Additiv kommutative und idempotente Halbringe mit Faktorbedingung, II

Dem Andenken von Herrn Prof. Dr. ANDOR KERTÉSZ gewidmet

Von Dörte Haftendorn (TU Clausthal)

Im ersten Teil [1] dieser Arbeit haben wir Halbringe S mit kommutativer und idempotenter Addition (AKI-Halbringe) untersucht, die bezüglich der natürlichen Halbordnung $a \leqq b \Leftrightarrow a+b=b$ der Faktorbedingung

F $\qquad$ Aus $a \leqq b$ folgt $a \in bS \cap Sb$

(F-Halbringe) genügen. Die negativen Elemente $n \in S$ ($nx \leqq x$, $xn \leqq x$ für alle $x \in S$) bilden stets einen Unterhalbring S^- von S, und nach Satz 3.6 gilt in Verschärfung von F:

$$\text{Aus} \quad a \leqq b \quad \text{folgt} \quad a \in bS^- \cap S^- b.$$

Dagegen liegen nach Prop. 4.1 positive Elemente eines F-Halbringes S stets in der Halbgruppe $C(S)$ der (multiplikativ) kürzbaren Elemente von S, und es gilt $C(S) \neq \emptyset$ genau dann, wenn S ein Einselement enthält. Solche F-Halbringe konnten in § 4 als Quotientenhalbringe $S = Q(S^-, \Sigma)$ ihrer Negativbereiche S^- mit geeigneten „Nennerhalbgruppen" $\Sigma \subseteqq C(S^-)$ vollständig gekennzeichnet werden. Dies macht es wünschenswert, jeden F-Halbring S ohne Einselement in einen F-Halbring mit Einselement einbetten zu können. In Fortsetzung der Numerierung von [1] behandeln wir diese Frage in § 5 der vorliegenden Arbeit, und zwar zunächst für AKI-Halbringe.

Dazu kennzeichnen wir zunächst alle AKI-Oberhalbringe $\mathfrak{S}$ mit Einselement $1_{\mathfrak{S}}$ eines AKI-Halbringes S, die von S und $1_{\mathfrak{S}}$ erzeugt werden, als Kongruenzhalbringe eines universellen Halbringes $\mathfrak{U}$ dieser Art (Satz 5.1). Die Anwendung auf einen F-Halbring S ohne Einselement ergibt jedoch, daß unter diesen AKI-Oberhalbringen $\mathfrak{S}$ von S nur dann ein F-Halbring auftritt, wenn $S = S^-$ gilt und damit der minimale F-Oberhalbring mit Einselement einfach durch Adjunktion eines solchen Elementes $S_1 = S \cup \{1\}$ gewonnen werden kann (Prop. 3.4, Prop. 5.4). Zu einem F-Halbring S ohne Einselement existiert aber stets genau ein minimaler AKI-Oberhalbring $\mathfrak{S}$ mit $1_{\mathfrak{S}}$, der $\mathfrak{S}^- \cap S = S^-$ erfüllt (Satz 5.3), und der Quotientenhalbring $S_1 = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ erweist sich als der (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) minimale F-Oberhalbring von S mit Einselement; dabei gilt $S_1^- \cap S = S^-$ (Satz 5.5).

Die oben zitierten Aussagen von [1] machen diesen Teil weitgehend für sich lesbar. In § 6 geben wir einige Beispiele, die sich auf beide Teile der Arbeit beziehen.

Vorbereitend stellen wir noch fest: Homomorphismen und Kongruenzen beziehen sich bei Halbringen $(S, +, \cdot)$, $(T, +, \cdot)$ stets auf die mit $+$ und $\cdot$ bezeichneten Operationen. Das homomorphe Bild φS eines Halbringes S ist isomorph zu dem Konzgruenzhalbring S/π mit der durch $\varphi^{-1}\circ\varphi$ festgelegten Kongruenz π auf S. Mit S ist $\varphi S \cong S/\pi$ wieder AKI-Halbring bzw. F-Halbring, und φ ist bezüglich der natürlichen Halbordnungen stets ordnungstreu gemäß $a \leqq b \Rightarrow \varphi a \leqq \varphi b$.

§ 5 Einbettung von AKI-Halbringen und F-Halbringen in ebensolche Oberhalbringe mit Einselement

Zur Vereinfachung der Darstellung setzen wir stets voraus, daß der *einzubettende Halbring S ein annullierendes Nullelement* 0 *besitzt*. Dies ist aus folgendem Grunde keine Einschränkung der Allgemeinheit: Wie bereits in § 3 bemerkt, kann man zu jedem AKI- oder F-Halbring S' ein annullierendes Nullelement 0 adjungieren, und $S = S' \cup \{0\}$ ist dann nullteilerfrei.[1]) Bei der Anwendung der Aussagen dieses Paragraphen auf S werden aber alle auftretenden Oberhalbringe S^* von S das gleiche Nullelement 0 (also das gleiche kleinste Element) haben und mit S nullteilerfrei sein; also ist auch $S^* \setminus \{0\}$ ein Halbring und der analoge Oberhalbring zu $S' = S \setminus \{0\}$.

Zur Festlegung der Bezeichnungen nehmen wir an, daß zu S ein AKI-Oberhalbring T existiert, der ein Einselement 1_T und das gleiche Nullelement 0 besitzt wie S.[2]) Dann ist $E = \{0, 1_T\}$ Unterhalbring von T und isomorph zu dem als AKI-Halbring aufgefaßten Verband mit 2 Elementen. Wir bezeichnen mit $[S, 1_T]$ den *von S und 1_T erzeugten Unterhalbring* von T. Es gilt dann

$$S \subseteqq [S, 1_T] = \{g + a \mid g \in E,\ a \in S\} \subseteqq T$$

und für alle $g+a, h+b \in [S, 1_T]$

$$\begin{aligned} (g+a)+(h+b) &= (g+h)+(a+b) \\ (g+a)\cdot(h+b) &= gh+(gb+ha+ab). \end{aligned} \tag{5a}$$

Jeden AKI-Halbring T, der die obigen Voraussetzungen und $[S, 1_T] = T$ erfüllt, nennen wir in Anlehnung an Weinert [2] einen *Einselementoberhalbring* von S. Natürlich ist jeder *minimale AKI-Oberhalbring von S mit Einselement*, d. h. ein Halbring, der keinen echten Unterhalbring mit diesen Eigenschaften besitzt, ein Einselementoberhalbring von S; die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Satz 5.1. *Zu jedem AKI-Halbring mit annullierendem Nullelement existiert (bis auf Isomorphie genau) ein universeller Einselementoberhalbring $\mathfrak{S}$ von S, d. h. ein solcher, der auf jeden Einselementoberhalbring $\mathfrak{S}$ von S homomorph (und identisch bezüglich S) abgebildet werden kann. Mit anderen Worten: Die Kongruenzhalbringe $\mathfrak{U}/\pi$ mit*

$$a \equiv b(\pi) \Leftrightarrow a = b \quad \textit{für alle} \quad a, b \in S \tag{5b}$$

---

[1]) Auch in Halbringen mit annullierendem Nullelement 0 ist die Nullteilerfreiheit nicht mehr hinreichend für die Kürzbarkeit der von 0 verschiedenen Elemente.

[2]) Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß S selbst kein Einselement besitzt.

sind bis auf Isomorphie sämtliche Einselementoberhalbringe von S. Dabei besteht $\mathfrak{U}$ *aus den paarweise verschiedenen Elementen*

$$g+a \quad \text{mit} \quad g \in \{0, 1_{\mathfrak{U}}\}, \quad a \in S,$$

mit denen ebenfalls gemäß (5a) *zu rechnen ist; insbesondere ist* $\mathfrak{U}$ *mit* S *kommutativ.*

Beweis. Der aus zwei Elementen bestehende Verband $E = \{0, 1\}$ wirkt gemäß

$$ga = \begin{cases} a & \text{für} \quad g = 1 \\ 0 & \text{für} \quad g = 0 \end{cases}$$

auf S als Linksoperatorbereich, wobei für alle $a, b \in S$, $g, h \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} &g(a+b) = ga+gb \quad && g(ab) = (ga)b = a(gb) \\ &(g+h)a = ga+ha \quad && (gh)a = g(ha) \qquad (5c) \\ &g0 = 0 && 1a = a \end{aligned}$$

Die Menge $E \times S = \{(g, a) | g \in E, a \in S\}$ wird damit durch

$$(g, a)+(h, b) = (g+h, a+b)$$
$$(g, a) \cdot (h, b) = (gh, gb+ha+ab)$$

zu einem AKI-Halbring mit $(0, 0)$ als annullierendem Nullelement und $(1, 0)$ als Einselement. Soweit nicht unmittelbar ersichtlich ergibt sich dies im direkten Ansatz mit Hilfe von (5c). $E \times S$ wird durch die Identifizierung von $(0, a)$ mit a zu einem Oberhalbring $\mathfrak{U}$ von S, der offenbar alle Behauptungen unseres Satzes erfüllt, qed.

Von unserer Problemstellung her gesehen, sucht man natürlich Einselementoberhalbringe von S, die minimal sind und deren Eigenschaften denen von S möglichts weitgehend entsprechen. Beides trifft für den universellen Einselementoberhalbring $\mathfrak{U}$ von S im allgemeinen nicht zu. So prüft man einmal leicht nach, daß für jedes $c \in S^-$ die Untermenge

$$\mathfrak{U}_c = \{a, 1_{\mathfrak{U}}+b \,|\, a \in S, \; b \in S \text{ mit } b \geqq c\} \subseteqq \mathfrak{U}$$

einen Einselementoberhalbring von S mit $1_{\mathfrak{U}}+c$ als Einselement bildet. Zum anderen aber enthält $\mathfrak{U}$ zum Beispiel nur 0 und $1 = 1_{\mathfrak{U}}$ als negative Elemente, wie aus $g+a \leqq 1 \Leftrightarrow 1+g+a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ folgt. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, nach Einselementoberhalbringen zu fragen, in denen die negativen Elemente von S negativ bleiben:

Hilfssatz 5.2. *Für einen Einselementoberhalbring* $\mathfrak{S} = \mathfrak{U}/\pi$ *sind folgende Aussagen gleichwertig:*

a) $\mathfrak{S}^- \supseteqq S^-$

b) $\mathfrak{S}^- \cap S = S^-$

c) $\mathfrak{S}^- = S^- \cup \{1_\pi\}$, *wobei* 1_π *eine Klasse modulo* π *bezeichnet*

d) $1+a \equiv 1\,(\pi) \Leftrightarrow a \in S^-$.

Beweis. $\mathfrak{S}^-$ besteht aus den Klassen modulo π, die durch Elemente $g+a$ mit $1+g+a\equiv 1+a\equiv 1(\pi)$ repräsentiert werden, woraus sich d)$\Rightarrow$c) ergibt. Die Schlüsse c)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$a)$\Rightarrow$d) sind ersichtlich. qed.

Satz 5.3. *Es sei* $\mathfrak{U}$ *der universelle Einselementoberhalbring eines* AKI-*Halbringes* S. Durch

$$\text{(5e)}\qquad g+a \equiv h+b \Leftrightarrow \begin{cases} g=h=0 & \textit{und} \quad a=b \\ \textit{oder} & \\ g=h=1 & \textit{und} \quad \begin{Bmatrix} x+ax = x+bx \\ x+xa = x+xb \end{Bmatrix} \quad \textit{für alle} \quad x\in S \end{cases}$$

wird auf $\mathfrak{U}$ *eine Kongruenz* π *mit* (5b) *definiert. Der Einselementoberhalbring* $\mathfrak{S}=\mathfrak{U}/\pi$ *von* S *erfüllt* $\mathfrak{S}^-\supseteqq S^-$, *hat das gleiche Nullelement* 0 *wie* S *und ist mit* S *nullteilerfrei bzw. kommutativ.*

Besitzt S *kein Einselement, so ist* $\mathfrak{S}$ *minimaler Oberhalbring von* S *mit Einselement. Für einen F-Halbring* S *ohne Einselement ist* $\mathfrak{S}$ *bis auf Isomorphie der einzige Einselementoberhalbring von* S, *der* $\mathfrak{S}^-\supseteqq S^-$ *erfüllt.*

Beweis. Ersichtlich definiert (5e) eine Äquivalenz auf $\mathfrak{U}$, die $a\neq b\Rightarrow a\not\equiv b$, also (5b) erfüllt. Die Verträglickeit mit den Operationen braucht nur für $1+a\equiv 1+b$ nachgewiesen zu werden. Die Addition von $g+c$ führt zu $1+a+c\equiv 1+b+c$ wegen $x+ax=x+bx\Rightarrow x+ax+cx=x+bx+cx$ (und entsprechend für die andere Gleichung). Die Multiplikation mit $g+c$ kann damit für g und c einzeln erfolgen; erstere ist trivial, während die Multiplikation mit c von rechts bzw. links gerade auf die für alle $c=x\in S$ erfüllten Gleichungen $x+ax=x+bx$, $x+xa=x+xb$ führt.

Für $\mathfrak{S}^-\supseteqq S^-$ zeigen wir die nach Hilfssatz 5.2 gleichwertigen Aussagen d): $1+a\equiv 1+0\Leftrightarrow x+ax=x$ und $x+xa=x$ für alle $x\in S\Leftrightarrow a\in S^-$. Ersichtlich ist $0\in S$ auch Nullelement von $\mathfrak{S}$, und aus $(g+a)(h+b)\equiv 0$ folgt $gh+gb+ha+ab\equiv 0$, also $b+ab=0$, $a+ab=0$ oder $ab=0$, was nur für $ab=0$ möglich ist.

Zum Beweis der Minimalitätsbehauptung sei T ein Halbring mit Einselement 1_T, der $\mathfrak{S}\supseteqq T\supseteqq S$ erfüllt. Aus $1_T\equiv g+e\in T\subseteqq\mathfrak{S}$ folgt $1_T\equiv 1+e$ wegen $1_T\notin S$; damit gilt für alle $x\in S$ aber $x=x+xe$ und $x=x+ex$, d. h. $e\in S^-$ und daher $1_T\equiv 1+e\equiv 1$, woraus $\mathfrak{S}=T$ folgt. Für die letzte Behauptung sei $\mathfrak{S}=\mathfrak{U}/\pi'$ Einselementoberhalbring eines F-Halbringes ohne Einselement mit $\mathfrak{S}^-\supseteqq S^-$; wir wollen $\pi'=\pi$ zeigen und betrachten

$$\text{(5f)}\qquad g+a \equiv h+b\,(\pi').$$

Der Fall $g=h=0$ ist klar. Aus $g=1$ folgt aber $h=1$, da sonst $x+ax=bx$ und $x+xa=xb$ für alle $x\in S$, also $b\in S^+$ gelten würde, woraus nach Prop. 4.1 die Existenz eines Einselementes in S folgte. Damit bleibt im Hinblick auf (5e) für $\pi'=\pi$ noch

$$1+a \equiv 1+b\,(\pi') \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+ax = x+bx \\ x+xa = x+xb \end{Bmatrix} \text{ für alle } x\in S$$

nachzuweisen, wobei $\Rightarrow$ klar ist. Ist umgekehrt für $a, b\in S$ die rechte Seite erfüllt und wählen wir gemäß Satz 3.6 $x=e\in S^-$ mit $(a+b)e=a+b$, so folgt $e+a=$ $=e+b$; nach Hilfssatz 5.2 gilt aber $1+e\equiv e(\pi')$, was zusammen $1+a\equiv 1+b(\pi')$ ergibt, qed.

Die Einbettung eines F-Halbringes S ohne Einselement in einen F-Oberhalbring mit Einselement ist mit den bisherigen Überlegungen jedoch nur für negative F-Halbringe $S=S^-$ möglich, wo ohnehin gemäß Prop. 3.4 einfach durch Adjunktion eines Einselementes ein solcher Oberhalbring $S\cup\{1\}$ entsteht. Es gilt nämlich:

Proposition 5.4. Ein beliebiger Einselementoberhalbring $T\neq S$ eines AKI-Halbringes S ist genau dann F-Halbring, wenn $S=S^-$ und $T\cong\mathfrak{U}/\pi=S\cup\{1_\pi\}$ mit der durch (5 e) *definierten Kongruenz π gilt.*

Beweis. Sei T ein F-Halbring. Dann ist $1_T+a\geqq 1_T$ in T gemäß $1_T=(g+x)(1_T+a)=g+ga+x+xa$ invertierbar. Für $g=0$ folgt daraus $1_T\in S$ im Widerspruch zu $T\neq S$, für $g=1_T$ ergibt sich $1_T+a=1_T$, also $T=S\cup\{1_T\}$, $S=S^-$ und $T^-\supseteqq S^-$. $T\cong\mathfrak{U}/\pi$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 5.3, die Umkehrung aus Prop. 3.4. qed.

Allgemein erreicht man die eben angesprochene Einbettung jedoch auf folgende Weise:

Satz 5.5. *Es sei S ein F-Halbring und $\mathfrak{S}=\mathfrak{U}/\pi$ der in Satz 5.3 betrachtete Einselementoberhalbring von S. Dann existiert der Quotientenhalbring $S_1=Q(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^+)$ und ist F-Oberhalbring von S mit Einselement, und es gilt*

$$S^-\subseteqq\mathfrak{S}^-=S^-\cup\{1_\mathfrak{S}\}\subseteqq S_1^-.$$

Dabei ist S_1 minimaler F-Oberhalbring von $\mathfrak{S}$ und, falls S selbst kein Einselement hat, minimaler F-Oberhalbring von S mit Einselement. Durch jede dieser Eigenschaften ist S_1 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Zum Nachweis der Kürzbarkeit der durch $1+a$ repräsentierten positiven Elemente von $\mathfrak{S}$ sei $(1+a)(g+u)\equiv(1+a)(h+v)(\pi)$, was zunächst $g=h$ zu Folge hat. Im Falle $g=h=0$ ergibt sich weiter $u+au=v+av$ und damit nach Prop. 3.5 (2) $u=v$.[3]) Im Falle $g=h=1$ dagegen folgt $x+(u+a+au)x=x+(v+a+av)x$ und mithin $a(x+ux)+(x+ux)=a(x+vx)+(x+vx)$ für alle $x\in S$. Wiederum nach Prop. 3.5 (2) gilt dann $x+ux=x+vx$ und analog $x+xu=x+xv$ für alle $x\in S$. Damit gilt $g+u\equiv h+v(\pi)$, was zusammen mit der dualen Aussage $\mathfrak{S}^+\subseteqq C(\mathfrak{S})$ zeigt. Für die Ore-Asano-Bedingungen betrachten wir $q_R(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^+)$ und weisen zu $g+a\in\mathfrak{S}$, $1+b\in\mathfrak{S}^+$ die Existenz von $1+c\in\mathfrak{S}^+$, $h+d\in\mathfrak{S}$ mit $(g+a)(1+c)\equiv(1+b)(h+d)(\pi)$ nach. Dazu wählen wir $h=g$, $c=b$ und $d\in S$ mit $a+ab=d+bd$, was nach Prop. 3.5 (3) möglich ist. Die Addition dieser Gleichung zu $g+gc=h+hb$ ergibt sogar

$$g+gc+a+ac=h+hb+d+bd$$

an Stelle der benötigen Kongruenz modulo π.

Wir betrachten nun $\mathfrak{S}$ als gegebenen Einselementoberhalbring von S und schreiben „$=$" für die Kongruenz modulo π und $1_\mathfrak{S}=1$. Wir zeigen, daß $S_1=Q(\mathfrak{S},\mathfrak{S}^+)$ F-Halbring ist. Mit geeignetem $\gamma\in S^+$ gilt $(g+a)\gamma^{-1}\leqq(h+b)\gamma^{-1}\Leftrightarrow g+a\leqq h+b$; für $h=1$ ist $1+b\in\mathfrak{S}^+$ invertierbar und $g+a=(g+a)(h+b)^{-1}(h+b)$ gesichert, während $h=0$ auch $g=0$ nach sich zieht und zu $a\leqq b$ in dem F-Halbring

[3]) Gemäß Prop. 3.5 folgt in F-Halbringen S aus $ax+x=ay+y$ stets $x=y$ und für alle $a,b\in S$ gibt es ein $s\in S$ mit $b=as+s$.

S ein y mit $a=yb$ existiert. Die Aussagen über die Negativbereiche folgen aus Satz 5.3, Hilfssatz 5.2 und Satz 3.6.

Für die weiteren Behauptungen sei nun T ein beliebiger F-Oberhalbring von $\mathfrak{S}$. Für $1+a\in\mathfrak{S}^+\subseteq T$ gilt $1\leqq 1+a$ auch in T, also gibt es $x, y\in T$ mit $1=(1+a)x=$ $=y(1+a)$, d. h. $1x=y1\in T$ ist das eindeutig bestimmte Inverse $(1+a)^{-1}$ von $1+a$ bezüglich $1\in\mathfrak{S}$ in T. Wegen $q_R(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ bildet die Untermenge $\{(g+b)(1+a)^{-1}|g+$ $+b\in\mathfrak{S}, 1+a\in\mathfrak{S}^+\}\subseteq T$ eine zu $S_1=Q_R(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)=Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^+)$ isomorphen F-Unterhalbring von T. Dies zeigt die Minimalität von S_1 als F-Oberhalbring von $\mathfrak{S}$ und $T\cong S_1$, falls T minimal gewählt war.

Sei schließlich T ein F-Halbring mit Einselement 1_T, der $S\subseteq T\subseteq S_1$ erfüllt, und S ein F-Halbring ohne Einselement. Wir wollen $T=S_1$ zeigen und schreiben $1_T=(g+a)(1+b)^{-1}$ als Element von S_1 mit $1\in\mathfrak{S}$. Daraus folgt zunächst $g=1$, da für $g=0$ das Element $a\in S$ in T, also erst recht in S kürzbar wäre, im Widerspruch zu Prop. 4.1. Aus $1_T+b=1+a$ folgt aber $x+xb=x+xa$ und $x+xb=$ $=x+ax$ für alle $x\in S$, was nach (5e) $1+a=1+b$, also $1_T=1$ ergibt. Aus $1_T=$ $=1\in T$ folgt aber $\mathfrak{S}\subseteq T$ und damit $T=S_1$ nach der oben bewiesenen Minimalitätseigenschaft von S_1 bezüglich $\mathfrak{S}$, qed.

Wir bemerken noch, daß sogar $\mathfrak{S}^+=C(\mathfrak{S})$ gilt und damit S_1 maximaler Quotientenhalbring von $\mathfrak{S}$ ist. Schließlich erhalten wir die bereits angekündigte Verschärfung von Satz 3.8:

Folgerung 5.6. In jedem F-Halbring S gilt $I(S)\subseteq S^-\cap Z(S)$.

Beweis. Nach Satz 3.8 gilt $I(S)\subseteq S^-\cap Z(S^-)$, so daß nur $I(S)\subseteq Z(S)$ zu zeigen ist. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen betten wir S in den F-Halbring S_1 von Satz 5.5 ein. Gemäß Satz 4.2 gilt $S_1=Q(S_1^-, (S_1^+)^{-1})$ und $I(S)\subseteq I(S_1)\subseteq Z(S_1^-)$ nach Satz 3.8. Aus beidem folgt aber $I(S)\subseteq Z(S_1)$ und damit $I(S)\subseteq Z(S)$, qed.

§ 6 Beispiele

Beispiel 6.1 F-Halbringe ohne idempotente Elemente

Wir konstruieren einen „möglichst einfachen" Halbring dieser Art durch folgende Überlegungen: Wenn es überhaupt einen solchen Halbring gibt, dann gibt es (vgl. Satz 3.8) auch einen negativen Halbring S mit $I(S)=\emptyset$. Für die Potenzen eines beliebigen Elementes $a\in S$ gilt dann

$$a > a^2 > a^3 > \dots \quad \text{(paarweise verschieden),} \tag{6a}$$

da andernfalls ein idempotentes Element auftreten würde. Wir dürfen annehmen, daß dabei a nicht Potenz eines anderen Elementes ist. Die Faktorbedingung F ist für $a^n<a^m$ mit a^{n-m} erfüllt. Sei $b\in S$ ein Element, welches a (und damit jedes a^n) von rechts reproduziert. Aus

$$a = ab \leqq b \quad \text{folgt dann} \quad a < b$$

wegen $a^2\neq a$, und für die Potenzen von b gilt (6a) sowie mit beliebigen $n, m\in\mathbf{N}$

$$a^n = a^n b^m \leqq b^m, \quad \text{also} \quad a^n < b^m.$$

Wir nehmen nun zur Vereinfachung $a \cdot b = b \cdot a$ an. Dann besteht der von a und b erzeugte Unterhalbring von S aus den Potenzen von a und den Potenzen von b und ist totalgeordnet. Er erfüllt F bis auf das noch fehlende rechtsreproduzierende Element $c \in S$ von b (und damit von b^n), und unsere Überlegungen führen also auf eine Kette $a < b < c \ldots$ usw.

Umgekehrt läßt sich so ein kommutativer, totalgeordneter, negativer F-Halbring S mit $I(S) = \emptyset$ konstruieren. Für $i \in \mathbf{N}$ seien die unendlichen zyklischen Halbgruppen $\langle a_i \rangle = \{a_i^1, a_i^2, \ldots\}$ disjunkt und es sei $S = \bigcup \langle a_i \rangle$. Wir definieren

$$a_i^n \cdot a_j^m = \begin{cases} a_i^n & \text{für } i < j \\ a_i^{n+m} & \text{für } i = j \\ a_j^m & \text{für } i > j \end{cases}$$

und

$$a_i^n + a_j^m = \begin{cases} a_j^m & \text{für } i < j \\ a_i^{\min(n,m)} & \text{für } i = j \\ a_i^n & \text{für } i > j \end{cases}$$

womit in der Tat ein F-Halbring mit den behaupteten Eigenschaften entsteht.

Beispiel 6.2. Von einem Element erzeugte negative AKI-Halbringe

Für die Potenzen eines negativen Elementes a eines beliebigen AKI-Halbringes gilt entweder (6a) oder

(6b) $$a > a^2 > \ldots > a^n = a^{n+1} \quad \text{mit} \quad a^n a^n = a^n.$$

Damit ist der von a erzeugte negative AKI-Halbring $S = [a]$ im Falle (6a) eine unendliche zyklische Halbgruppe $(S, \cdot) = \langle a \rangle$ mit der Addition

(6c) $$a^i + a^j = a^{\min(i,j)}$$

und im Falle (6b) die aus n Elementen bestehende zyklische Halbgruppe $(S, \cdot) = \langle a \rangle$ mit der Multiplikation

(6d) $$a^i \cdot a^j = a^{\min(i+j, n)}$$

und der Addition

(6e) $$a^i + a^j = a^{\min(i,j)}.$$

Diese Strukturfeststellungen sind natürlich konstruktiv. Die Additions- und Multiplikationsvorschriften gelten auch noch, wenn man jeweils ein Einselement $1 = a^0$ adjungiert. Die entstehenden Halbringe $S_\infty = \{a^i \mid i \in \mathbf{N}_0\}$ und $S_n = \{a^n, a^{n-1}, \ldots, a, a^0\}$ sind (kommutative, totalgeordnete, negative) F-Halbringe.

Beispiel 6.3. Die totalgeordnete unendlich zyklische Gruppe G

Die unendliche zyklische Gruppe $G = \{a^i \mid i \in Z\}$, totalgeordnet gemäß $a^i \leqq a^j \Leftrightarrow \Leftrightarrow i \geqq j$, ist F-Halbring (AKI-Halbkörper) mit der Additionsvorschrift (6c). Es handelt sich dabei um den (einzigen nichttrivialen) Quotientenhalbring $G = Q(G^-, G^-)$ des F-Halbringes $G^- = S_\infty = \{a^i \mid i \in \mathbf{N}_0\}$ aus Beispiel 6.2.

Beispiel 6.4. Konstruktion nicht-negativer F-Halbringe ohne Einselement

Es sei S ein F-Halbring ohne Einselement (etwa ein distributiver Verband ohne maximales Element oder ein Halbring gemäß Beispiel 6.1). Das direkte Produkt der Halbringe S und G aus Beispiel 6.3

$$\hat{S} = S \times G \quad \text{mit} \quad s_i = (s, a^i), \quad s \in S. \quad a^i \in G$$

ist ebenfalls ein F-Halbring ohne Einselement, und es gilt

$$s_i \leqq r_j \Leftrightarrow s \leqq r \quad \text{in } S \text{ und} \qquad i \geqq j \text{ in } \mathbf{Z}$$

$$s_i x_j \leqq x_j \Leftrightarrow sx \leqq x \text{ in } S \text{ und} \quad i+j \geqq j \text{ in } \mathbf{Z}.$$

Damit ist $\hat{S}^- = \{s_i | s \in S^-, i \in \mathbf{N}_0\}$ echte Teilmenge von $\hat{S}$. Natürlich ist $\hat{S}$ für $S \neq \{0\}$ nicht totalgeordnet.

Literaturverzeichnis

[1] D. Haftendorn; Additiv kommutative und idempotente Halbringe mit Faktorbedingung, I, *Publ. Math. (Debrecen)* **25** (1978), 107—116.

[2] H. J. Weinert; Über die Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **22** (1961), 91—105.

(Eingegangen am 22. Juli 1975.)