Über die Einführung der komplexen Zahlen mittels Funktionalgleichungen*

Von E. VINCZE (Miskolc)

Dem Andenken von Professor Andor Kertész gewidmet

1. Es sei R die Menge der reellen Zahlen. Weiter bezeichne R^2 die Menge der reellen (geordneten) Zahlenpaare (x_1, x_2), (y_1, y_2), ...; $x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots \in R$. Wir definieren in R^2 die Gleichheit und die Addition folgendermaßen:

$$\text{(I)} \qquad (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \quad \textit{und} \quad x_2 = y_2;$$

$$\text{(II)} \qquad (x_1 + y_1, x_2 + y_2) := (x_1, x_2) + (y_1, y_2).$$

Es ist offenbar, daß die Menge R^2 bezüglich der Addition eine stetige *Abelsche* Gruppe bildet. Hier und auch im späteren nennen wir *eine Operation* $R^2 \ni (f_1, f_2) := := (x_1, x_2) * (y_1, y_2)$ *in* R^2 *stetig, wenn die Komponenten* f_1 *und* f_2 *von* x_1, x_2, y_1, y_2 *stetig abhängen.* Es ist ersichtlich, daß die Menge der Zahlenpaare vom Typus $(x, 0)$ eineindeutig der Menge R der reellen Zahlen entspricht: $R \ni x \Leftrightarrow (x, 0) \in R^2$.

Unser Ziel ist kurz gesprochen um eine zweite Operation in R^2 zu definieren, — nennen wir diese eine Multiplikation, — mit der die Struktur R^2 der zweien Operationen einen über die reellen Zahlen bewerteten Körper bildet und sie enthält auch den Körper der reellen Zahlen als eine echte Teilmenge.

Mit ähnlichem Problem befaßte sich meines Wissens als erster F. SCHUR [5]. Das Problem ist dort unter der Voraussetzung gelöst, daß Summe und Produkt der Zahlenpaare *analytische* Funktionen sind. Später hat L. BIEBERBACH [2] die folgende und später noch genauer formulierte Frage untersucht: „*Wie muß man Summe und Produkt zweier Zahlenpaare als Funktionen ihrer Koordinaten erklären, wenn für diese Funktionen Funktionalgleichungen bestehen sollen, welche die Axiome der Arithmetik zum Ausdruck bringen*"? Die Antwort von L. Bieberbach war der folgende Satz:

1) *Sei* $K(+, \cdot)$ *ein Körper, der aus der Menge der Zahlenpaare* (x_1, x_2) *besteht, wo* x_1 *und* x_2 *gewöhnliche reelle Zahlen bedeuten.*

2) *Die Menge der Paare* $(x_1, 0)$ *bildet einen Teilkörper.*

3) *In der Summendefinition*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (\sigma_1, \sigma_2)$$

sind $\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, y_1, y_2)$ $(k = 1, 2)$ *stetige Funktionen von* x_1, x_2, y_1, y_2.

---

* Verf. hat diese Arbeit mit demselben Titel auch am „Kolloquium über Funktionalgleichungen (Debrecen, 4—8. September 1973.)" vorgetragen.

4) *In der Produktdefinition*

$$(x_1, 0)\cdot(y_1, y_2) = (\pi_1, \pi_2)$$

sind $\pi_k = \pi_k(x_1, y_1, y_2)$ $(k=1, 2)$ *stetige Funktionen von* x_1 *für jedes Paar* (y_1, y_2).

Dann sind je drei Elemente aus K linear abhängig, folglich ist K isomorph zum Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen.

L. Bieberbach hat beim Beweis des obigen Satzes auch bemerkt, daß unter der Voraussetzung der *Stetigkeit* der beiden genannten Funktionen das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen im wesentlichen das einzige ist. G. Hoheisel [4] hat dieses Ergebnis unter einfacheren Bedingungen gefunden, und zwar sein Satz lautet folgendermaßen:

5) *Sei* $K(+, \cdot)$ *ein Schiefkörper, der aus der Menge der Paare* (x_1, x_2) *besteht, wo* x_1 *und* x_2 *die gewöhnlichen reellen Zahlen bedeuten.*

6) *Seien* $(0, 0)$ *und* $(1, 0)$ *das Nullelement bzw. das Einselement in dem Schiefkörper K.*

7) *Sind die Funktionen* $\pi_1(x_1, y_1)$, $\pi_2(x_1, y_1)$, $\pi_3(x)$, $\pi_4(x)$, $\pi_5(y)$, $\pi_6(y)$, *in den Gleichungen*

$$(x_1, 0)\cdot(y_1, 0) = \big(\pi_1(x_1, y_1),\ \pi_2(x_1, y_1)\big).$$

$$(x, 0)\cdot(0, 1) = \big(\pi_3(x), \pi_4(x)\big),$$

$$(0, 1)\cdot(y, 0) = \big(\pi_5(y), \pi_6(y)\big)$$

(mindestens in einem Punkt) stetig.

8) *Seien die Funktionen* $\sigma_k = \sigma_k(a_1, a_2, x_1, x_2)$ $(k=1, 2)$ *in der Subtraktion*

$$(a_1, a_2)-(x_1, x_2) = \big(\sigma_1(a_1, a_2, x_1, x_2),\ \sigma_2(a_1, a_2, x_1, x_2)\big)$$

ungerade, und zwar in dem folgenden Sinne:

$$\sigma_k(a_1, a_2, a_1-x_1, a_2-x_2)+\sigma_k(a_1, a_2, a_1+x_1, a_2+x_2) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Dann ist $K(+, \cdot)$ *ein Körper, welcher mit dem Körper der komplexen Zahlen isomorph ist.*

Die Bedingung 8) kommt noch auch in weiteren äquivalenten Formen vor (vgl. [4]).

Wir möchten betonen, daß sowie L. Bieberbach als auch G. Hoheisel den komplexen Zahlkörper bis zu einer Isomorphie bestimmt haben. Wir wählen einen von den vorigen verschiedenen Weg, und zwar wir werden durch konstruktive Weise die sämtlichen verschiedenen Körper der reellen Zahlenpaare auffinden und wir untersuchen, unter welchen Bedingungen vereinfachen sie sich auf den gewöhnlichen komplexen Zahlenkörper?

Unserer Meinung nach sind die folgenden Untersuchungen ganz elementar und wir brauchen dazu aus der Theorie der Funktionalgleichungen erst die stetigen Lösungen der heute schon klassichen Cauchyschen Grundgleichung $\varphi(x+y)= =\varphi(x)+\varphi(y)$ (vgl. [1], [3]).

2. Hat die Multiplikation in R^2 die Form

$$\text{(III)} \qquad (x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) := \big(f_1(x_1, x_2, y_1, y_2),\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)\big),$$

$$[x_1, x_2, y_1, y_2 \in R;\ f_k\colon\ R^4 \to R;\ k = 1, 2]$$

dann gilt das

Lemma 1. *Wenn die Multiplikation* (III) *stetig und bezüglich der Addition* (II) *linksdistributiv ist, d. h. gilt*

$$(1) \qquad (x_1, x_2)\circ[(y_1, y_2)+(z_1, z_2)] = (x_1, x_2)\circ(y_1, y_2)+(x_1, x_2)\circ(z_1, z_2)$$
$$[\forall (x_1, x_2),\ (y_1, y_2),\ (z_1, z_2)\in R^2],$$

so hat sie notwendigerweise die Form

$$(2) \quad (x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) = \big(A_{11}(x_1, x_2)y_1+A_{12}(x_1, x_2)y_2,\ A_{21}(x_1, x_2)y_1+A_{22}(x_1, x_2)y_2\big),$$

wobei $A_{ki}(x_1, x_2)$ $(k, i=1, 2)$ *beliebige reelle stetige Funktionen sind.*

Beweis. Aus den Gleichungen (1) und (III) ergibt sich das Funktionalgleichungssystem

$$(3) \quad f_k(x_1, x_2, y_1+z_1, y_2+z_2) = f_k(x_1, x_2, y_1, y_2)+f_k(x_1, x_2, z_1, z_2) \quad (k = 1, 2)$$

Sei $y_2=z_1=0$, dann gilt

$$(4) \qquad f_k(x_1, x_2, y_1, z_2) = f_k(x_1, x_2, y_1, 0)+f_k(x_1, x_2, 0, z_2)$$

Weiter seien $y_2=z_2=0$, bzw. $y_1=z_1=0$ in (3), dann erhalten wir die *Cauchyschen* Funktionalgleichungen

$$f_k(x_1, x_2, y_1+z_1, 0) = f_k(x_1, x_2, y_1, 0)+f_k(x_1, x_2, z_1, 0),$$

bzw.

$$f_k(x_1, x_2, 0, y_2+z_2) = f_k(x_1, x_2, 0, y_2)+f_k(x_1, x_2, 0, z_2).$$

Wegen der Stetigkeit der Operation $(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2)$ sind die Lösungen der obigen Cauchyschen Gleichungen die Funktionen

$$f_k(x_1, x_2, y_1, 0) = A_{k1}(x_1, x_2)y_1,$$
$$f_k(x_1, x_2, 0, y_2) = A_{k2}(x_1, x_2)y_2,$$

wobei $A_{ki}(x_1, x_2)$ beliebige reelle stetige (und für jedes Zahlenpaar definierte) Funktionen bezeichnen. Somit erhalten wir auf Grunde (4) tatsächlich das Lösungspaar

$$f_k(x_1, x_2, y_1, y_2) = A_{k1}(x_1, x_2)y_1+A_{k2}(x_1, x_2)y_2 \quad (k = 1, 2).$$

Man kann leicht verifizieren, daß die mit den obigen Komponenten definierte Multiplikation bezüglich der Addition tatsächlich linksdistributiv ist. — Q. e. d.

Lemma 2. *Wenn die Multiplikation* (2) *kommutativ ist, d. h.*

$$(5) \qquad (x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) = (y_1, y_2)\circ(x_1, x_2)$$

gilt, dann hat sie die Form

$$(6) \quad \begin{aligned} &(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) = \\ &= (a_1x_1y_1+b_1x_1y_2+b_1x_2y_1+c_1x_2y_2,\ a_2x_1y_1+b_2x_1y_2+b_2x_2y_1+c_2x_2y_2) \end{aligned}$$

wobei a_k, b_k, c_k $(k=1, 2)$ *beliebige reelle Konstanten sind.*

BEWEIS. Aus den Gleichungen (2) und (5) ergibt sich

$$\begin{aligned} f_k(x_1, x_2, y_1, y_2) &= A_{k1}(x_1, x_2)y_1 + A_{k2}(x_1, x_2)y_2 = \\ A_{k1}(y_1, y_2)x_1 + A_{k2}(y_1, y_2)x_2 &= f_k(y_1, y_2, x_1, x_2) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{7}$$

Es seien hier $y_2=0$ und $y_1\neq 0$, bzw. $y_1=0$ und $y_2\neq 0$, dann erhaltan wir die Funktionen

$$A_{k1}(x_1, x_2) = \frac{A_{k1}(y_1, 0)}{y_1} x_1 + \frac{A_{k2}(y_1, 0)}{y_1} x_2 = a_k x_1 + b_k x_2,$$

bzw.

$$A_{k2}(x_1, x_2) = \frac{A_{k1}(0, y_2)}{y_2} x_1 + \frac{A_{k2}(0, y_2)}{y_2} x_2 = d_k x_1 + c_k x_2.$$

Offenbar ist, daß die Quotienten $A_{ki}(y_1, 0)/y_1$ und $A_{ki}(0, y_2)/y_2$ wegen der linearen Abhängigkeit von x_1 und x_2 notwendigerweise Konstanten sind. Damit haben wir aus (7) die Gleichung

$$(a_k x_1 + b_k x_2)y_1 + (d_k x_1 + c_k x_2)y_2 = (a_k y_1 + b_k y_2)x_1 + (d_k y_1 + c_k y_2)x_2.$$

Daraus folgt

$$(b_k - d_k)(x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0,$$

d. h. $d_k = b_k$ $(k=1, 2)$ ist, also haben wir nach (2) tatsächlich die Lösung (6) erhalten. Q. e. d.

Lemma 3. *Wenn das Einselement der Multiplikation (6)* $(1, 0)$ *ist, dann gilt*

$$(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) = (x_1 y_1 + c_1 x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + c_2 x_2 y_2) \tag{8}$$

wobei c_1, c_2 *beliebige relle Konstanten sind.*

BEWEIS. Sei $(1, 0)$ das Einselement, dann folgt aus (6)

$$(y_1, y_2) = (1, 0)\circ(y_1, y_2) = (a_1 y_1 + b_1 y_2,\ a_2 y_1 + b_2 y_2),$$

d. h. die Konstanten müssen auch dem Gleichungssystem

$$a_1 y_1 + b_1 y_2 = y_1,$$

$$a_2 y_1 + b_2 y_2 = y_2$$

für alle y_1, y_2 genügen. Daraus folgen $a_1 = b_2 = 1$ und $a_2 = b_1 = 0$, dabei aber sind c_1 und c_2 beliebige Konstanten. Q. e. d.

Eine überraschende Folgerung des Wesens von Einselement $(1, 0)$ ist folgendes:

Korollar 1. *Die Multiplikation (8) ist assoziativ.*

Diese Tatsache kann man mit ganz einfachem Rechnen verifizieren.

Korollar 2. *Die Menge R^2 bildet mit der Addition (II) und der Multiplikation (8) einen kommutativen Ring mit Einselement.*

Diese Behauptung ist nach den Lemmas 1.—2.—3. offenbar.

Lemma 4. *Sei* $4c_1+c_2^2<0$ *in der Multiplikation (8), dann und nur dann ist diese Multiplikation invertierbar und für jedes* $(x_1, x_2)\neq(0, 0)$ *gilt*

$$(x_1, x_2)^{-1} = \left(\frac{x_1+c_2x_2}{D(x_1, x_2)}, \frac{-x_2}{D(x_1, x_2)}\right),$$

$$D(x_1, x_2) = \left(x_1+\frac{c_2}{2}x_2\right)^2-\left(c_1+\frac{c_2^2}{4}\right)x_2^2.$$

Beweis. Seien

$$(x_1, x_2)^{-1} = (\xi_1, \xi_2) \quad \text{und} \quad \xi_k = \xi_k(x_1, x_2) \quad (k = 1, 2).$$

Da auch die Gleichung

$$(x_1, x_2)\circ(x_1, x_2)^{-1} = (x_1, x_2)\circ(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$$

gültig sein muß, deswegen erhalten wir nach (8) für die Komponenten ξ_1 und ξ_2 das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} x_1\xi_1+c_1x_2\xi_2 &= 1,\\ x_2\xi_1+(x_1+c_2x_2)\xi_2 &= 0.\end{aligned}\right\} \quad [\forall(x_1, x_2)\neq(0, 0)].$$

Dieses System ist linear und inhomogen, d. h. es hat dann und nur dann ein Lösungspaar, wenn

$$0\neq D(x_1, x_2) = x_1(x_1+c_2x_2)-c_1x_2^2 = \left(x_1+\frac{c_2}{2}x_2\right)^2-\left(c_1+\frac{c_2^2}{4}\right)x_2^2$$

ist. Hierbei ist die rechte Seite dann und nur dann für jedes $(x_1, x_2)\neq(0, 0)$ vom Null verschieden, wenn $4c_1+c_2^2<0$, ist. Q. e. d.

Damit erhalten wir:

Korollar 3. *Mit der Addition*

(I) $$(x_1, x_2)+(y_1, y_2) := (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

und der Multiplikation

(III.a) $$(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) := (x_1y_1+c_1x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1+c_2x_2y_2)$$
$$(4c_1+c_2^2<0)$$

bildet die Menge R^2 *einen Körper:* $x_k, y_k, c_k\in R$ $(k=1, 2)$.

Bemerkung. Wohlbekannt ist, daß ein beliebiger Körper $K(+, \circ)$, dessen Elemente $0, 1, \alpha, \beta, \ldots\in K$ sind, über den rellen Zahlenkörper *bewertet* ist, wenn eine Bewertungsfunktion $W(\alpha): K\to R$ existiert, so daß auch die Axiomen

(9) $$W(\alpha)\geqq 0 \quad \textit{und} \quad W(\alpha) = 0\Leftrightarrow\alpha = 0,$$

(10) $$W(\alpha+\beta)\leqq W(\alpha)+W(\beta),$$

(11) $$W(\alpha\circ\beta) = W(\alpha)W(\beta) \qquad (\forall\alpha, \beta\in K)$$

erfüllt sind.

Lemma 5. *Der mit der Funktion*

$$W[(x_1, x_2)] := \sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad (W\colon R^2 \to R) \tag{12}$$

bewertete Körper $R^2(+, \circ)$ [vgl. (I) und (III.a)] *ist der Körper der komplexen Zahlen, d. h. die Multiplikationsregel ist*

$$(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{III.b}$$

Beweis. Für den Körper R^2 sind die Eigenschaften (9) und (10) mit der Bewertungsfunktion (12) trivialerweise gültig. Die Multiplikation (III.a) hat aber die Eigenschaft (11) nur dann, wenn die Gleichung

$$(x_1 y_1 + c_1 x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + c_2 x_2 y_2)^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \tag{13}$$

für jedes Elementenpaar (x_1, x_2), $(y_1, y_2)\in R^2$ erfüllt ist. Wählen wir die Veränderlichen nach der Reihe

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 1,$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = x_2 = y_2 = 1,$$

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 1,$$

dann ergeben sich die Gleichungen

$$c_1^2 + c_2^2 = 1,$$

$$c_1^2 + (1+c_2)^2 = 2,$$

$$(1+c_1)^2 + (2+c_2)^2 = 4,$$

woraus $c_1 = -1$ und $c_2 = 0$ folgen. Mit ganz einfachem Rechnen kann man sich überzeugen, daß die Gleichung (13) mit diesen Konstanten zu eine Identität hinübergeht. Q. e. d.

3. Die vorigen Ergebnisse können wir zusammengefaßt folgendermaßen formulieren:

Satz. *Seien die Gleichheit und die Addition mit den Formeln*

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \quad \textit{und} \quad x_2 = y_2, \tag{I}$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2) := (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \tag{II}$$

in R^2 *definiert und genüge die in* R^2 *erklärte Multiplikation den folgenden Eigenschaften:*

(III) *in der Multiplikation*

$$(x_1, x_2)\circ(y_1, y_2) := \big(f_1(x_1, x_2, y_1, y_2),\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)\big)$$

sind die Funktionen f_k $(k=1, 2)$ *stetig;*

(IV) *die Multiplikation (III) ist bezüglich der Addition (II) distributiv* [vgl. (1)];

(V) *die Multiplikation (III) ist kommutativ;*

(VI) *das Einselement der Multiplikation (III) ist* $(1, 0)$;

(VII) *die Multiplikation (III) ist invertierbar;*

(VIII) *der aus den Bedingungen (I)—(VII) erhaltbare Körper ist über die reellen Zahlen mit der Funktion*

$$W[(x_1, x_2)] := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \textit{bewertet};$$

dann ist die Menge R^2 zum (gewöhnlichen) komplexen Zahlenkörper äquivalent.

Bemerkung. In (III) genügt es über die Komponenten f_k $(k=1, 2)$ anzunehmen, daß sie nur *in einem Punkt stetig* sind (vgl. [1]). Weitere ähnliche Untersuchungen sind in der Arbeit [6] von Verf. befindlich.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, New York—London, 1966 (pp. 31—36); oder: *Vorlesungen über Funktionalgelichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1960 (pp. 44—47).
[2] L. Bieberbach, Zur Theorie der komplexen Zahlen, *Math. Z.* **2** (1918), 171—179.
[3] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, Vol. 1, *Analyse algébrique*, V. Paris, 1821 (OEuvres, Ser. 2, Vol. 3, pp. 98—113, Paris, 1897).
[4] G. Hoheisel, Zur Theorie der komplexen Zahlen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* **1929**, 524—531.
[5] F. Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten reellen Zahlen, *Math. Ann.* **33** (1889), 49—60.
[6] E. Vincze, Valós kétkomponensű gyűrűk és testek előállítása függvényegyenletek segítségével, *Nehézip. Műsz. Egy. Közl. Miskolc, IV. Sorozat*, **22** (1976), 39—79. *(ungarisch).*

(Eingegangen am 25. Mai 1976.)