# Sur les classes de tolérance d'une algèbre universelle

Par I. GY. MAURER et I. VIRÁG (Cluj)

*In memoriam A. KERTÉSZ*

On dit qu'une relation (binaire) définie sur un ensemble $A$ est une *relation de tolérance* (ou simplement une *tolérance*), si elle est refléxive et symétrique.

L'attention sur l'étude de ces relations — introduites par E. C. ZEEMAN [8] — a été excité en premier lieu par de certaines recherches dans de différents domaines de l'application des mathématiques (linguistique, théorie des authomates, cybérnetique, etc.; [1], [2], [5], [9]). La théorie axiomatique de ces relations a été fondée par JU. A. SREIDER [6] et par S. M. JAKUBOVIČ [4]. Le premier auteur mentionné a résumé dans son livre [7] les résultats principaux obtenus dans cette direction. Certains problèmes de compatibilité d'une tolérance avec les opérations définies dans des structures algébriques ont été étudiés par B. ZELINKA et I. CHAJDA [3], [10].

Le but principal de cette nôte est l'étude des tolérances définies dans des algèbres universelles d'un point de vue qui permet de mettre en lumière les traits caractéristiques de certains théorèmes concernant l'intersection des sous-algèbres maximales par rapport à une certaine propriété.

Considérons un *espace de tolérance*, c'est-à-dire un couple $(A, \varrho)$ où $A$ est un ensemble et $\varrho$ est une tolérance définie sur $A$. Nous écriverons $x \varrho y$ dans le cas où il existe la relation $\varrho$ entre les éléments $x, y \in A$ et $x(\text{non } \varrho)y$ dans le cas contraire. Un sous-ensemble $C$ de $A$ sera dénommé une *préclasse* (par rapport à la relation $\varrho$), si la restriction de la relation $\varrho$ sur $C$ est la relation universelle, c'est-à-dire si $x \varrho y$ $(\forall x, y \in C)$. Désignons par $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble de toutes les préclasses de $A$. L'ensemble ordonné $(\mathscr{C}(A), \subseteqq)$ est inductif. En effet, si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ est une chaîne croissante quelconque de préclasses, alors on déduit sans peine que $\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha \in \mathscr{C}(A)$, donc que la chaîne considérée admet une borne supérieure. Il s'ensuit en vertu du lèmme de Zorn que *chaque préclasse est contenue dans une préclasse maximale.* Ces préclasses maximales seront dénommées *classes de tolérance.* Observons que les classes de tolérance par rapport à une relation d'équivalence $\varrho$ sont les classes d'équivalence par rapport à $\varrho$.

Si $A$ est un ensemble et $\varrho$ est une tolérance définie sur $A$, alors l'ensemble $\operatorname{Rad} \varrho$ des éléments de $A$, tolérants avec tous les éléments de $A$, sera dénommé le *radical* de la relation $\varrho$:

$$\operatorname{Rad} \varrho = \{x \in A \mid x \varrho y (\forall y \in A)\}.$$

Remarquons que dans le cas où $\varrho$ est une relation d'équivalence, nous avons $\operatorname{Rad} \varrho = \emptyset$ si $\varrho \neq \varepsilon$ et $\operatorname{Rad} \varrho = A$ si $\varrho = \varepsilon$ ($\varepsilon$ représente la relation identique définie sur $A$).

**Lèmme.** *Si $(A, \varrho)$ est un espace de tolérance et $\{C_\alpha | \alpha \in I\}$ représente l'ensemble de toutes les classes de tolérance de $A$, alors*

$$\mathrm{Rad}\, \varrho = \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Si $\mathrm{Rad}\, \varrho = \emptyset$, alors $\mathrm{Rad}\, \varrho \subseteqq \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$. Supposons donc que $\mathrm{Rad}\, \varrho \neq \emptyset$. Soit $x$ un élément quelconque de $\mathrm{Rad}\, \varrho$ et $C_{\alpha_0}$ $(\alpha_0 \in I)$ une classe de tolérance arbitrairement chosie. Alors $C_{\alpha_0} \cup \{x\}$ est une préclasse. En tenant compte du fait que $C_{\alpha_0}$ est une préclasse maximale, il s'ensuit que $C_{\alpha_0} \cup \{x\} = C_{\alpha_0}$. Il en résulte que $x \in C_{\alpha_0}$. Donc $\mathrm{Rad}\, \varrho \subseteqq \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$.

Si $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset$, alors $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteqq \mathrm{Rad}\, \varrho$. Supposons donc que $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$ et soit $x$ un élément quelconque de $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$. Puisque $\varrho$ est une relation refléxive, l'ensemble $\{y\}$ est une préclasse pour tout $y \in A$. Il s'ensuit que $\{y\}$ est contenu dans une certaine classe de tolérance $C_{\alpha_0}$ $(\alpha_0 \in I)$. Puisque $x, y \in C_{\alpha_0}$, il s'ensuit que $x \varrho y$. Nous avons donc $x \varrho y$ $(\forall y \in A)$, d'ou il resulte que $x \in \mathrm{Rad}\, \varrho$. Donc $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteqq \mathrm{Rad}\, \varrho$. ∎

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les classes de tolérance d'une algèbres universelles soient des sous-algèbres de l'algèbre considérée.

**Théorème 1.** *Soit $(A, \Omega)$ une algèbre universelle et soit $\varrho$ une tolérance définie sur $A$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Toutes les classes de tolérance de $A$ sont des sous-algèbres de $(A, \Omega)$;*

(ii) *Si $\omega \in \Omega$ est une opération $n$-aire quelconque définie sur $A$, alors pour tous les éléments $x_1, \dots, x_n, z \in A$ satisfaisant les relations $x_i \varrho z$ $(i=1, \dots, n)$ et $x_i \varrho x_j$ $(i, j=1, \dots, n)$, il s'ensuit $(\omega x_1 \dots x_n) \varrho z$.* (On désigne par $\omega x_1 \dots x_n$ l'image du système ordonné $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments $x_1, \dots, x_n \in A$ dans la fonction $\omega : A^n \to A$).

DÉMONSTRATION. Supposons la validité de (i). Soit $\omega \in \Omega$ une opération $n$-aire quelconque. Si les éléments $x_1, \dots x_n, z \in A$ satisfont les conditions $x_i \varrho z$ $(i=1, \dots, n)$ et $x_i \varrho x_j$ $(i, j=1, \dots, n)$, alors l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n, z\}$ est une préclasse de $A$. Elle est contenue dans une certaine classe de tolérance $C_{\alpha_0}$. Il en résulte de (i) que $\omega x_1 \dots x_n \in C_{\alpha_0}$. En tenant comte du fait que $\omega x_1 \dots x_n$ et $z$ sont des éléments de la classe de tolérance $C_{\alpha_0}$, il s'ensuit que $(\omega x_1 \dots x_n) \varrho z$. Donc (i)$\Rightarrow$(ii).

Supposons maintenant la validité de (ii). Soient $C_\alpha$ une classe de tolérance quelconque, $\omega \in \Omega$ une opération $n$-aire quelconque et $x_1, \dots, x_n$ des éléments arbitrairement choisis de $C_\alpha$. Puisque les éléments de $C_\alpha$ sont tolérants deux à deux, il s'ensuit que $x_i \varrho x_j$ $(i, j=1, \dots, n)$ et $x_i \varrho z$ $(i=1, \dots, n)$ pour tous les éléments $z \in C_\alpha$. Il résulte en vertu de (ii) que $(\omega x_1 \dots x_n) \varrho z$ $(\forall z \in C_\alpha)$. Donc $C_\alpha \cup \{\omega x_1 \dots x_n\}$ est une préclasse. En tenant compte du fait que $C_\alpha$ est une préclasse maximale, il s'ensuit que $C_\alpha \cup \{\omega x_1 \dots x_n\} = C_\alpha$. Il en résulte que $\omega x_1 \dots x_n \in C_\alpha$. Donc (ii)$\Rightarrow$(i). ∎

Dans le cas particulier d'un groupe, on a:

**Théorème 2.** *Soit $(A, \cdot)$ un groupe et soit $\varrho$ une tolérance définie sur $A$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Toutes les classes de tolérance de $A$ sont des sous-groupes de $A$;*

(ii) $x\varrho z, y\varrho z, x\varrho y \Rightarrow xy\varrho z (x, y, z \in A)$ *et* $x\varrho z \Rightarrow x^{-1}\varrho z (x, y \in A)$;

(iii) $x\varrho z, y\varrho z, x\varrho y \Rightarrow xy^{-1}\varrho z (x, y, z \in A)$.

DÉMONSTRATION. Les conditions (ii) du théorème 1 écrites pour l'opération binaire «$\cdot$» et pour l'opération unaire «$^{-1}$», définies dans le groupe considéré, sont mêmes les conditions (ii) de ce théorème. Il s'ensuit conformément au théorème 1 que (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Démontrons encore l'équivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii). Supposons la vadité de (ii) et soient $x\varrho z$, $y\varrho z$, $x\varrho y$ $(x, y, z \in A)$. En tenant compte de la propriété de symétrie de $\varrho$ et de la condition $(\mathrm{ii})_2$, il s'ensuit que $x\varrho y \Rightarrow y\varrho x \Rightarrow y^{-1}\varrho x \Rightarrow x\varrho y^{-1}$. Il en résulte conformément aux $(\mathrm{ii})_2$ et $(\mathrm{ii})_1$ que $x\varrho z, y\varrho z, x\varrho y \Rightarrow x\varrho z, y^{-1}\varrho z, x\varrho y^{-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow xy^{-1}\varrho z$. Donc (ii)$\Rightarrow$(iii). Supposons maintenant la validité de (iii). Puisque $\varrho$ est une relation refléxive, nous avons $x\varrho x$ $(\forall x \in A)$. Il s'ensuit en vertu de (iii) que $x\varrho x, x\varrho x, x\varrho x \Rightarrow xx^{-1}\varrho x \Rightarrow e\varrho x$ $(\forall x \in A)$, où $e$ désigne l'élément unité du groupe $(A, \cdot)$. Soit $x\varrho z$ $(x, z \in A)$. Alors on peut écrire — en tenant compte de la propriété préalablement déduite — que $e\varrho z$, $x\varrho z$, $e\varrho x$. Il s'ensuit conformément à (iii) que $x^{-1}\varrho z$. Donc (iii)$\Rightarrow(\mathrm{ii})_2$. Soit $x\varrho z$, $y\varrho z$, $x\varrho y$ $(x, y, z \in A)$. Il résulte en vertu de $(\mathrm{ii})_2$ et de la propriété de symétrie de $\varrho$ que $y\varrho z \Rightarrow y^{-1}\varrho z$ et $x\varrho y \Rightarrow y\varrho x \Rightarrow y^{-1}\varrho x \Rightarrow x\varrho y^{-1}$. Nous avons par conséquence l'implication $x\varrho z, y\varrho z, x\varrho y \Rightarrow x\varrho z, y^{-1}\varrho z, x\varrho y^{-1}$. Il en résulte conformément à (iii) que $xy\varrho z$. Donc (iii)$\Rightarrow(\mathrm{ii})_1$. ∎

*Remarques.* Il en résulte en vertu de la démonstration du théorème 2 la validité de l'affirmation suivante: *si la condition* (iii) *est satisfaite, alors tous les éléments du groupe sont tolérants avec l'élément unité du groupe.* Donc si on suppose encore la transitivité de la relation $\varrho$, il s'ensuit qu'en ce cas les éléments du groupe sont tolérants deux à deux. Ainsi on peut formuler aussi l'observation suivant: *si* $(A, \cdot)$ *est un groupe et la relation d'équivalence définie sur A satisfait l'une des conditions du théroème 2, alors* $\varrho$ *est la relation universelle (sur A).*

Retournons au cas général. Soit donc $(A, \Omega)$ une algèbre universelle et soit $\varrho$ une tolérance sur $A$. Si les conditions (ii) du théorème 1 sont satisfaites, alors toutes les classes de tolérance de $A$ sont des sous-algèbres de $(A, \Omega)$, notannement elles sont les sous-algèbres maximaux de $(A, \Omega)$ par rapport à la relation $\varrho$, c'est-à-dire par rapport à la propriété qui exprime la relation $\varrho$. En tenant compte du fait que l'intersection d'une famille quelconque de sous-algèbres de $(A, \Omega)$ est une sous-algèbre de $(A, \Omega)$, il en résulte en vertu du théorème 1 et du lèmme, la validité de la proposition suivante:

**Théorème 3.** *Soit* $(A, \Omega)$ *une algèbre universelle et soit* $\varrho$ *une tolérance définie sur A. Si les conditions du théorème 1 sont satisfaites, alors le radical* Rad $\varrho$ *de la tolérance* $\varrho$ *est une sous-algèbre de* $(A, \Omega)$ *et il est l'intersection de toutes les sous-algèbres maximales de* $(A, \Omega)$ *par rapport à la propriété qui exprime la relation* $\varrho$. ∎

Ce théorème sera illustré par les exemples suivants:

1. Soit $(A, \cdot)$ un groupe et soit $x\varrho y \Leftrightarrow (xy = yx)$, ou $x, y \in A$. On voit aisément que $\varrho$ est une tolérance sur $A$ et que le radical de $\varrho$ est le centre $Z(A)$ du groupe $(A, \cdot)$. On vérifie aussi sans peine que les conditions du théorème 2 sont satisfaites. Il s'ensuit que les classes de tolérance (par rapport à cette relation) sont les sous-groupes abéliens maximaux du groupe. Il en résulte conformément au théorème 3 que *le centre du groupe* $(A, \cdot)$ *est un sous-groupe de* $(A, \cdot)$ *et il peut être représenté comme l'intersection de tous les sous-groupes abéliens maximaux de* $(A, \cdot)$.

2. Désignons par $\mathscr{L}(A)$ l'ensemble de tous les sous-groupes d'un groupe $(A, \cdot)$ et soit $X \varrho Y \Leftrightarrow (XY \in \mathscr{L}(A))$, où $XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$ est le produit des sous-groupes $X$ et $Y$ de $(A, \cdot)$. Il est bien connu, que la condition $XY \in \mathscr{L}(A)$ est équivalente avec chacune des conditions suivantes: (1) $X \vee Y = XY$, où $X \vee Y$ représente le sous-groupe de $(A, \cdot)$ engendré par $X$ et $Y$; (2) $XY = YX$, c'est-à-dire les sous-groupes de $(A, \cdot)$ sont permutables. On voit aisément que $\varrho$ est une tolérance sur $\mathscr{L}(A)$. Le radical Rad $\varrho$ de $\varrho$ est formé de tous les sous-groupes de $(A, \cdot)$ qui sont permutables avec tous les sous-groupes de $(A, \cdot)$, c'est-à-dire Rad $\varrho$ est l'ensemble de tous les sous-groupes quasi-normaux (dans le sens de O.ORE) de $(A, \cdot)$. La condition (ii) du théorème 1 a dans le cas du demi-treillis $(\mathscr{L}(A), \vee)$ la signification suivante: $X \varrho Z,\ Y \varrho Z,\ X \varrho Y \Rightarrow (X \vee Y) \varrho Z$. Cette condition est satisfaite. En effet: $X \varrho Z,\ Y \varrho Z,\ X \varrho Y \Leftrightarrow (XZ = ZX,\ YZ = ZY,\ XY = YX)$, d'où il résulte successivement: $(XY)Z = Z(XY)$, $(X \vee Y)Z = Z(X \vee Y)$, $(X \vee Y) \varrho Z$. Donc les classes de tolérance sont les sous-demi-treillis de $(\mathscr{L}(A), \vee)$, qui sont maximaux par rapport à la propriété de permutabilité de leurs éléments. Il s'ensuit conformément au théorème 3 que *l'ensemble de tous les sous-groupes quasi-normaux d'un groupe* $(A, \cdot)$ *forme un sous-demi-treillis du demi-treillis* $(\mathscr{L}(A), \vee)$ *et il est l'intersection de tous les sous-demi-treillis de* $(\mathscr{L}(A), \vee)$, *qui sont maximaux par rapport à la propriété de permutabilité* (*en* $(A, \cdot)$) *de leurs éléments.*

## Bibliographie


[1] M. A. Arbib, Automata Theory and Control Theory — A. Rapprochement, *Automatica* **3** (1966), 161—189.

[2] M. A. Arbib, Tolerance Automata, *Kybernetika* **3** (1967), 223—233.

[3] I. Chajda—B. Zelinka, Tolerance Relation on Lattices, *Časopis pro pěstováni matematiky*, **99** (1974), *no.* 4, 394—399.

[4] S. M. Jakubovič, Théorie axiomatique de la symilitude (en langue russe), *Jurn. „Naučno-tehniceskaja Informacia"*, 1968, *no.* 10.

[5] L. Kalmár, Signification, synonimie, traduction (en langue russe), *Symposion „Masperevod-67" Budapest*, 1967.

[6] Ju. A. Sreider, Modèle mathématique de la théorie de classification, *Jurn. „Naučno-tehniceskaja Informacia"*, 1968, *no. 10.*

[7] Ju. A. Sreider, Ègalité, symilitude, ordre (en langue russe), *Moscou,* 1971 (v. aussi l'édition partiellement revisée et controllée en langue hongroise, *Budapest,* 1975).

[8] E. C. Zeeman, The Topology of the Brain and Visual Perception. In: *The Topology of 3-Manifolds,* Ed. by M. K. Fort, 240—256.

[9] B. Zelinka, Tolerance Graphs, *Comment. Math. Univ. Carol.* **9** (1968), 121—131.

[10] B. Zelinka, Tolerance in algebraic Structures, *Czech. Math. Journal* **20** (95), (1970) 179—183.


*(Reçu le 23 octobre 1975.)*