß das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien eines Riemannschen Raumes folgendermaßen aussieht:

$$\ddot{x}^i + G^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Im Bahnraum hat das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien die Gestalt:

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x}) = 0, \tag{2}$$

wobei $G^i(x, \dot{x})$ eine in $\dot{x}$ homogene Funktion zweiter Ordnung ist. Ist dagegen in einem Bahnraum $G^i(x, \dot{x})$ eine in $\dot{x}$ quadratische Form, so kann das Differentialgleichungssystem in der Gestalt

$$\ddot{x}^i + G^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0 \tag{3}$$

* „Wenn die Γ^{*i}_{kl} bloße Ortsfunktionen sind, die Parallelübertragung also von der Wahl des ausgezeichneten Linienelementes unabhängig ist, so ist der allgemeine Raum affin-zusammenhängend im Sinn von H. Weyl." ([1], S. 47).

geschrieben werden; dieses stimmt aber mit (1) nur formell überein. Es ist nämlich nicht gesichert, daß in dem untersuchten Bahnraum eine Riemannsche Metrik vorliegt; auf Grund von ([3] 1.) ist aber der Bahnraum stets ein Berwaldscher Raum. Deswegen ist es außerordentlich wichtig, Berwaldsche Räume zu untersuchen. Nur so kann man nämlich herausfinden, wann bei quadratischem $G^i(x, \dot{x})$ eine Riemannsche Metrik und wann eine allgemeine Finslersche Metrik vorliegt.

In dieser Arbeit zeigen wir folgendes: *Gilt in einem Berwaldschen Raum in einem Koordinatensystem der Zusammenhang*

$$C^i_{jn} \Gamma^{*r}_{ks} \dot{x}^s = 0, \tag{4}$$

so ist der Raum ein Riemannscher Raum. Gleichzeitig stellt (4) *eine Integrationsbedingung des Differentialgleichungssystems* (3) *dar.*

1. Berwaldsche Räume

Definition. Diejenigen Finslerschen Räume, in denen die Zusammenhangskoeffizienten Γ^{*i}_{jk} lediglich Funktionen des Ortes sind, heißen Berwaldsche Räume.

Satz 1. *Ein Finslerscher Raume ist dann und nur dann ein Berwaldscher Raum, wenn* $C_{ijh|k}=0$.

Beweis. Nach Cartan ([4] 17.) gilt

$$\frac{\partial \Gamma^{*h}_{ij}}{\partial \dot{x}^r} = C^h_{jr|i} + C^h_{ir|j} - g^{hk} C_{irj|k} - (C^h_{jl} \cdot C^l_{ir|k} + C^h_{il} C^l_{jr|k} - C^l_{ij} C^h_{lr|k}) \dot{x}^k. \tag{1.1}$$

Wir bilden die Ableitung der Kovariante

$$C^i_{jh} = g^{il} C_{jlh}. \tag{1.2}$$

Wegen $g^{il}_{|k}=0$ hat man

$$C^i_{jh|k} = g^{il} C_{jlh|k}. \tag{1.3}$$

Aus (1.3) folgt $C^i_{jh|k}=0$ falls $C_{jlh|k}=0$ und umgekehrt.

Also ergibt sich aus (1.1) im Falle von $C_{ijh|k}=0$ die Beziehung $\dfrac{\partial \Gamma^{*h}_{ir}}{\partial \dot{x}^j} = 0$.

Nach Cartan ([4] 17.) besteht zwischen den Verschiebungskoeffizienten der Berwaldschen und der Finslerschen Räume der folgende Zusammenhang:

$$G_{ihj} = \Gamma^*_{ihj} + C_{ihj|k} \dot{x}^k \tag{1.4}$$

$$G^h_{ij} = \Gamma^{*h}_{ij} + \frac{\partial \Gamma^{*h}_{ir}}{\partial \dot{x}^j} \dot{x}^r. \tag{1.5}$$

Ist der Finslersche Raum ein Berwaldscher Raum, so gilt $\dfrac{\partial \Gamma^{*h}_{ir}}{\partial \dot{x}^j} = 0$. Dieses in (1.5) eingesetzt ergibt

$$G^h_{ij} = \Gamma^{*h}_{ij}. \tag{1.6}$$

Kontrahiert man jetzt (1.6) mit g_{hk}, so ergibt sich

$$G_{ikj} = \Gamma^*_{ikj}. \tag{1.7}$$

Wegen (1.7) folgt aus (1.4) die Beziehung

$$C_{ihj|k}\dot{x}^k = 0. \tag{1.8}$$

Nach [5] Satz 1. ist aber (1.7) äquivalent mit der Bedingung, daß

(1.9) $\quad C_{ihj|r}$ in jedem seiner Indizes symmetrisch ist.

Unter Berücksichtigung von (1.3), (1.8) und (1.9) können wir jetzt (1.1) unformen

$$\frac{\partial \Gamma^{*h}_{ij}}{\partial \dot{x}^r} = C^h_{jr|i} + C^h_{ir|j} - g^{hk}C_{irj|k} = g^{hk}(C_{jkr|i} + C_{ikr|j} - C_{irj|h}) = g^{hk}C_{jkr|t} = C^h_{jr|i}. \tag{1.10}$$

Aus (1.10) ist ersichtlich, daß mit $\dfrac{\partial \Gamma^{*h}_{ij}}{\partial \dot{x}^r} = 0$ auch $C^h_{jr|i} = 0$ gilt.

Folgerungen. 1. In Berwaldschen Räumen stimmen die Berwaldschen und die Finslerschen Verschiebungskoeffizienten überein, das heißt

$$\Gamma^{*i}_{jk}(x) = G^i_{jk}(x) \tag{1.11}$$

$$\Gamma^*_{ijk}(x, \dot{x}) = G_{ijk}(x, \dot{x}). \tag{1.12}$$

2. Wenn $C_{ihj|k} = 0$, dann $A_{ihj|k} = F \cdot C_{ihj|k} = 0$, beziehungsweise $A^i_{hk|r} = 0$. Daher folgt auf Grund von Satz 1, daß die Berwaldschen Räume identisch sind mit denjenigen speziellen Finslerschen Räumen Cartans, die durch das Verschwinden des Tensors $A_{ijk|h}$ charakterisiert sind.

In Finslerschen Räumen hängen bei der Parallelverschiebung von Vektoren die Verschiebungskoeffizienten im allgemeinen von dem Linienelement (x, v) ab, das heißt vom Zentrum x und vom Support v des Linienelements. Unter Beachtung der Charakterisierung ([4] XIV. 41.) von Cartan können wir feststellen, daß die Bedeutung der Berwaldschen Räume gerade darin besteht, daß in ihnen die Parallelverschiebung eines Vektors (im Cartanschen Sinne) unabhängig ist vom Anfangssupportelement, falls das Supportelement parallel zu sich selbst vom Punkt (x^k) in den Punkt $(x^k + dx^k)$ überführt wird.

Berwaldsche Räume verhalten sich wie affin-zusammenhängende Räume, deren metrischer Grundtensor die Gestalt $g_{ij}(x, v)$ hat.

Nach Berwald ([3] 1). ist das Verschwinden des Tensors

$$G^i_{jkl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial \dot{x}^l} \tag{1.13}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $G^i(x, \dot{x})$ eine in $\dot{x}$ quadratische Form ist und daß das Objekt G^i_{jk} lediglich eine Funktion des Ortes ist. In diesem Fall gilt

$$G^i(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} G^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k. \tag{1.14}$$

Also hat das Differentialgleichungssystem der geodätischen Linien eines Berwaldschen Raumes die Gestalt:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G^i_{jk}(x)\dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \tag{1.15}$$

wobei s der ausgezeichnete Parameter ist.

Satz 2. *Gilt in einem Berwaldschen Raum in einem Koordinatensystem der Zusammenhang*

$$C^i_{jr}\Gamma^{*r}_{ks}\dot{x}^k = 0, \tag{1.16}$$

dann ist der Raum ein Riemannscher Raum; dabei ist die Metrik durch denjenigen metrischen Tensor $g_{ij}(x, c)$ bestimmt, der aus dem metrischen Tensor $g_{ij}(x, v)$ des Berwaldschen Raumes gebildet worden ist (c^i sind Konstanten).

Beweis. In Berwaldschen Räumen gilt ebenso wie in Finslerschen Räumen gemäß ([4] VI. 12.)

$$\Gamma^{*i}_{kj}(x) = \Gamma^i_{kj} - C^i_{kh}\Gamma^{*h}_{rj}\dot{x}^r. \tag{1.17}$$

Ist (1.16) in einem Koordinatensystem gültig, dann ist in diesem Koordinatensystem

$$\Gamma^{*i}_{kj}(x) = \Gamma^i_{kj} \tag{1.18}$$

$$\Gamma^*_{khj} = \Gamma_{khj}. \tag{1.19}$$

Da die Bedingung $C_{jih}G^h_k = 0$ mit der Bedingung $C^i_{jh}\Gamma^{*h}_{kr}\dot{x}^r = 0$ äquivalent ist, erhalten wir nach ([4] XI.)

$$\Gamma_{kij} = \gamma_{kij} - C_{jih}G^h_k + C_{kjh}G^h_i. \tag{1.20}$$

Aus (1.20) folgt unter Beachtung von (1.18) und (1.19)

$$\Gamma_{kij} = \gamma_{kij} = \Gamma^*_{kij}. \tag{1.21}$$

(1.21) wird nun mit g^{ih} kontrahiert und wir erhalten

$$\Gamma^{*h}_{kj}(x) = \gamma^h_{kj}, \tag{1.22}$$

wobei γ^h_{kj} dasjenige Riemann—Christoffelsche Symbol zweiter Art bezeichnet, das mit Hilfe der Tensoren $g_{ij}(x, v)$ gebildet worden ist. Da Γ^{*h}_{kj} nur eine Funktion des Ortes ist, erhalten wir

$$\gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{2} g^{ir}(x, v)\left(\frac{\partial g_{jr}(x, v)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}(x, v)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}(x, v)}{\partial x^r}\right). \tag{1.23}$$

Die linke Seite von (1.23) ist unabhängig von v^i und deswegen kann man das Supportelement $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ beliebig wählen. Sei $(v^1, v^2, \dots, v^n) = (c^1, c^2, \dots, c^n)$ wobei $c^1, c^2, \dots, c^n$ festgewählte konstante Werte seien. Es ergibt sich

$$\gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{2} g^{ir}(x, c)\left(\frac{\partial g_{jr}(x, c)}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}(x, c)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}(x, c)}{x\partial^r}\right), \tag{1.24}$$

wobei die Tensoren $g_{ij}(x, c)$ lediglich Funktionen des Ortes sind.

Aus (1.24) kann der Tensor $g_{ij}(x, c)$ bestimmt werden, denn die Grundfunktion $F(x, v)$ des Berwaldschen Raumes ist bekannt. Durch die mit Hilfe dieses Tensors $g_{ij}(x, c)$ gebildete Grundfunktion $L = \sqrt{g_{ij}(x, c) x'^i x'^j}$ wird eine Riemannsche Metrik bestimmt.

Folgerung.

Satz 2 hat eine wichtige geometrische Bedeutung, da die Bedingung (1.16) Integrationsbedingung für (1.15) darstellt.

2. Kovariante Ableitungen

Cartan hat in Finslerschen Räumen zweierlei kovariante Ableitungen definiert: die eine mit Hilfe der Zusammenhangskoeffizienten Γ^{*i}_{jk} und die andere mit Hilfe des Torsionstensors A^i_{jk}.

Z.B. sieht die Cartansche 1. kovariante Ableitung in bezug auf einen Tensor T_{ij} folgendermaßen aus:

$$T_{ij|h} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial G^k}{\partial \dot{x}^h} - T_{kj} \Gamma^{*k}_{ih} - T_{ik} \Gamma^{*k}_{jh}. \tag{2.1}$$

Die Cartansche 2. kovariante Ableitung in bezug auf einen Tensor T_{ij} hat die Gestalt:

$$T_{ij}|_h \overset{\text{def}}{=} F \cdot \frac{\partial T_{ij}}{\partial \dot{x}^h} - T_{kj} A^k_{ih} - T_{ik} A^k_{jh}. \tag{2.2}$$

Berwald hat mit Hilfe der Objekte G^i_{jh} eine affine kovariante Ableitung eingeführt.

Die Berwaldsche affine kovariante Ableitung z. B. in bezug auf einen Tensor T_{ij} ist

$$\nabla_h T_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial \dot{x}^k} \frac{\partial G^k}{\partial \dot{x}^h} - T_{kj} G^k_{ih} - T_{ik} G^k_{jh}. \tag{2.3}$$

Folgerung. In Berwaldschen Räumen ist die Berwaldsche affine kovariante Ableitung mit der Cartanschen 1. kovarianten Ableitung identisch.

Satz 3. *In Berwaldschen Räumen kann die Reihenfolge der partiellen Ableitung nach $\dot{x}$ und der Cartanschen* 1. *kovarianten Ableitung vertauscht werden, das heißt*

$$\left(\frac{\partial T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}}{\partial \dot{x}^h}\right)_{|k} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \left(T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r|k}\right). \tag{2.4}$$

Beweis. Auf Grund von ([7] S. 99) gilt

$$\left(\frac{\partial T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}}{\partial \dot{x}^h}\right)_{|k} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \left(T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r|k}\right) = \frac{\partial T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}}{\partial \dot{x}^l} C^l_{hk|r} \dot{x}^r - \sum_{\alpha=1}^{s} T^{j_1 \dots j_{\alpha-1} q j_{\alpha+1} \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} \left(\frac{\partial \Gamma^{*j_\alpha}_{qk}}{\partial \dot{x}^h}\right) +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{r} T^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_{\beta-1} p i_{\beta+1} \dots i_r} \left(\frac{\partial \Gamma^{*p}_{j_\beta k}}{\partial \dot{x}^h}\right). \tag{2.5}$$

In Berwaldschen Räumen verschwindet die rechte Seiten von (2.5) womit die Richtigkeit von Satz 3 nachgewiesen ist.

Satz 4. *In Berwaldschen Räumen ist die Reihenfolge der Cartanschen* 1. *kovarianten Ableitung und der Operationen* $\|_i \overset{\text{def}}{=} F \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ *vertauschbar.*

BEWEIS. Der Einfachheit halber führen wir den Beweis in bezug auf einen Tensor T_{ij}; für beliebige andere Tensoren verläuft der Beweis ähnlich.
Wegen (2.4) und $F_{|h}=0$ gilt

$$(2.6)\qquad (T_{ij\|k})_{|h} = \left(F\cdot\frac{\partial T_{ij}}{\partial \dot{x}^k}\right)_{|h} = F\cdot\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial \dot{x}^k}\right)_{|h} = F\cdot\frac{\partial T_{ij|h}}{\partial \dot{x}^k} = (T_{ij|h})_{\|k}.$$

3. Die Krümmungstensoren der Berwaldschen Räume

Der affine Krümmungstensor $K_j{}^i{}_{hk}$
Gemäß ([3] (2.10)) haben wir

$$(3.1)\qquad K_j{}^i{}_{hk}(x,\dot{x}) = \frac{\partial G^i_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial x^h} + G^r_{jh}G^i_{rk} - G^r_{jk}G^i_{rh} + G^r_h G^i_{rjk} - G^r_k G^i_{rjh}.$$

In Berwaldschen Räumen gilt $G^i_{jkl}=0$; dieses in (3.1) eingesetzt liefert

$$(3.2)\qquad K_j{}^i{}_{hk}(x) = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jh}(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}(x)}{\partial x^h} + \Gamma^{*i}_{rk}(x)\Gamma^{*r}_{jh}(x) - \Gamma^{*i}_{rh}(x)\Gamma^{*r}_{jk}(x).$$

Hieraus folgt der

Satz 5. *In Berwaldschen Räumen ist der affine Krümmungstensor* $K_j{}^i{}_{hk}$ *lediglich eine Funktion des Ortes.*

Die Cartanschen Krümmungstensoren

Nach der Theorie von Cartan unterscheidet man in Finslerschen Räumen drei Krümmungstensoren, welche wir mit $S_j{}^i{}_{kh}$, $P_j{}^i{}_{kh}$ und $R_j{}^i{}_{kh}$ bezeichnen wollen; diese können wir aus den Vertauschungsformeln für die Cartanschen ersten und zweiten kovarianten Ableitungen herleiten. ([7] IV. 1 §. 2°).

Der Cartansche 1. Krümmungstensor $S_j{}^i{}_{kh}$

$$(3.3)\qquad S_j{}^i{}_{kh}(x,\dot{x}) = A^i_{kr}A^r_{jh} - A^i_{rh}A^r_{jk},$$

beziehungsweise

$$(3.4)\qquad S_{ijkh} = g_{rj}S_i{}^r{}_{kh}.$$

Satz 6. *In Berwaldschen Räumen verschwindet die Cartansche 1. kovariante Ableitung des Krümmungstensors* $S_j{}^i{}_{kh}$.

BEWEIS. Wir bilden die kovariante Ableitung von (3.3)

$$S_j{}^i{}_{kh|s} = A^i_{kr|s} A^r_{jh} + A^i_{kr} A^r_{jh|s} - A^i_{rh|s} A^r_{jk} - A^i_{rh} A^r_{jk|s}. \tag{3.5}$$

Wegen $A^i_{jk|h}=0$ erhalten wir $S_j{}^i{}_{kh|s}=0$ w. z. b. w.

In Finslerschen Räumen können Winkel auf zweierlei Arten erklärt werden:

a) als Winkel von Vektoren mit identischem Linienelement

b) als Winkel benachbarter Linienelemente mit identischem Zentrum.

Sind im Falle a) $\xi^i(x, v)$ und $\eta^i(x, v)$ die beiden Vektoren, so ist

$$\cos(\xi, \eta) = \frac{\xi_i \eta^i}{\sqrt{\xi_j \xi^j}\sqrt{\eta_j \eta^j}}. \tag{3.6}$$

Im Falle b) gilt für den Winkel $d\varphi$ der Linienelemente (x, v) und $(x, v+dv)$ die Relation

$$d\varphi^2 = \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial^2 F(x, v)}{\partial v^i \partial v^k} dv^i dv^k. \tag{3.7}$$

Auf Grund von [9] erhält man für das Krümmungsmaß der Winkelmetrik:

$$K(x^i, l^i, p^{ij}) = \frac{(g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh} - S_{ijhk}) p^{ij} p^{hk}}{(g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}) p^{ij} p^{hk}}, \tag{3.8}$$

wobei p^{ij} ein Bivektor und $p^{ih} l_i = 0$ ist.

Satz 7. *In Berwaldschen Räumen ist das Krümmungsmaß der Winkelmetrik invariant gegenüber Parallelverschiebungen.*

BEWEIS. Notwendig und hinreichend für die Invariaz des Krümmungsmaßes der Winkelmetrik gegenüber von Paralellelverschiebungen ist das Verschwinden der 1. kovarianten Ableitung des Tensors S_{ijkh} ([8]).

In Berwaldschen Räumen gilt $S_{ijkh|s}=0$, da aus

$$S_{ijkh} = g_{rj} S_i{}^r{}_{kh}$$

die Beziehung

$$S_{ijkh|s} = g_{rj} S_i{}^r{}_{kh|s} = 0$$

folgt.

Der Cartansche 2. Krümmungstensor $P_j{}^i{}_{kh}$.

$$P_j{}^i{}_{kh}(x, \dot{x}) = F \cdot \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial \dot{x}^h} + A^i_{jm} A^m_{hk|0} - A^i_{jh|k}. \tag{3.9}$$

Aus (3.9) folgt auf Grund von Satz 1, daß in Berwaldschen Räumen der Krümmungstensor $P_j{}^i{}_{kh}$ verschwindet ([2]).

Folgerung:

$$P_{ijkh} = g_{rj} P_i{}^r{}_{kh} = 0. \tag{3.10}$$

Der Cartansche 3. Krümmungstensor $R_j{}^i{}_{kh}$

In Berwaldschen Räumen gilt

$$R_j{}^i{}_{hk}(x, \dot{x}) = K_j{}^i{}_{hk}(x) + A^i_{jm} K_0{}^m{}_{hk}, \tag{3.11}$$

beziehungsweise

$$R_j{}^i{}_{hk}(x, \dot{x}) = K_j{}^i{}_{hk}(x) + A^i_{jm} R_0{}^m{}_{hk}. \tag{3.12}$$

(3.11) und (3.12) wurden aus den sich auf Finslersche Räume beziehenden Formeln gewonnen.

In Finslerschen Räumen ist der affine Krümmungstensor $K_{ijhk} \overset{\text{def}}{=} g_{rj} K_i{}^r{}_{hk}$ in allgemeinen in den Indizes i, j nicht schiefsymmetrisch.

Wir nehmen an, daß in einem Berwaldschen Raum die Beziehung

$$K_{ijkl}\{x, \dot{x}) = -K_{jikl}(x, \dot{x}) \tag{3.13}$$

gilt. Wegen ([3] (11.7)) haben wir aber

$$\frac{1}{2}(K_{ijkl} + K_{jikl}) = A_{ijk|0|l} - A_{ijl|0|k} - A^m_{ij} R_{0mkl}. \tag{3.14}$$

Unter Benutzung von (3.13) erhalten wir damit

$$A^m_{ij} R_{0mkl} = 0. \tag{3.15}$$

Ähnlich erhält man auf Grund von ([3] (11.7))

$$\frac{1}{2}(K_{ijkl} - K_{jikl}) = R_{ijkl} + A^m_{ik|0} A_{mjl|0} - A^m_{il|0} A_{mjk|0}, \tag{3.16}$$

und deswegen gilt in Berwaldschen Räumen

$$\frac{1}{2}(K_{ijkl} - K_{jikl}) = R_{ijkl}. \tag{3.17}$$

Aus (3.13), (3.14), (3.15) und (3.17) folgt

$$K_{ijkl} = R_{ijkl}. \tag{3.18}$$

(3.18) wird nun mit g^{mj} kontrahiert und es ergibt sich

$$K_i{}^m{}_{kl}(x) = R_i{}^m{}_{kl}. \tag{3.19}$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 8. *Gilt in einem Berwaldschen Raum* $K_{ijkl}(x, \dot{x}) = -K_{jikl}(x, \dot{x})$ *so folgt* $\dfrac{\partial R_i{}^m{}_{kl}}{\partial \dot{x}^s} = \dfrac{\partial K_i{}^m{}_{kl}}{\partial \dot{x}^s} = 0$, *das heißt, der Cartansche 3. Krümmungstensor* $R_i{}^m{}_{kl}$ *ist lediglich eine Funktion des Ortes und er stimmt mit dem affinen Krümmungstensor* $K_i{}^m{}_{kl}$ *überein.*

4. Der Riccische Tensor eines Berwaldschen Raumes und seine Hauptrichtung

Definition. Der Riccische Tensor eines Finslerschen Raumes ist

$$K_{ih} \overset{\text{def}}{=} K_{i\ hk}^{\ k}. \tag{4.1}$$

Folgerung. Der Riccische Tensor eines Berwaldschen Raumes ist lediglich eine Funktion des Ortes.

Definition. Unter der Riccischen Hauptrichtung eines Finslerschen Raumes im Punkt $P(x^k)$ verstehen wir die Richtung $\dot{x}^k$ falls

$$K_{ik}(x, \dot{x}) \cdot \dot{x}^i = k g_{ik}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \tag{4.2}$$

gilt, wobei k ein Skalar ist.

Es sei nun ein Berwaldscher Raum gegeben. Es sei weiter in einem Punkt $P_0(\underset{\circ}{x}^k)$ jede Richtung eine Riccische Hauptrichtung. Dann gilt

$$K_{ik}(\underset{\circ}{x}) = k(\underset{\circ}{x}, \dot{x}) g_{ik}(\underset{\circ}{x}, \dot{x}) \dot{x}^i \tag{4.3}$$

in einer beliebigen Richtung $\dot{x}^i$.

Wir differenzieren (4.3) nach $\dot{x}^j$, benutzen weiter die Beziehung $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^j} = 0$ und erhalten

$$K_{jk} = \frac{\partial k}{\partial \dot{x}^j} g_{ik} \dot{x}^i + k g_{jk}. \tag{4.4}$$

(4.4) mit $\dot{x}^k$ kontrahiert ergibt

$$K_{jk} \dot{x}^k = \frac{\partial k}{\partial \dot{x}^j} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + k g_{jk} \dot{x}^k. \tag{4.5}$$

Wegen (4.3) folgt aus (4.5)

$$K_{jk} \dot{x}^k = \frac{\partial k}{\partial \dot{x}^j} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + K_{kj} \dot{x}^k. \tag{4.6}$$

Wir wählen jetzt $\dot{x}^i$ und $\dot{x}^j$ so, daß $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1$ ist. Wir wollen weiter voraussetzen, daß der Riccische Tensor im Punkt $P_0(\underset{\circ}{x})$ symmetrisch ist, das heißt:

$$K_{jk}(\underset{\circ}{x}) = K_{kj}(\underset{\circ}{x}). \tag{4.7}$$

Dann haben wir

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{x}^j} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = \frac{\partial k}{\partial \dot{x}^j} = 0 \tag{4.8}$$

das heißt, in $P_0(\underset{\circ}{x}^i)$ ist der Skalar $k(\underset{\circ}{x}, \dot{x})$ lediglich eine Funktion des Ortes. Der Riccische Tensor hat also die folgende Gestalt:

$$K_{ij}(\underset{\circ}{x}) = k(\underset{\circ}{x}) g_{ij}(\underset{\circ}{x}, \dot{x}). \tag{4.9}$$

Wir leiten (4.9) nach $\dot{x}^l$ ab und erhalten

$$k \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^l} = 0. \tag{4.10}$$

Aus (4.10) folgt entweder $k(\underset{\circ}{x})=0$, aber in diesem Falle ist $K_{ik}(\underset{\circ}{x})=0$, oder $\frac{\partial g_{ik}(\underset{\circ}{x}, \dot{x})}{\partial \dot{x}^l}=0$ in jeder beliebigen Richtung $\dot{x}^l$.

Aus dem obigen folgt

Satz 9. *Ist in einem Punkt $P_0(\underset{\circ}{x})$ eines Berwaldschen Raumes jede Richtung $\dot{x}^l$ eine Riccische Hauptrichtung und ist in diesem Punkte der Riccische Tensor symmetrisch, so gilt entweder $K_{ik}(\underset{\circ}{x})=0$, oder $\frac{\partial g_{ik}(\underset{\circ}{x}, x)}{\partial \dot{x}^l}=0$.*

5. Spezielle Berwaldsche Räume

Wir untersuchen die Berwaldschen Räume mit skalarer und mit konstanter Krümmung.

Satz 10. *Ein Berwaldscher Raum mit skalarer Krümmung ist ebenenprojektiv.*

Beweis. Nach ([3] (5.15)) ist das Verschwinden des Douglas-Tensors

$$D_{h\ jk}^{\ i} = G^i_{hjk} - \frac{1}{n+1}\left(G^m_{hjm}\delta^i_k - G^m_{jkm}\delta^i_h + G^m_{khm}\delta^i_j + G^m_{hjk}\dot{x}^i\right) \tag{5.1}$$

und des projektiven Biegungstensors

$$W^j_h = K^j_h - K\delta^j_h - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^r_h}{\partial \dot{x}^r} - \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^h}\right)\dot{x}^j \tag{5.2}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein n-dimensionaler $(n\geqq 2)$ Finslerscher Raum ebenenprojektiv ist.*

In Berwaldschen Räumen gilt wegen $G^i_{hjk}=0$ auch $D^i_{hjk}=0$. Dagegen gilt in jedem Finslerschen Raum mit skalarer Krümmung: ([6] (1.14))

$$K^j_h = K\delta^i_j + \frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^r_h}{\partial \dot{x}^r} - \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^h}\right)\dot{x}^j.$$

Auf diese Weise erhalten wir aus (5.2) die Beziehung $W^j_h=0$, q. e. d.

Satz 11. *Ein Berwaldscher Raum mit konstanter Krümmung R $(R\neq 0)$ ist ein Riemannscher Raum.*

Beweis. In einem Finslerschen Raum mit konstanter Krümmung gilt nach ([3] (13.11))

$$K_{ik}(x, \dot{x}) = (n-1)\cdot R g_{ik}(x, \dot{x}) \quad (n > 2). \tag{5.3}$$

---

*) $$K^j_h(x, \dot{x}) = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_j}{\partial x^r}\dot{x}^r + 2G^i_{jr}G^r - G^i_r G^r_j$$

ist der affine Biegungstensor, und $K = \frac{1}{n-1}K^r_r$ der affine Krümmungsskalar.

Hat ein Berwaldscher Raum konstante Krümmung, dann gilt

$$K_{ik}(x) = (n-1)\cdot R g_{ik}(x, \dot{x}). \tag{5.4}$$

Wir leiten (5.4) nach $\dot{x}^l$ ab und erhalten

$$\frac{\partial K_{ik}}{\partial \dot{x}^l} = (n-1) R \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}, \tag{5.5}$$

woraus $\frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^l} = 0$ folgt, das heißt, die Tensoren g_{ik} sind lediglich Ortsfunktionen; daher verschwindet der Torsionstensor A^i_{jk}, also ist der Raum ein Riemannscher Raum.

Behauptung. Berwaldsche Räume, in denen der affine Krümmungstensor $K_j{}^i{}_{hk}$ verschwindet, sind Minkowskische Räume.

Beweis. Die Behauptung folgt auf Grund von ([10], S. 162) sofort aus den Beziehungen $K_j{}^i{}_{hk}=0$ und $A_{ijk|h}=0$.

Riemannsche Räume und Minkowskische Räume sind zwei triviale Beispiele für Berwaldsche Räume. Es existieren auch nichttriviale Berwaldsche Räume. Für die Dimension $n=2$ gibt es drei nichttriviale Klassen von Berwaldschen Räumen. Mit ihrer Untersuchung hat sich V. Wagner beschäftigt ([11]).

Literatur

[1] L. Berwald, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des ihren herrschenden Parallelismus *Math. Zeitschrift* **25** (1926), 40—73.

[2] L. Berwald, Über Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser A* **49** (1946), 642—647.

[3] L. Berwald, Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung. *Ann. Math.* **48** (1947), 755—781.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler *Actualités Sci.* **79**, *Paris* (1934).

[5] H. Kawaguchi, On Finsler spaces with the vanishing second curvature tensor. *Tensor* **26**, *N. S.* (1972), 250—254.

[6] A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv-ebene Räume *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 1—18.

[7] H. Rund, The differential geometry of Finsler Spaces. *Berlin—Göttingen—Heidelberg* (1959).

[8] O. Varga, Bemerkung zur Winkelmetrik im Finslerschen Räumen. *Ann. Univ. Sci. Budapest Rolando Eötvös* **3—4** (1960/61), 379—381.

[9] O. Varga, Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischer Räumes und die geometrische Deutung des einer Krümmungstensors des Finslersche Räumes. *Abh. Math. Ser. Univ. Hamburg* **20** (1955), 41—51.

[10] O. Varga, Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **10** (1963), 149—163.

[11] V. V. Wagner, Über Berwaldsche Räume. *Rec. Math. Moscou, N. S.* **3** (1938), 655—662.

(Eingegangen am 20 Oktober 1975.)