which implies that

$$(1-x^2)r'_{n-1}(x)-\frac{4}{3}xr_{n-1}(x) = cw_n(x) \tag{11}$$

where c is a non zero numerical constant. Setting

$$r_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k(x) \tag{12}$$

and using the recurrence relation ([11], formula (4.5.7), p. 72)

$$(1-x^2)w'_n(x) = \left(n-\frac{1}{3}\right)w_{n-1}(x)-nxw_n(x) \tag{13}$$

we have from (11):

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(k-\frac{1}{3}\right)a_k w_{k-1}(x)-\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(k+\frac{4}{3}\right)xw_k(x) = cw_n(x). \tag{14}$$

From (14) and formula (4.5.1) of Szegő [11], p. 71 we conclude that

$$cw_n(x) = \sum_{k=1}^{n-2}\left[\frac{k(3k+2)}{6k}a_{k+1}-\frac{k(3k+1)(3k-2)}{(6k-5)(3k-1)}a_{k-1}\right]w_k(x)-$$

$$-\frac{(3n-2)(n-1)(3n-5)}{(6n-11)(3n-4)}a_{n-2}w_{n-1}(x)-\frac{n(3n+1)(3n-2)}{(6n-5)(3n-1)}a_{n-1}w_n(x).$$

Now equating the coefficients of $w_k(x)$ on both sides we get

$$\frac{n(3n+1)(3n-2)}{(6n-5)(3n-1)}a_{n-1} = -c, \tag{15}$$

$$\frac{(3n-2)(n-1)(3n-5)}{(6n-11)(3n-4)}a_{n-2} = 0 \tag{16}$$

and

$$\frac{k(3k+2)}{6k}a_{k+1}-\frac{k(3k+1)(3k-2)}{(6k-5)(3k-1)}a_{k-1} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{17}$$

If n is even then from the above equations (15), (16) and (17) we have $a_{n-2}= =a_{n-4}=\ldots=a_2=a_0=0$ and $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1}$ can be determined and are not zero. Similarly, if n is odd we have from the above equations $a_1=a_3=a_5=\ldots \ldots=a_{n-2}=0$ and $a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$ are not zero and can be determined. Hence regardless whether n is even or odd, in general, there does not exist a unique polynomial $Q_{2n+1}(x)$ of degree $\leqq 2n+1$ satisfying (8) and (9) and there are infinitely many if they exist.

References

[1] J. Balázs and P. Turán, Notes on interpolation II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 201—215.

[2] J. Balázs and P. Turán, Notes on interpolation III, *ibid.* **9** (1958), 195—214.

[3] G. Freud, Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolations fahrens von P. Turán, *ibid.* **9** (1958), 337—341.

[4] O. Kis, On trigonometric (0, 2)-interpolation (Russian), *ibid.* **11** (1960), 256—276.

[5] K. K. Mathur and A. Sharma, Some interpolatory properties of Hermite polynomials, *ibid.* **12** (1961), 192—207.

[6] J. Prasad, Remarks on lacunary interpolation, *Mathematica (cluj)*, **14** (37), 1, (1972), 147—165.

[7] J. Prasad and A. K. Varma, An analogue of a problem of J. Balázs and P. Turán, *Canadian J. Math.* **21** (1969), 54—63.

[8] J. Prasad and R. B. Saxena, Some interpolatory properties of Laguerre polynomials, *Canadian Math. Bull.* **10** (1967), 559—571.

[9] R. B. Saxena and A. Sharma, On some interpolatory properties of Legendre polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 345—358.

[10] J. Surányi and P. Turán, Notes on interpolation I, *ibid* **6** (1955), 67—79.

[11] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* **23** (1959).

[12] A. K. Varma, Non existence of interpolatory polynomials, *Publ. Math. (Debrecen)* **15** (1968), 75—77.

[13] A. K. Varma and A. Sharma, Some interpolatory properties of Tchebycheff polynomial (0, 2) case modified, *Publ. Math. (Debrecen)* **8** (1961), 336—349.

CALIFORNIA STATE UNIVERSITY
LOS ANGELES, CALIFORNIA 90 032, U.S.A.

(Received October 17, 1975.)

Über Berwaldsche Räume II

Von TÜNDE VARGA (Debrecen)

In dieser Arbeit, die eine Fortsetzung der Arbeit (1) des Autors ist, untersuchen wir die in Berwaldsche Räume eingebettete Hyperflächen. Wir benutzen die in (1) eingeführten Bezeichnungen.

1. *Über die Hyperflächen von Finslerschen Räumen*

Es sei F_n ein n-dimensionaler Finslerscher Raum. F_{n-1} ist eine Hyperfläche von F_n falls seine Parameterdarstellung die Gestalt

$$x^i = x^i(u^\alpha) \quad \big(i = 1, 2, \dots, n;\ \alpha = 1, 2, \dots, (n-1)\big)\ ^{*)} \tag{1.1}$$

hat, wobei wir $\dot{x}^i$ als Supportelement wählen, welches auch eine Tangente von F_{n-1} ist. Dann ist

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \dot{u}^\alpha = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha, \tag{1.2}$$

wobei der Projektionsfaktor die Gestalt

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \overset{\text{def}}{=} B^i_\alpha \tag{1.3}$$

hat.

Da F_n ein metrischer Raum ist, kann auch in F_{n-1} eine Metrik eingeführt werden. Nach CARTAN ([2]) kann dies auf zweierlei Weise realisiert werden.

1. Der metrische Tensor der Hyperfläche ist die Projektion des räumlichen metrischen Tensors auf die Hyperfläche. Dies ist der metrische Tensor der Projektions- oder induzierten Geometrie.

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = g_{ij}(x, \dot{x}) B^i_\alpha B^j_\beta. \tag{1.4}$$

2. Der metrische Tensor der Hyperfläche wird aus der Grundfunktion $F(x, \dot{x})$ von F_n gewonnen, welche über F_{n-1} folgendermaßen definiert ist:

$$\bar{F} = \bar{F}(u, \dot{u}) = F\big(x^i(u^\sigma);\ B^i_\sigma \dot{u}^\sigma\big). \tag{1.5}$$

---

*) Die lateinischen Buchstaben in den Indizes laufen von 1 bis n, die griechischen Buchstaben laufen von 1 bis $(n-1)$.

Aus (1.5) bildet man auf die übliche Weise den metrischen Grundtensor der inneren Geometrie:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{F}^2(u, \dot{u})}{\partial \dot{u}^\alpha \partial \dot{u}^\beta}. \tag{1.6}$$

Es ist bekannt, daß

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = g_{ij}(x, \dot{x}) B^i_\alpha B^j_\beta = g_{\alpha\beta} \tag{1.7}$$

gilt; dies bedeutet, daß der metrische Tensor sowohl in der Projektions- als auch in der inneren Geometrie identisch ist. Hieraus folgt, daß auch die Torsionstensoren in beiden Geometrien identisch sind, das heißt

$$\bar{A}_{\alpha\beta\gamma} = A_{ijk} B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma = A_{\alpha\beta\gamma}. \tag{1.8}$$

Im weiteren benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

$$B^{ij\dots k}_{\alpha\beta\dots\gamma} = B^i_\alpha \cdot B^j_\beta \dots B^k_\gamma, \tag{1.9}$$

$$B^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}. \tag{1.10}$$

In jedem Punkt von F_{n-1} können wir der Hyperfläche auf eindeutige Weise eine Einheitsnormale $N^i(x, \dot{x})$ zuordnen, derart daß das Supportelement $\dot{x}^k$ Tangentenrichtung hat und daß

$$g_{ij}(x, \dot{x}) N^i N^j = 1, \tag{1.11}$$

$$N^i B^\alpha_i = 0 \tag{1.12}$$

$$N^i = g^{ij}(x, \dot{x}) N_j \tag{1.13}$$

gelten, wobei die B^α_i die Inversen der Projektionsfaktoren B^i_α sind.

2. Die inneren und die induzierten Zusammenhangskoeffizienten in bezug auf in Berwaldsche Räume eingebettete Hyperflächen

Sei B_n ein n-dimensionaler Berwaldscher Raum und F_{n-1} eine seiner Hyperflächen. Wir untersuchen die inneren und die absoluten Differentiale in F_{n-1}.

Es sei $X^\alpha(u, \dot{u})$ ein über F_{n-1} definiertes Vektorfeld. Die Komponenten des Vektorfeldes $X^\alpha(u, \dot{u})$ in bezug auf den Raum B_n sind $X^i = B^i_\alpha X^\alpha$.

Über F_{n-1} kann das absolute Differenzieren auf zweierlei Arten definiert werden und im allgemeinen sind diese beiden voneinander verschieden.

1) In F_{n-1} werden mit Hilfe der Tensoren $\bar{g}_{\alpha\beta}$ und ihrer Ableitungen in Analogie zu den Objekten Γ^i_{jk} die inneren Verschiebungsparameter $\hat{\Gamma}^\varepsilon_{\alpha\beta}(u, \dot{u})$ gebildet ([2]):

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = \gamma^\varepsilon_{\alpha\beta} - (C^\varepsilon_{\sigma\beta} G^\sigma_\alpha + C^\varepsilon_{\sigma\alpha} G^\sigma_\beta - g^{\varepsilon\sigma} C_{\alpha\beta\nu} G^\nu_\sigma), \tag{2.1}$$

wobei $\gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ das Christoffelsche Symbol zweiter Art in bezug auf die Tensoren $\bar{g}_{\alpha\beta}$ bedeutet und

$$G^{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta}, \tag{2.2}$$

$$G^{\varepsilon}_{\sigma} = \frac{\partial G^{\varepsilon}}{\partial \dot{u}^{\sigma}}. \tag{2.3}$$

Es bezeichne $\bar{D}$ die innere absolute Differenzierung. Dann ist

$$\bar{D} X^{\alpha} = dX^{\alpha} + \hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} X^{\beta} du^{\gamma} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} X^{\beta} d\dot{u}^{\gamma}. \tag{2.4}$$

2) Wir bilden das zum Vektorfeld X^{α} gehörige absolute Differential in B_n mit Komponenten aus X^i und projizieren dieses auf F_{n-1}. Auf diese weise erhalten wir das induzierte absolute Differential, dessen Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}$ sind. Es bezeichne D_v das aus der Projektion stammende absolute Differenzieren. Dann ist

$$DX^i = dX^i + \Gamma^{*i}_{kl} X^k dx^l$$

und

$$D_v X^{\alpha} = B^{\alpha}_i X^i.$$

Wegen $X_i = B^i_{\beta} X^{\beta}$ haben wir

$$dX^i = B^i_{\beta} dX^{\beta} + B^i_{\beta\gamma} X^{\beta} du^{\gamma}.$$

Deswegen ist

$$DX^i = B^i_{\beta} dX^{\beta} + B^i_{\beta\gamma} X^{\beta} du^{\gamma} + \Gamma^{*i}_{kl} dx^l X^k.$$

Wegen $X^k = B^k_{\beta} X^{\beta}$ und $dx^l = B^l_{\gamma} du^{\gamma}$ erhält man

$$DX^i = B^i_{\beta} dX^{\beta} + (B^i_{\beta\gamma} + \Gamma^{*i}_{kl} B^{kl}_{\beta\gamma}) X^{\beta} du^{\gamma}$$

$$D_v X^{\alpha} = B^{\alpha}_i DX^i = dX^{\alpha} + B^{\alpha}_i (B^i_{\beta\gamma} + \Gamma^{*i}_{kl} B^{kl}_{\beta\gamma}) X^{\beta} du^{\gamma}$$

das heißt

$$D_v X^{\alpha} = dX^{\alpha} + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} X^{\beta} du^{\gamma} \tag{2.5}$$

wobei

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}(u, \dot{u}) = B^{\alpha}_i (B^i_{\beta\gamma} + \Gamma^{*i}_{kl} B^{kl}_{\beta\gamma}). \tag{2.6}$$

Unter Benutzung der Eigenschaften eines Berwaldschen Raumes ist

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}(u, \dot{u}) = B^{\alpha}_i(u, \dot{u}) \cdot \left[B^i_{\beta\gamma}(x(u)) + \Gamma^{*i}_{kl}(x(u)) B^{kl}_{\beta\gamma}(x(u))\right] = B^{\alpha}_i(u, \dot{u}) E^i_{\beta\gamma}(x(u)) \tag{2.7}$$

der induzierte Zusammenhangskoeffizient, wobei

$$E^i_{\beta\gamma}(u) = B^i_{\beta\gamma}(x(u)) + \Gamma^{*i}_{kl}(x(u)) B^{kl}_{\beta\gamma}(x(u)). \tag{2.8}$$

Andererseits gilt

$$\frac{\partial \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial \dot{u}^{\sigma}} = \frac{\partial B^{\alpha}_i}{\partial \dot{u}^{\sigma}} E^i_{\beta\gamma}(u) \tag{2.9}$$

und das beweist, daß der induzierte Zusammenhangskoeffizient im allgemeinen von dem Supportelement $\dot{u}^\sigma$ nicht unabhängig ist. Auf Grund von (2.9) ist die Richtigkeit der folgenden *Behauptung* offensichtlich:

In Berwaldsche Räume eingebettete Hyperflächen sind im allgemeinen selbst keine Berwaldschen Räume.

Unsere weiteren Untersuchungen betreffen die induzierte Geometrie.

3. *Den Hyperflächen zugeordnete grundlegende Tensoren*

Der Tensor M_{ij}

Auf Grund von ([5] 1 §) ist

$$M_{ij}(x, \dot{x}) \overset{\text{def}}{=} C_{ijk}(x, \dot{x}) N^k(x, \dot{x}). \tag{3.1}$$

Aus dem Tensor M_{ij} bilden wir die folgenden Tensoren, die in der Theorie der Hyperflächen sehr gut anwendbar sind:

$$M_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) = M_{ij}(x, \dot{x}) B^{ij}_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

$$M^i_j(x, \dot{x}) = g^{ih}(x, \dot{x}) M_{hj}(x, \dot{x}) \tag{3.3}$$

$$M^\alpha_\varepsilon(u, \dot{u}) = g^{\alpha\beta}(u, \dot{u}) M_{\beta\varepsilon}(u, \dot{u}) \tag{3.4}$$

$$M_i(x, \dot{x}) = M_{ij}(x, \dot{x}) N^j(x, \dot{x}) \tag{3.5}$$

$$M_\alpha(u, \dot{u}) = M_i(x, \dot{x}) B^i_\alpha \tag{3.6}$$

wobei

$$M_{ij}(x, \dot{x}) \dot{x}^j = 0, \quad M_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \dot{u}^\beta = 0$$

$$M_i(x, \dot{x}) \dot{x}^i = 0, \quad M_\alpha(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha = 0.$$

Der Normalkrümmungstensor $I^i_{\alpha\beta}$

Auf Grund von [3] (S. 193) ist

$$I^i_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} B^i_{\alpha\beta} - B^i_\varepsilon \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\beta} + \Gamma^{*i}_{hk} B^{hk}_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Der Tensor $I^i_{\alpha\beta}$ ist wie ein Vektor des einbettenden Raumes F_n senkrecht auf F_{n-1} und so kann dieser Tensor in der Gestalt

$$I^i_{\alpha\beta} = N^i \Omega_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

geschrieben werden, wobei die $\Omega_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der zweiten Grundform von F_{n-1} sind.

Der Normalkrümmungstensor einer in einen Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche hat die Gestalt

$$I^i_{\alpha\beta} = E^i_{\alpha\beta}(u) - B^i_\varepsilon(u) \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\beta}(u, \dot{u}). \tag{3.9}$$

Der Tensor $Z^i_{\alpha\beta}$

Nach ([6] S. 276) ist

$$Z^i_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} -B^i_\varepsilon A^\varepsilon_{\alpha\beta} + A^i_{jk} B^{jk}_{\alpha\beta}. \tag{3.10}$$

Der Tensor $Z^i_{\alpha\beta}$ ist als ein Vektor des einbettenden Raumes F_n senkrecht auf F_{n-1} und kann deswegen in der Gestalt

$$Z^i_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} N^i \tag{3.11}$$

geschrieben werden.

Der Tensor $J^i_{\alpha\beta}$

Wegen ([5], S. 298) ist

$$J^i_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} B^i_{\alpha\beta} - B^i_\varepsilon \hat{\Gamma}^{*\varepsilon}_{\alpha\beta} + \Gamma^{*i}_{hk} B^{hk}_{\alpha\beta}. \tag{3.12}$$

Der Tensor $J^i_{\alpha\beta}$ ist als Vektor des einbettenden Raumes F_n nicht senkrecht auf F_{n-1} aber er kann in der Form

$$J^i_{\alpha\beta} = I^i_{\alpha\beta} - B^i_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{\alpha\beta} = N^i \Omega_{\alpha\beta} - B^i_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{3.13}$$

geschrieben werden, wobei $\Lambda^\varepsilon_{\alpha\beta} = \hat{\Gamma}^{*\varepsilon}_{\alpha\beta} - \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\beta}$ und $\Lambda^\varepsilon_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$.

4. *Die verallgemeinerte Gaußsche Gleichung der Hyperflächen eines Berwaldschen Raumes*

Die kovariante Ableitung eines gemischten Tensors, z.B. eines Tensors $T^i_{\alpha\beta}$ nach u^γ sei folgendermaßen definiert:

$$T^i_{\alpha\beta\,\|\,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T^i_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial T^i_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\lambda} \Gamma^{*\lambda}_{\varepsilon\gamma} \dot{u}^\varepsilon - T^i_{\alpha\varepsilon} \Gamma^{*\varepsilon}_{\beta\gamma} - T^i_{\varepsilon\beta} \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\gamma} + T^h_{\alpha\beta} \Gamma^{*i}_{hk} B^k_\gamma. \tag{4.1}$$

Wir wenden diese Differenzierung in einem Berwaldschen Raum auf den Normalkrümmungstensor $I^i_{\alpha\beta}$ an. Wegen [4] gilt dann

$$I^i_{\alpha\beta\,\|\,\gamma} - I^i_{\alpha\gamma\,\|\,\beta} = -B^i_\varepsilon K_\alpha{}^\varepsilon{}_{\beta\gamma} + K_h{}^i{}_{kj} B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.2}$$

wobei $K_h{}^i{}_{kj}$ der affine Krümmungstensor eines n-dimensionalen Berwaldschen Raumes ist und $K_\alpha{}^\varepsilon{}_{\beta\gamma}$ der affine Krümmungstensor von F_{n-1} in bezug auf die induzierte Geometrie ist, das heißt

$$K_\alpha{}^\varepsilon{}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{u}^\delta} G^\delta_\gamma + \frac{\partial \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial \Gamma^{*\varepsilon}_{\alpha\gamma}}{\partial \dot{u}^\delta} G^\delta_\beta + \Gamma^{*\varepsilon}_{\sigma\gamma} \Gamma^{*\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{*\varepsilon}_{\sigma\beta} \Gamma^{*\sigma}_{\alpha\gamma}. \tag{4.3}$$

Unter Benutzung der verallgemeinerten Gaußschen Gleichung (in bezug auf die induzierte Geometrie) von in Finslersche Räume eingebetteten Hyperflächen erhalten wir gemäß [4]:

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + \tag{4.4}$$
$$+ 2C_{hjl} B^j_\beta N^h (I^l_{\sigma\varepsilon}\Omega_{\alpha\gamma} - I^l_{\sigma\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon})\dot{u}^\sigma + g_{ij} B^{jh}_{\beta\alpha} \frac{\partial \Gamma^{*i}_{hk}}{\partial \dot{x}^l} (I^l_{\sigma\varepsilon} B^k_\gamma - I^l_{\sigma\gamma} B^k_\varepsilon)\dot{u}^\sigma.$$

Wenden wir diesen Zusammenhang auf Hyperflächen an, die in einen Berwaldschen Raum eingebettet sin, dann ist:

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + 2C_{hjl} B^j_\beta N^h (I^l_{\sigma\varepsilon}\Omega_{\alpha\gamma} - I^l_{\sigma\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon})\dot{u}^\sigma. \tag{4.5}$$

Hieraus folgt wegen (3.8)

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + 2C_{hjl} B^j_\beta N^k N^l (\Omega_{\sigma\varepsilon}\Omega_{\alpha\gamma} - \Omega_{\sigma\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon})\dot{u}^\sigma.$$

Mit den Bezeichnungen von (3.1)—(3.6) erhalten wir

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + M_\beta (\Omega_{\sigma\varepsilon}\Omega_{\alpha\gamma} - \Omega_{\sigma\gamma}\Omega_{\alpha\varepsilon})\dot{u}^\sigma.$$

Andererseits ist aber

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\dot{u}^\alpha = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\dot{u}^\varepsilon + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma})\dot{u}^\alpha,$$

und so gilt

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + 2(K_{ijhk} B^{ijhk}_{\sigma\alpha\gamma\varepsilon} - K_{\sigma\alpha\gamma\varepsilon})\dot{u}^\sigma M_\beta, \tag{4.6}$$

aber

$$2(K_{ijhk} B^{ijhk}_{\sigma\alpha\gamma\varepsilon} - K_{\sigma\alpha\gamma\varepsilon})\dot{u}^\sigma M_\beta = 2(K_{ijhk} B^i_\sigma B^{jhk}_{\alpha\gamma\varepsilon}\dot{u}^\sigma - K_{\sigma\alpha\gamma\varepsilon}\dot{u}^\sigma) M_\beta = \tag{4.7}$$
$$= 2F \cdot M_\beta (K_{0jhk} B^{jhk}_{\alpha\gamma\varepsilon} - K_{0\alpha\gamma\varepsilon}).$$

Wird (4.7) jetzt wieder in (4.6) eingesetzt, so ergibt sich

$$K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = K_{ijhk} B^{ijhk}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + (\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + 2FC_{srl} B^r_\beta N^s N^l (K_{0jhk} B^{jhk}_{\alpha\gamma\varepsilon} - K_{0\alpha\gamma\varepsilon}). \tag{4.8}$$

Wenn wir (4.8) mit $g^{\lambda\beta}$ kontrahieren und dabei die Beziehung $g^{\lambda\beta} B^j_\beta = B^\lambda_l g^{lj}$ beachten, dann erhalten wir

$$K_\alpha{}^\lambda{}_{\gamma\varepsilon} = K_i{}^l{}_{hk}(x) B^{ihk}_{\alpha\gamma\varepsilon} + g^{\lambda\beta}(\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\varepsilon} - \Omega_{\alpha\varepsilon}\Omega_{\beta\gamma}) + \tag{4.9}$$
$$+ 2FB^\lambda_i C^i_{hl} N^l N^h (K_{0jhk} B^{jhk}_{\alpha\gamma\varepsilon} - K_{0\alpha\gamma\varepsilon}).$$

Aus dem obigen folgt

Satz 12. *Die verallgemeinerte Gaußsche Gleichung von Hyperflächen, die in einen Berwaldschen Raum eingebettet sind, hat in bezug auf die induzierte Geometrie die Gestalt* (4.8) *bzw.* (4.9).

5. *Die verallgemeinerte Codazzische Gleichung von Hyperflächen eines Berwaldschen Raumes*

Auf Grund von ([4] (2.24)) hat die verallgemeinerte Codazzische Gleichung von Hyperflächen, die in einen Finslerschen Raum eingebettet sind, in bezug auf die induzierte Geometrie die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta\|\gamma}-\Omega_{\alpha\gamma\|\beta} = N_i K_h{}^i{}_{kj} B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} + C_{ijl} N^i N^j (\Omega_{\alpha\beta} I^l_{\sigma\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma} I^l_{\sigma\beta}) \dot{u}^\sigma + \\ + N^i \frac{\partial \Gamma^{*i}_{hk}}{\partial \dot{x}^l} B^h_\alpha (I^l_{\sigma\gamma} B^k_\beta - I^l_{\sigma\beta} B^k_\gamma) \dot{u}^\sigma.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Wird dieser Zusammenhang auf Hyperflächen angewendet, die in Berwaldsche Räume eingebettet sind, so erhält man

$$\Omega_{\alpha\beta\|\gamma}-\Omega_{\alpha\gamma\|\beta} = N_i K_h{}^i{}_{kj} B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} + C_{ijl} N^i N^j (\Omega_{\alpha\beta} I^l_{\sigma\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma} I^l_{\sigma\beta}) \dot{u}^\sigma. \tag{5.2}$$

Weiter Umformung von (5.2) ergibt

$$\Omega_{\alpha\beta\|\gamma}-\Omega_{\alpha\gamma\|\beta} = N_i K_h{}^i{}_{kj} B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} + M_j N^j (K_{\sigma\alpha\gamma\beta} \dot{u}^\sigma - K_{ishk} B^{shk}_{\alpha\gamma\beta}) \dot{x}^i.$$

Es gilt also

$$\Omega_{\alpha\beta\|\gamma}-\Omega_{\alpha\gamma\|\beta} = N_i K_h{}^i{}_{kj} B^{hkj}_{\alpha\beta\gamma} + F M_j N^j (K_{0\alpha\gamma\beta} - K_{0shk} B^{shk}_{\alpha\beta\gamma}). \tag{5.3}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 13. *Die verallgemeinerte Codazzische Gleichung von Hyperflächen, die in einen Berwaldschen Raum eingebettet sind, hat (in bezug auf die induzierte Geometrie) die Gestalt* (5.3).

6. *Die Riemannsche Krümmung von Hyperflächen eines Berwaldschen Raumes*

Auf Grund von [4] haben wir für die Riemannsche Krümmung eines n-dimensionalen Berwaldschen Raumes im Punkte $P(x^k)$ in bezug auf die Ebenenstellung $\dot{x}^k$, X^k die Beziehung

$$K(x, \dot{x}, X) = \frac{K_{ijhk}(x, \dot{x}) \dot{x}^i \dot{x}^h X^j X^k}{(g_{ih} g_{jk} - g_{ij} g_{hk}) \dot{x}^i \dot{x}^h X^j X^k}. \tag{6.1}$$

Die zum Punkt $P(u^\alpha)$ gehörige Riemannsche Krümmung einer in einen Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche F_{n-1} in bezug auf die Ebenenstellung $\dot{u}^\alpha$, U^α hat die Gestalt:

$$\overline{K}(u, \dot{u}, U) = \frac{K_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}(u, \dot{u}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\gamma U^\beta U^\varepsilon}{(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\varepsilon} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\varepsilon}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\gamma U^\beta U^\varepsilon}. \tag{6.2}$$

Wir vergleichen nun die Riemannschen Krümmungen $\overline{K}(u, \dot{u}, U)$ und $K(x, \dot{x}, X)$. Hierbei ist $\overline{K}(u, \dot{u}, U)$ die Riemannsche Krümmung in bezug auf die Hyperflächenmetrik und $K(x, \dot{x}, X)$ die Riemannsche Krümmung in bezug auf die räumliche Metrik des Berwaldschen Raumes der in diesen eingebetteten Hyperfläche F_{n-1} in bezug auf den Punkt $P(u^\alpha)=P(x^k)$, wobei die Stellung der Tangentialebene in beiden Fällen ein- und dieselbe sein soll.

Wir wählen $\dot{u}^\alpha$ und U^α so, daß $g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=1$ und $g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta=1$ gelten.

Es bezeichne $R(u,\dot{u})$ die Normalkrümmung von F_{n-1} in der Richtung $\dot{u}^\alpha$ und $R_1(u,\dot{u})$ die Normalkrümmung von F_{n-1} in der Richtung U^α, wobei

$$R(u,\dot{u})=\frac{\overline{F}^2(u,\dot{u})}{\Omega_{\alpha\beta}(u,\dot{u})\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}, \tag{6.3}$$

$$R_1(u,\dot{u})=\frac{g_{\alpha\beta}(u,\dot{u})\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{\Omega_{\alpha\beta}(u,\dot{u})U^\alpha U^\beta}. \tag{6.4}$$

Nach [4] haben wir für Hyperflächen, die in Finslersche Räume eingebettet sind

$$\begin{aligned}\overline{K}(u,\dot{u},U)&=K(x,\dot{x},X)+\\&+[1-(g_{\alpha\gamma}\dot{u}^\alpha U^\gamma)^2]^{-1}\cdot\{R^{-1}\cdot R_1^{-1}-(\Omega_{\beta\varepsilon}\dot{u}^\beta U^\varepsilon)^2-g_{ij}X^jX^kC^i_{kl|r}\dot{x}^rN^lR^{-1}\}.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Aus (6.5) folgt wegen $C^i_{kl|r}=0$

Satz 14. *Bei einer in einen Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche gilt im Falle des Tangentialebenenstandes für die Riemannschen Krümmungen $\overline{K}(u,\dot{u},U)$ in bezug auf die Hyperflächenmetrik im Punkt $P(u^\alpha)=P(x^k)$ der Hyperfläche und $K(x,\dot{x},X)$ in bezug auf die Räumliche Metrik des Berwaldschen Raumes der Zusammenhang:*

$$\overline{K}(u,\dot{u},U)=K(x,\dot{x},X)+[1-(g_{\alpha\gamma}\dot{u}^\alpha U^\gamma)^2]^{-1}\cdot[R^{-1}\cdot R_1^{-1}-(\Omega_{\beta\varepsilon}\dot{u}^\beta U^\varepsilon)^2]. \tag{6.6}$$

7. Ein weitere Charakterisierung der Hyperflächen eines Berwaldschen Raumes

In einem Berwaldschen Raume verschwindet der Cartansche 2. Krümmungstensor $P_j{}^i{}_{kh}$. Im folgenden untersuchen wir die Gestalt des 2. Krümmungstensors

$$P_\beta{}^\alpha{}_{\gamma\delta}=\overline{F}\cdot\frac{\partial\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial\dot{u}^\delta}+C^\alpha_{\beta\varepsilon}A^\varepsilon_{\delta\gamma\|\varepsilon}\dot{u}^\varepsilon-A^\alpha_{\beta\delta\|\gamma} \tag{7.1}$$

einer in einen Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche.

Im Falle von Hyperflächen, die in einen Finslerschen Raum eingebettet sind, gilt nach ([7] (3.2))

$$\begin{aligned}P_\alpha{}^\sigma{}_{\gamma\beta}&=C^\sigma_{\alpha\delta}A^\delta_{\beta\gamma\|\varepsilon}\dot{u}^\varepsilon+g^{\sigma\lambda}(\omega_{\beta\lambda}\Omega_{\alpha\gamma}-\omega_{\beta\alpha}\Omega_{\lambda\gamma})+B^{jkl}_{\alpha\beta\gamma}B^\sigma_i(P_j{}^i{}_{lk}-C^i_{jr}A^r_{lk|m}\dot{x}^m)-\\&-B^j_\alpha B^\sigma_i\left(A^i_{jk}I^k_{\beta\gamma}+B^\beta_k\frac{\partial A^i_{jk}}{\partial\dot{x}^l}I^l_{\varepsilon\gamma}\dot{u}^\varepsilon\right)-2\omega_{\alpha\beta}M^i_lB^\sigma_iI^l_{\varepsilon\gamma}\dot{u}^\varepsilon\end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei wegen (3.11) $\omega_{\alpha\beta}=N_iZ^i_{\alpha\beta}$ gilt.

Da der einbettende Raum ein Berwaldscher Raum ist, haben wir $A^r_{lk|m}=0$ und $P_j{}^i{}_{lk}=0$ und so gilt auf einer in den Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche

$$P_\alpha{}^\sigma{}_{\gamma\beta} = C^\sigma_{\alpha\delta} A^\delta_{\beta\gamma\|\varepsilon} \dot{u}^\varepsilon + g^{\sigma\lambda}(\omega_{\beta\lambda}\Omega_{\alpha\gamma} - \omega_{\beta\alpha}\Omega_{\lambda\gamma}) - \tag{7.3}$$
$$- B^j_\alpha B^\sigma_i \left(A^i_{jk} I^k_{\beta\gamma} + B^k_\beta \frac{\partial A^i_{jk}}{\partial \dot{x}^l} I^l_{\varepsilon\gamma} \dot{u}^\varepsilon \right) - 2\omega_{\alpha\beta} M^i_l B^\sigma_i I^l_{\varepsilon\gamma} \dot{u}^\varepsilon$$

Hieraus folgt

Satz 15. *Der Krümmungstensor $P_\alpha{}^\sigma{}_{\gamma\beta}$ einer in einen Berwaldschen Raum eingebetteten Hyperfläche hat die Gestalt* (7.3).

Schließlich wollen wir noch eine Untersuchung anderer Art durchführen. Wir wollen die innere 1. kovariante Ableitung des Torsionstensors $A_{\alpha\beta\gamma}$ bestimmen.

Wir suchen einen Zusammenhang zwischen der 1. kovarianten Ableitung des Torsionstensors A_{ijk} des Berwaldschen Raumes und der inneren 1. kovarianten Ableitung der eingebetteten Hyperfläche; dieser Zusammenhang trägt zur Klärung der Frage bei, wan eine in einen Berwaldschen Raum eingebettete Hyperfläche selbst ein Berwaldscher Raum ist.

Wegen (1.8) ist

$$A_{\alpha\beta\gamma} = A_{ijk} B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Wir bilden die inneren 1. kovarianten Ableitungen beider Seiten nach u^δ:

$$A_{\alpha\beta\gamma|\delta} = A_{ijk|\delta} B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} + A_{ijk}(B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma})_{|\delta}. \tag{7.4}$$

(7.4) wird nun gliedweise weiter untersucht:

$$A_{ijk}(B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma})_{|\delta} = A_{ijk}(B^i_{\alpha|\delta} B^{jk}_{\beta\gamma} + B^j_{\beta|\delta} B^{ik}_{\alpha\gamma} + B^k_{\gamma|\delta} B^{ij}_{\alpha\beta}) = \tag{7.5}$$
$$= A_{ijk}(J^i_{\alpha\delta} B^{jk}_{\beta\gamma} + J^j_{\beta\delta} B^{ik}_{\alpha\gamma} + J^k_{\gamma\delta} B^{ij}_{\alpha\beta}),$$

da wegen ([5] (2.40)) auch $J^i_{\alpha\beta} = B^i_{\alpha|\beta}$ gilt.

Jetzt wird $A_{ijk|\delta}$ weiter auf Grund von ([5] (2.46)) umgeformt

$$A_{ijk|\delta} = A_{ijk|h} B^h_\delta + \frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} \cdot J^l_{\varepsilon\delta} \dot{u}^\varepsilon. \tag{7.6}$$

(7.5) und (7.6) setzen wir jetzt wieder in (7.4) ein; unter Beachtung, daß in Berwaldschen Räumen gilt, erhalten wir

$$A_{\alpha\beta\gamma|\delta} = B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} J^l_{\varepsilon\delta} \dot{u}^\varepsilon + A_{ijk}(J^i_{\alpha\delta} B^{jk}_{\beta\gamma} + J^j_{\beta\delta} B^{ik}_{\alpha\gamma} + J^k_{\gamma\delta} B^{ij}_{\alpha\beta}) \tag{7.7}$$

(3.13) in (7.7) eingesetzt ergibt

$$A_{\alpha\beta\gamma|\delta} = \frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} J^l_{\varepsilon\delta} \dot{u}^\varepsilon + \tag{7.8}$$
$$+ A_{ijk}(N^i \Omega_{\alpha\delta} B^{jk}_{\beta\gamma} + N^j \Omega_{\beta\delta} B^{ik}_{\alpha\gamma} + N^k \Omega_{\gamma\delta} B^{ij}_{\alpha\beta}) - A_{ijk}(B^i_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{\alpha\delta} + B^j_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{\beta\delta} + B^k_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{\gamma\delta}).$$

Nach ([5] (2.21)) ist aber

$$\Lambda^{\sigma}_{\varepsilon\delta}\dot{u}^{\varepsilon} = NM^{\sigma}_{\delta} \quad \text{wobei} \quad N(u, \dot{u}) = \Omega_{\alpha\beta}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta},$$

und so ergibt sich

$$\frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} J^l_{\varepsilon\delta}\dot{u}^{\varepsilon} = \frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l}(N^l\Omega_{\varepsilon\delta}\dot{u}^{\varepsilon} - B^l_{\sigma} NM^{\sigma}_{\delta}). \tag{7.9}$$

Wegen (3.1) haben wir

$$A_{ijk}N^k = F \cdot C_{ijk}N^k = F \cdot M_{ij}. \tag{7.10}$$

Wir setzen (7.9) und (7.10) jetzt wieder in (7.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma|\delta} = {} & F \cdot (M_{\beta\gamma}\Omega_{\alpha\delta} + M_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} + M_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta}) - \\ & - A_{ijk}(B^i_{\varepsilon}\Lambda^{\varepsilon}_{\alpha\delta} + B^j_{\varepsilon}\Lambda^{\varepsilon}_{\beta\delta} + B^k_{\varepsilon}\Lambda^{\varepsilon}_{\gamma\delta}) + \frac{\partial A_{ijk}}{\partial \dot{x}^l} B^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}(N^l\Omega_{\varepsilon\delta}\dot{u}^{\varepsilon} - B^l_{\sigma} M^{\sigma}_{\delta} N). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Aus dem Vorangehenden folgt

Satz 16. *Eine in einen Berwaldschen Raum eingebettete Hyperfläche ist dann und nur dann ein Berwaldscher Raum, wenn entweder* (7.7) *oder* (7.11) *verschwinden.*

Literatur

[1] T. Varga, Über Berwaldsche Räume I. *Publ. Math. (Debrecen)* **25** (1978), 213—223.
[2] E. Cartan, Les espaces de Finsler *Actualités Sci.* **79**, *Paris* (1934).
[3] H. Rund, The differential geometry of Finsler Spaces *Berlin—Göttingen—Heidelberg* (1959).
[4] H. Rund, Curvature properties of hypersurfaces of Finsler and Minkowskian spaces. *Tensor* **14**, *N.S.* (1963), 226—244.
[5] H. Rund, The instrinsic and induced curvature theories of subspaces of a Finsler space. *Tensor* **16**, *N.S.* (1965), 294—312.
[6] R. S. Sinha, Generalization of Gauss—Codazzi equations for the first of Cartan's curvature tensors in a hypersurfaces of a Finsler space. *Tensor* 19, *N.S.* (1968), 275—278.
[7] R. S. Sinha, Generalization of Gauss—Codazzi equations for second of Cartan's curvature tensors in a hypersurface of a Finsler Space. *Indian Math. Soc.* (1969), 133—140.

(Eingegangen am 20. Oktober 1975.)