Injektive Gruppen über Fastringen

Von RENATE PREHN (Erfurt)

In dankbarer Erinnerung meinem verehrten Lehrer Prof. Dr. Andor Kertész

In dieser Arbeit*) wird der Begriff der Injektivität auf Gruppen über Fastringen verallgemeinert, und es werden erste Eigenschaften untersucht. Dabei verstehen wir unter einer Gruppe G über einem Fastring N eine additiv geschriebene Gruppe, deren „Operatorenbereich" ein Fastring ist. Bei Fastringen fehlt im Vergleich zu Ringen eines der beiden Distributivgesetze und im allgemeinen die Kommutativität der Addition. Dies hat zur Folge, daß die „Operatoren" in der Regel auf eine Gruppe G nicht wie Endomorphismen von G wirken, so daß Gruppen über Fastringen (kurz N-Gruppen genannt) eine Verallgemeinerung von Operatorgruppen im üblichen Sinne und insbesondere von R-Moduln über einem Ring R sind. Diese N-Gruppen sind bisher noch wenig untersucht worden. Einige Eigenschaften sind in den Arbeiten [14] und [15] dargestellt, während Gruppen über nullsymmetrischen und über distributiv erzeugten Fastringen z.B. in den Arbeiten [3], [16], [19] bzw. [5], [6] und anderen betrachtet werden.

Man kann Fastringe und Gruppen über nullsymmetrischen Fastringen als Ω-Gruppen im Sinne von HIGGINS [9] auffassen, während Gruppen über einem nicht nullsymmetrischen Fastring Ω-Gruppen im Sinne von HÄMISCH [8] sind, die in dieser Arbeit als „verallgemeinerte Ω-Gruppen" bezeichnet werden.

Die wichtigsten Begriffe und Eigenschaften von Fastringen und N-Gruppen werden in § 1 zusammengestellt und ergänzt. Es ergeben sich schon hier einige interessante Eigenschaften, die damit zusammenhängen, daß die Varietät der N-Gruppen über einem nicht nullsymmetrischen (festen) Fastring N sowohl ein initiales als auch ein terminales Objekt besitzt, aber kein Nullobjekt. Dies hat z. B. zur Folge, daß es zwar zu jedem N-Homomorphismus einer N-Gruppe G genau einen Kern gibt, dieser aber keine N-Untergruppe von G zu sein braucht. Ferner folgt hieraus, daß der Begriff eines direkten Summanden bzw. einer (diskreten) direkten Summe von N-Gruppen (wie er z. B. [16] eingeführt wurde) nur für nullpunktierte N-Gruppen im üblichen Sinne definierbar ist. Es wird daher mit dem Begriff des N-Retrakts gearbeitet, der eine Verallgemeinerung des Begriffes direkter Summand (retract im Sinne von [1]) bzw. semi direkter Summand oder normal komplementierte Untergruppe in der Theorie der nicht abelschen Gruppen darstellt.

*) Die Anregung zu diesen Untersuchungen gab Prof. A. KERTÉSZ. Einige Ergebnisse sind in einem Kurzvortrag auf der Tagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR im Mai 1974 in Halle angegeben worden.

Im 2. Paragraphen Teil dieser Arbeit werden injektive N-Gruppen betrachtet, und es wird gezeigt, daß jede abelsche N-Gruppe über einem abelschen Fastring N eine injektive Hülle besitzt. Die Existenz einer solchen injektiven Hülle wird mit Hilfe der Konstruktion der exakten N-Hülle einer partiellen N-Gruppe gezeigt. Diese Konstruktion ist eine Anwendung der Konstruktion der exakten $\mathfrak{K}$-Hülle, wie sie z. B. in den Arbeiten von LANCKAU [13] und KUROŠ [11] für Varietäten universeller Algebren bzw. von Ω-Gruppen und abelschen Ω-Gruppen diskutiert wird, auf die Varietät der N-Gruppen bzw. der abelschen N-Gruppen. Dabei haben wir hier Varietäten von Ω-Gruppen bzw. verallgemeinerten Ω-Gruppen vorliegen, bei denen der Multioperatorenbereich Ω zusätzlich Identitäten erfüllt.

Es zeigt sich, daß es auch nicht triviale nicht abelsche N-Gruppen gibt, die injektiv sind, im Gegensatz zur Gruppentheorie, wo Prof. R. BAER zeigte, daß in der Varietät aller Gruppen jede injektive Gruppe die einelementige Gruppe $\{0\}$ ist. Herr Prof. R. BAER hat mir freundlicher Weise den Beweis dieses Satzes geschickt (der wohl nicht veröffentlicht ist), wofür ich ihm herzlich danke.

Der Autor dankt Frau Dr. Renate LANCKAU für ihre kritischen Bemerkungen, und Herrn Professor Richárd WIEGANDT für sein Interesse an der Arbeit.

§ 1

(1.1) Eine nicht leere Menge N mit zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$ heißt ein *Linksfastring* $(N, +, \cdot)$, wenn

(i) $(N, +)$ eine Gruppe ist,
(ii) $(N, \cdot)$ eine Halbgruppe ist und
(iii) $a(b+c)=ab+ac$ für alle $a, b, c\in N$ gilt.

Ist außerdem die additive Gruppe $(N, +)$ kommutativ, so sprechen wir von einem *abelschen Fastring*.[1])

Fordert man anstelle von (iii) die Rechtsdistributivität für alle Elemente aus N, so heißt $(N, +, \cdot)$ ein Rechtsfastring. Rechts- und Linksfastringe sind antiisomorph. Unter einem Fastring N verstehen wir im folgenden stets einen Linksfastring $(N, +, \cdot)$.

Für das Nullelement 0 der additiven Gruppe $(N, +)$ und beliebige $a, b\in N$ folgt aus der Definition $a\cdot 0=0$ und $a(-b)=-(ab)$.

(1.2) Ein Element $n\in N$ heißt *nullsymmetrisch in N*, wenn $0\cdot n=0$ gilt [19]). Ein Element $k\in N$ heißt *konstant in N*, wenn

$$a\cdot k = k \quad \text{für alle} \quad a\in N \quad \text{gilt.}$$

Ein Fastring heißt *nullsymmetrisch (konstant)*[2]), wenn jedes seiner Elemente null-

[1]) Ein Fastring N mit Einselement (bzw. einem Nichtlinksnullteiler) und kommutativer Multiplikation ist ein Ring.

[2]) Nullsymmetrische Fastringe werden in der Literatur auch als „C-rings" (engl.), „C-Fastringe", „Fastringe" mit zweiseitiger „Null" oder als „Fastring" schlechthin und konstante Fastringe als „Z-rings" (engl.) bezeichnet.

symmetrisch (konstant) ist. Ein Fastring N, in dem $ab=0$ für alle $a, b \in N$ gilt, heißt *Zerofastring*.

Wie mann leicht nachprüft, bilden in jedem Fastring N die Mengen

$$N_0 := \{n / n \in N,\ 0n = 0\}$$

aller nullsymmetrischen Elemente aus N und

$$N_k := \{n / n \in N,\ an = n \quad \text{für alle} \quad a \in N\}$$

aller konstanten Elemente aus N je einen Unterfastring von N. [2])

(1.3) Sei G eine additiv geschriebene Gruppe. Dann bildet die Menge $T(G)$ aller Transformationen von G (eindeutigen Abbildungen von G in sich) mit den Operationen

$$g(\tau_1+\tau_2) = g\tau_1 + g\tau_2$$

und

$$g(\tau_1 \cdot \tau_2) = (g\tau_1)\tau_2$$

für alle $g \in G$ und $\tau_1, \tau_2 \in T(G)$ einen Fastring, *den Fastring der Transformationen von* G mit der Nullabbildung ω als Nullelement und der identischen Abbildung ι als Einselement.

Wir nennen eine Transformation $\tau_0 \in T(G)$ *nullpunktiert*, wenn das Nullelement $0 \in G$ bei τ_0 Fixelement ist, und $\tau_g \in T(G)$ *konstant*, wenn alle Elemente $g' \in G$ bei τ_g dasselbe Bild g haben. Dann bilden die Mengen $T_0(G)$ aller nullpunktierten Transformationen und $T_k(G)$ aller konstanten Transformationen je einen Unterfastring von $T(G)$, der im ersten Falle nullsymmetrisch und im zweiten konstant ist. Es ist klar, daß der Fastring $T(G)$ genau dann abelsch ist, wenn es die Gruppe G ist.

(1.4) Jeder Fastring $(N, +, \cdot)$ ist eine Ω-Gruppe (im Sinne von Higgins [9]) mit dem Operatorenssystem $\Omega = \{\cdot\}$ und dem System $I = \{I_1, I_2\}$ von Identitäten, wobei I_1 das Assoziativgesetz der Multiplikation und I_2 das linksseitige Distributivgesetzt bedeuten. Damit erhalten wir Homomorphismen, Epi-, Mono- und Isomorphismen, Unterfastringe, Ideale von Fastringen, Faktorfastringe sowie direkte Produkte von Fastringen durch Spezialisierung der entsprechenden Begriffe für Ω-Gruppen.

Da bei einem Homomorphismus einer Ω-Gruppe G in eine Ω-Gruppe G' die Identitäten invariant sind (z. B. [7]), ist das homomorphe Bild eines Linksfastringes, eines nullsymmetrischen, konstanten oder abelschen Fastringes wieder ein Linksfastring, ein nullsymmetrischer, konstanter bzw. abelscher Fastring.

(1.5) Eine additiv geschriebene (nicht notwendig abelsche) Gruppe G heißt eine *N-Rechtsgruppe über dem Fastring* N (N sei ein beliebiger Fastring), im folgenden kurz *N-Gruppe* genannt, wenn es eine eindeutige Abbildung $G \times N \to G$ mit $(g, n) \mapsto gn$ gibt, die den beiden Bedingungen genügt:

$$\text{(i)} \quad g(n+m) = gn + gm$$

und

$$\text{(ii)} \quad g(nm) = (gn)m \quad \text{für alle } g \in G;\ n, m \in N.$$

Hieraus folgt

$$g0_N = 0_G \quad \text{für alle} \quad g \in G$$

und

$$g(-n) = -(gn) \quad \text{für alle} \quad g \in G,\ n \in N.$$

(Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden die Nullelemente des Fastringes N und der Gruppe G gleich bezeichnet. Im Zweifelsfall wird $0 \in G$ mit 0_G und $0 \in N$ mit 0_N bezeichnet.)

(1.6) Sei $(H_i | i \in I)$ eine Familie von N-Untergruppen der N-Gruppe G (N-Untergruppen sind wie üblich definiert). Dann ist $D = \bigcap (H_i | i \in I)$ wieder eine N-Untergruppe und wir können von der durch eine Untermenge M von G erzeugten N-Untergruppe $\langle M \rangle$ von G sprechen.

Die Menge $\mathfrak{U}(G)$ der N-Untergruppen einer N-Gruppe G bildet somit einen vollständigen Verband (Unterverband des Verbandes der Untergruppen der additiven Gruppe $(G, +)$) mit dem Nullelement $\langle 0 \rangle$.

Für diese N-Untergruppe gilt:

$$\langle 0 \rangle = \{0n / n \in N\} := 0N.$$

Im allgemeinen besteht die N-Untergruppe $0N$ von G aus mehr als einem Element wie das Beispiel eines nicht nullsymmetrischen Fastringes N als N-Gruppe N_N betrachtet, wegen $0n \neq 0$ für jedes konstante Element $n \in N_k$ von N, zeigt. Hieraus folgt

(1.7) a) *Für jeden Fastring N ist die N-Untergruppe $0N$ von N_N gleich dem konstanten Unterfastring N_k von N.*
b) *$0_G N$ sei die durch 0_G in G erzeugte N-Untergruppe, so wird $0_G N$ durch jedes Element $0_G n$ $(\in 0_G N)$ erzeugt.*
c) *Jeder N-Homomorphismus in eine N-Gruppe der Form $0_G N$ ist ein N-Epimorphismus.*

(1.8) Wir nennen eine N-Gruppe G *nullpunktiert, konstant* bzw. *trivial*, wenn jedes $n \in N$ auf G wie eine nullpunktierte, konstante Transformation bzw. wie die Nullabbildung von G operiert. Ist die additive Gruppe $(G, +)$ einer N-Gruppe kommutativ, so sprechen wir von einer *abelschen N-Gruppe*. Als Beispiele für nullpunktierte, konstante, triviale und abelsche N-Gruppen können die N-Gruppen N_N dienen, wobei N ein nullpunktierter, konstanter Fastring, Zerofastring bzw. abelscher Fastring ist.

(1.9) **Lemma.** *N ist genau dann ein nullsymmetrischer bzw. konstanter Fastring, wenn jede N-Gruppe G nullsymmetrisch bzw. konstant ist.*

Beweis. Sei zunächst N ein nullsymmetrischer Fastring. Dann ist für eine beliebige N-Gruppe G und $0_N \in N$, $0 \in G$ und $n \in N$ stets $0n = (0 \cdot 0_N)n = 0(0_N n) = 0 \cdot 0_N = 0$, d. h. G ist eine nullpunktierte N-Gruppe (vgl. z. B. [3], [16]). Für einen konstanten Fastring N und eine beliebige N-Gruppe G ist nach (1.7) $gn = g(0_N n) = (g0_N)n = 0n (= g' \neq 0)$, d. h. G ist eine konstante N-Gruppe.
Sei umgekehrt jede N-Gruppe über einem Fastring N nullpunktiert (konstant), so ist insbesondere auch N_N eine nullpunktierte (konstante) N-Gruppe, d. h. es gilt für die Rechtsmultiplikation in dem Fastring $0_N n = 0_N$ für alle $n \in N$ $(mn = 0_N n$ für alle $m, n \in N$, d. h. $n \in N_k$ nach (1.7)$)$.

Es gibt natürlich auch nullpunktierte N-Gruppen über einem nicht nullsymmetrischen Fastring N, z. B. ist jeder Faktorfastring N/I nach einem Ideal I, das gleichzeitig N-Untergruppe von N_N ist, als N-Gruppe nullpunktiert. (Beispiele für solche Ideale I eines nicht nullsymmetrischen Fastringes gaben z. B. Berman—Silverman in [2] an.) Aus (1.8) folgt

(1.10) *Eine N-Gruppe G ist genau dann nullpunktiert, wenn die N-Untergruppe* $\langle 0\rangle$ *von G nur aus dem Nullelement* 0 *von G besteht.*

Für abelsche Fastringe gilt

(1.11) *Wenn alle N-Gruppen über einem Fastring N abelsch sind, dann ist N ein abelscher Fastring. In diesem Fall ist* N_N *selbst eine abelsche N-Gruppe.*

Die Umkehrung von (1.11) gilt nicht, da sich die Kommutativität der Addition des Fastringes N nicht notwendig auf eine N-Gruppe überträgt, wie des Beispiel der nichtkommutativen Gruppen als Z-Gruppen, bzw. $(Z, 1)$-Gruppen*) aufgefaßt zeigt (Z bedeutet den Ring der ganzen rationalen Zahlen).

Daß es auch abelsche N-Gruppen über einem nicht abelschen Fastring N gibt, zeigt das folgende Beispiel: Es sei $I(S_3)$ der Fastring, der durch die inneren Automorphismen der symmetrischen Gruppe S_3 erzeugt wird. $I(S_3)$ ist nicht abelsch (1.3). Die additive Untergruppe A_3 von S_3 ist eine abelsche $I(S_3)$-Gruppe.

(1.12) Aus (1.6) und (1.10) folgt, daß jede N-Gruppe eine verallgemeinerte Ω-Gruppe (Ω-Gruppe im Sinne von Hämisch [8]) ist mit dem Operatorensystem $\Omega=\{N\}$ und der Menge der Identitäten $I=\{$(i), (ii) aus (1.5)$\}$, und daß insbesondere jede nullpunktierte N-Gruppe eine Ω-Gruppe im Sinne von Higgins [9] ist. Somit erhalten wir N-Homomorphismen, N-Epi-, N-Mono- und N-Isomorphismen, N-Kerne (bei Hämisch [8] Kongruenzkerne genannt), Faktor-N-Gruppen und (komplette) direkte Summen von N-Gruppen als Spezialisierung aus den entsprechenden Begriffen für verallgemeinerte Ω-Gruppen.

Hämisch hat in [8] gezeigt, daß jede Kongruenz π auf einer verallgemeinerten Ω-Gruppe G durch den Kongruenzkern $K=[0]_\pi$ (d. h. jener Kongruenzklasse bezüglich π, die das Nullelement 0 von $(G, +)$ enthält) eindeutig bestimmt ist, und daß je zwei Kongruenzkerne von G vertauschbar sind.

Damit bildet die Menge der Kongruenzkerne, im folgenden N-Kerne genannt, einer N-Gruppe G einen vollständigen modularen Verband $\mathfrak{K}(G)$ mit dem Nullelement $\{0\}$ [17], der offenbar ein Unterverband des Verbandes der Normalteiler der additiven Gruppe G ist, aber im allgemeinen kein Unter verband des Verbandes der N-Untergruppen der N-Gruppe G ist, da z. B. das Nullelement 0 eines nicht nullsymmetrischen Fastringes N keine (einelementige) N-Untergruppe von N_N bildet.

Andererseits ist $\mathfrak{K}(G)\cap\mathfrak{U}(G)\neq\emptyset$, da z. B. das Einselement beider Verbände die (nicht nullpunktierbe) N-Gruppe G ist.

(1.13) Im Sinne von (1.12) ist eine nichtleere Untermenge K einer N-Gruppe G genau dann ein N-Kern von G, wenn K ein Normalteiler der Gruppe G ist, und wenn für alle $g, g'\in G$ aus $g\equiv g' \bmod K$ stets $gn\equiv g'n \bmod K$ $\forall n\in N$ folgt.

*) Eine (N, D)-Gruppe ist eine N-Gruppe über einem distributiv erzeugten Fastring N, wobei D die multiplikative Unterhalbgruppe von $(N, \cdot)$ ist, die $(N, +)$ erzeugt (z. B. [6]).

Die letztere Bedingung ist offenbar äquivalent mit der (in [14] angegebenen) Eigenschaft:

$$(g+k)n-gn\in K \quad \text{für alle} \quad g\in G, \quad k\in K, \quad n\in N.$$

Ein N-Kern, der gleichzeitig N-Untergruppe der N-Gruppe G ist, heißt *N-Ideal*. Ein N-Kern (N-Ideal) der N-Gruppe N_N wird *Rechtskern (Rechtsideal)* des Fastringes N genannt.

(1.14) **Lemma.** *Der N-Kern $K=\ker\varphi$ des N-Homomorphismus $\varphi: G\to G'$ ist genau dann ein N-Ideal in G, wenn G' eine einelementige N-Untergruppe besitzt.*

BEWEIS. Aus der Definition des Kernes $K=\ker\varphi$ eines N-Homomorphismus φ und den Eigenschaften von φ folgt für alle $k\in K$ und $n\in N: (kn)\varphi=(k\varphi)n=0'n$ mit $0'\in G'$. Damit ist genau dann $kn\in K$ für alle $k\in K$, $n\in N$, wenn $0'n=0'$ für alle $n\in N$ in $\operatorname{im}\varphi\subseteqq G'$ gilt, d. h. $\langle 0'\rangle=0'$ eine einelementige N-Untergruppe von G' *ist*.

Hieraus ergeben sich die folgenden Aussagen

(1.15) Für einen N-Kern K der N-Gruppe G sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) K ist ein N-Ideal von G.
(2) Für die N-Untergruppe $0N$ von G gilt: $0N\subseteqq K$.
(3) Die Faktor-N-Gruppe G/K ist nullpunktiert.

(1.16) Eine N-Gruppe G ist genau dann nullpunktiert, wenn jeder N-Kern K von G ein N-Ideal von G ist.

BEWEIS. Da jede nullpunktierte N-Gruppe G eine Ω-Gruppe ist und Identitäten bzgl. Homomorphismen invariant sind, ist jedes N-homomorphe Bild einer nullpunktierten N-Gruppe G selbst nullpunktiert und folglich nach (1.15) jeder N-Kern von G ein N-Ideal (z. B. [3]).

Ist umgekehrt jeder N-Kern einer N-Gruppe G ein N-Ideal, so ist auch insbesondere der (einelementige) N-Kern $\{0\}$ ein solches. D. h. aber $0_G n=0_G$ für alle $n\in N$.

(1.17) **Lemma.** *A sei eine N-Untergruppe und K sei ein N-Kern einer N-Gruppe G. Dann ist die von A und K erzeugte N-Untergruppe von G gegeben durch*

$$\langle A, K\rangle = \{a+k/a\in A, k\in K\} = A+K = K+A.$$

BEWEIS. $A+K$ ist als Summe einer Untergruppe und eines Normalteilers der Gruppe G eine Untergruppe von G. Aus (1.13) folgt für alle $n\in N$, $a\in A$ und $k\in K$: $(a+k)n=k'+an=an+k''\in A+K=K+A$.

Die N-Untergruppe $A+K$ heißt die *Summe von A und K*. Gilt insbesondere für eine N-Gruppe $G=A+K$ mit $A\cap K=0$, so sprechen wir von einer *eindeutigen Summe* und nennen den N-Kern K ein *normales Komplement von A in G.*,
In Verallgemeinerung einer Retraktion [1], d.h. eines idempoten Endomorphismus einer Gruppe G, definieren wir

(1.18) Ein N-Epimorphismus $\varrho: G\to H$ einer N-Gruppe G auf eine N-Gruppe H heißt *N-Retraktion* und H ein *N-Retrakt* von G, wenn es einen N-Homomorphismus

$\mu: H \to G$ gibt, so daß $\mu\varrho = \mathrm{id}_H$, die identische Abbildung von H, ist. (vgl. z. B. [18]).

Es folgt leicht, daß μ ein N-Monomorphismus ist. Damit ist ein N-Retrakt H von G stets N-isomorph zu einer N-Untergruppe von G.

(1.19) **Lemma.** *Eine N-Gruppe H ist genau dann ein N-Retrakt der N-Gruppe G, wenn es in G eine zu H N-isomorphe normal komplementierte N-Untergruppe H' gibt. In diesem Fall ist $G = H' + \ker\varrho$ eine eindeutige Summe von H' und dem N-Kern* $\ker\varrho$ *der N-Retraktion $\varrho: G \to H$.*

Der Beweis kann analog dem Beweis von Satz 4.1 in [10] geführt werden und wird daher hier weggelassen.

(1.20) *Für jeden (nicht nullsymmetrischen) Fastring N ist der konstante Unterfastring N_k, als N-Gruppe betrachtet, ein N-Retrakt von N_N, der im allgemeinen kein N-Ideal ist. Ein normales Komplement von N_k in N_N ist der nullsymmetrische Unterfastring N_0 von N. Damit besitzt jeder Fastring N eine eindeutige Summendarstellung $N = N_0 + N_k$.**)

Beweis. Die Abbildung $\varrho: N_N \to 0N$ mit $n\varrho = 0n$ $\forall n \in N$ ist eine N-Retraktion mit dem N-Kern $\ker\varrho = N_0$ und der identischen Abbildung $id_{0N}: 0N \to 0N \subseteqq N_N$ als N-Monomorphismus, so daß $id_{0N}\varrho = id_{0N}$ gilt, wie man leicht nachrechnet. Daß N_k im allgemeinen kein Rechtskern von N ist, zeigt das Beispiel des Fastringes $T(S_3)$ der Transformationen der symmetrischen Gruppe $S_3 = \{0, a, b, c, d, f\}$ mit der Strukturtafel

+	0	a	b	c	d	f
0	0	a	b	c	d	f
a	a	0	d	f	b	c
b	b	f	0	d	c	a
c	c	d	f	0	a	b
d	d	c	a	b	f	0
f	f	b	c	a	0	d

Sei $\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & f \\ 0 & 0 & d & f & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_0(S_3)$, $\varkappa = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & f \\ a & a & a & a & a & a \end{pmatrix} \in T_k(S_3)$. Dann ist $\tau_0 - \varkappa + \tau_0 = $ $= \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d & f \\ a & a & b & c & a & a \end{pmatrix} \notin T_k(s_3)$ und folglich die additative Gruppe $T_k(S_3)$ kein Normalteiler in $T(S_3)$, also auch $T_k(S_3)$ kein Rechtskern in $T(S_3)$.

(1.21) Zum Beweis von (1.19) und im folgenden werden neben dem Homomorphiesatz für N-Gruppen auch die Isomorphiesätze benötigt. Ihre Gültigkeit folgt aus der allgemeinen Theorie für universelle Algebren (z. B. [7]). Sie werden daher hier für N-Gruppen nur angegeben:

*) Diese Summe ist im allgemeinen keine direkte Summe von Unterfastringen, wie in [2] behauptet wurde.

1. Isomorphiesatz. *Sind K ein N-Kern und A eine N-Untergruppe der N-Gruppe G, so ist $K \cap A$ ein N-Kern in der N-Untergruppe A und es gilt die N-Isomorphie*

$$(A+K)/K \cong_N A/(A \cap K).$$

2. Isomorphiesatz. *Ist K ein N-Kern der N-Gruppe G. Dann besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den N-Kernen H von G mit $K \subseteqq H \subseteqq G$ und den Faktor-N-Kernen H/K von G/K, wobei $H/K := \{h+k \,/\, h+K \in G/K,\ h \in H\}$ ein N-Kern der Faktor-N-Gruppe G/K ist. Die Faktor-N-Gruppen nach den entsprechenden N-Kernen sind N-isomorph, d. h. es gilt*

$$G/H \cong_N (G/K)/(H/K).$$

Insbesondere ist der Faktor-N-Kern H/K genau dann ein N-Ideal in G/K, wenn H ein N-Ideal in G ist.

§ 2

(2.1) Eine N-Gruppe G über einem beliebigen Fastring N heißt *injektiv*, wenn jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & B \\ & G \end{tikzcd}$$

wobei A eine N-Untergruppe der N-Gruppe B und μ ein N-Monomorphismus ist, in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

eingebettet werden kann.

Ist N ein Ring und sind A, B, G N-Moduln, so erhalten wir die übliche Definition für injektive Moduln über einem Ring.

Sei N ein Fastring mit dem Einselement $e(\neq 0)$. Wir betrachten die Klasse $\mathfrak{G}_N$ aller *unitären* N-Gruppen, d. h. aller N-Gruppen G mit der Eigenschaft, daß $ge=g$ für alle $g \in G$ gilt. Hier erhalten wir

(2.2) **Lemma.** *Jede N-Gruppe $G \in \mathfrak{G}_N$ der Form $G=0N$ ist injektiv.*

Beweis. Es seien A, $B \in \mathfrak{G}_N$ und A eine N-Untergruppe von B. Sei ferner $\varphi: A \to G$ ein N-Homomorphismus von A in $G=0N$. Da jede N-Gruppe der Form $0N$ nach (1.7) die Eigenschaft hat, daß jedes Element $0n \in 0N$ erzeugendes Element der ganzen N-Gruppe ist, folgt einmal, daß jeder N-Homomorphismus in $0N$ ein N-Epimorphismus ist und zum anderen, daß sich alle N-Homomorphismen $\varphi: A \to 0N$ nur durch N-Automorphismen von $0N$ unterscheiden. Daher kann $\varphi: A \to 0N$ in der Form $(an)\varphi = 0n\ \forall a \in A,\ n \in N$ angenommen werden. Dann ist die Abbildung

$$(bn)\varphi' := 0N \quad \text{für alle } b \in B, \quad n \in N$$

ein N-Homomorphismus von B auf $G=0N$, der auf A mit φ zusammenfällt.

Um allgemein zeigen zu können, daß jede abelsche N-Gruppe eine injektive Hülle besitzt, sind noch einige Vorbereitungen nötig.

(2.3) Wir fassen jetzt eine beliebige N-Gruppe G als verallgemeinerte Ω-Gruppe (1.12) mit den Identitäten (i), (ii) aus (1.5),

$$\text{(iii)} \quad g_k = 0k \text{ für alle } k \in N_k,\ g \in G$$

und

$$\text{(iv)} \quad 0n_0 = 0 \text{ für alle } n_0 \in N_0$$

auf, wobei N_k und N_0 den konstanten bzw. nullsymmetrischen Unterfastring von N bedeuten. Ist der Fastring N abelsch, so gilt außerdem

$$\text{(v)} \quad g(n+m) = g(m+n) \text{ für jedes } g \in G,\ n,\ m \in N.$$

Wir sprechen von einer abelschen oder von einer unitären verallgemeinerten Ω-Gruppe G, wenn außer (i)—(iv) noch

$$\text{(vi)} \quad g+g' = g'+g \text{ für alle } g, g' \in G,$$

bzw.

$$\text{(vii)} \quad ge = g\ \forall g \in G,\ e \in N$$

gilt.

In diesem Sinne verstehen wir unter einer *partiellen N-Gruppe* G_0 (analog [11]) eine additiv geschriebene (nicht notwendig abelsche) Gruppe mit partieller „N-Struktur"; d. h. die unären Operationen $n \in N$ sind auf G_0 nur teilweise definiert und erfüllen (falls sie definiert sind) die Identitäten (i)—(iv) (bzw. außerdem (v), (vi) oder (vii), je nachdem welche Klasse partieller N-Gruppen betrachtet wird).

Insbesondere sind also jede additiv geschriebene Gruppe $(G, +)$ und jeder N-Kern bzw. jede additive Untergruppe einer N-Gruppe partielle N-Gruppen.

Im folgenden besitz der Fastring N stets ein Einselement $e \neq 0$.

(2.4) Sei G_0 eine partielle N-Gruppe. Dann heißt die N-Gruppe $G = H_N(G_0)$ eine *exakte N-Hülle von G_0*, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:
(1) $G_0 \subseteqq G$, und die von G_0 in G erzeugte N-Untergruppe ist gleich G.
(2) Jeder beliebige (partielle) N-Homomorphismus $\varphi: G_0 \to A$ der partiellen N-Gruppe G_0 in eine beliebige N-Gruppe A kann derart zu einem N-Homomorphismus $\varphi': G \to A$ fortgesetzt werden, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \mu\varphi' = \varphi,$$

wenn μ die identische Abbildung von G_0 in G bedeutet.

Aus der Definition folgt: Wenn zu einer partiellen N-Gruppe G_0 eine exakte N-Hülle $H_N(G_0)$ existiert, dann ist sie bis auf N-Isomorphie eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Konstruktion in [11] kann der folgende Satz gezeigt werden:

(2.5) **Satz.** *Sei* $\mathfrak{G}_{PN}$ *die Klasse aller partieller N-Gruppen über einem beliebigen (festen) Fastring N. Dann existiert für jede partielle N-Gruppe* $G_0 \in \mathfrak{G}_{PN}$ *die exakte N-Hülle* $H_N(G_0)$ *in* $\mathfrak{G}_N$.

Beweis*) Sei G_0 eine partielle N-Gruppe aus $\mathfrak{G}_{PN}$. Wir bilden auf die folgende Art eine aufsteigende Folge partieller N-Gruppen

$$G_0 \subseteqq G_1 \subseteqq G_2 \subseteqq \ldots \subseteqq G_i \subseteqq \ldots$$

wobei

$$G_{i+1} = \Big(G_i * \sum^*_{\substack{n \in N \\ g_i \in G_i \text{ und} \\ g_i n \notin G_i}} \langle (g_i n) \rangle\Big) \Big/ H_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dabei bedeutet $\langle (g_i, n) \rangle$ die freie additiv geschriebene Gruppe, die durch das Symbol (g_i, n) mit $g_i \in G_i$, $n \in N$ und $g_i n \notin G_i$ erzeugt wird.

Wir definieren

$$g_i \circ n = \begin{cases} (g_i, n) & \text{falls } g_i n \text{ nicht in } G_i \text{ definiert ist,} \\ g_i n & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i = 0, 1, 2, \ldots$. (Im folgenden schreiben wir wieder $g_i n$ statt $g_i \circ n$.) H_{i+1} bedeutet für jedes i den Normalteiler der freien Summe, der durch alle Elemente der Form $g_i(n+m) - g_i m - g_i n$, $g_i(nm) - (g_i n)m$, $g_i k - 0k$, $0n$, $g_i a_N$ für alle $g_i \in G_i$, $n, m \in N$, $k \in N_k$ $n_0 \in N_0$, $a_N \in A_N$ erzeugt wird. Dabei sind N_k und N_0 der konstante bzw. nullsymmetrische Unterfastring von N and A_N dasjenige Ideal eines freien Fastringes F, so daß F/A_N isomorph zu N ist.**)

Dann ist G_{i+1} wieder eine partielle N-Gruppe, da G_{i+1} als Faktor-gruppe einer freien Summe von Gruppen selbst wieder eine Gruppe ist, und für alle $n \in N$ und $g_i \in G_i$ mit $g_i n \in G_{i+1}$ die Identitäten (i)—(iv) erfüllt sind. Andererseits braucht für $g_{i+1} \in G_{i+1}$ mit $g_{i+1} = g_i + g_i' n$ $(n \in N)$ das Element $g_{i+1} m = (g_i + g_i' n) m \notin G_{i+1}$ zu sein für $m \neq 0$. Es gilt $G_i \cap H_{i+1} = 0$ denn sei z. B. ein erzeugendes Element von H_{i+1} etwa $g_i(n+m) - g_i m - g_i n \in G_i$, dann ist — da G_i eine partielle N-Gruppe ist — dieses Element in G_i gleich Null. Analog schließt man für jedes andere erzeugende Element aus H_{i+1}, das gleichzeitig in G_i liegt. So folgt aus der Gültigkeit der Isomorphiesätze $(G_i + H_{i+1})/H_{i+1} \cong G_i/(G_i \cap H_{i+1}) \cong G_i$ und daher $G_i \subseteqq G_{i+1}$ für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ (genauer: G_i ist in G_{i+1} isomorph enthalten).

Die Vereinigung $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ (genauer: der direkte Limes) dieser Folge partieller N-Gruppen ist eine N-Gruppe. G ist als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von Gruppen selbsı eine additive Gruppe. Sei $g \in G$ ein beliebiges Element, dann gibt es einen Index $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so daß $g \in G_j$ ist und nach Konstruktion ist dann $gn \in G_{j+1}$ für alle $n \in N$, also $gn \in G$ für alle $g \in G$, $n \in N$. Wir haben noch die

*) Wir benutzen bei diesem Beweis, daß zu jeder Familie von (additiv geschriebenen) Gruppen die freie Summe (mit $\sum^*$ bzw. $*$ bezeichnet) existiert und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

**) Es sei hier bemerkt, daß wir jeweils den Normalteiler der entsprechenden freien Summe additiver Gruppen bilden, der durch die Identitäten der Klasse $\mathfrak{G}_{PN}$ erzeugt wird. Ist N ein abelscher Fastring, oder $\mathfrak{G}_{PN}$ die Klasse aller unitären partiellen N-Gruppen, oder die Klasse aller abelschen partiellen N- Gruppen, dann müssen die entsprechenden zugehörigen Identitäten susätzlich berücksichtigt werden.

Gültigkeit der Identitäten (i)—(iv) (bzw. gegebenenfalls (v), (vi) oder (vii)) nachzuweisen. Für $gn, gm \in G$ $(n, m \in N)$ gibt es einen Index $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so daß $g = g_j \in G_j$ und $g_j n, g_j m$, $g_j(n+m) \in G_{j+1}$ gilt. Da G_{j+1} eine partielle N-Gruppe ist, folgt $g_j n + g_j m = g_j(n+m)$. Also gilt (i) für alle $g \in G, n, m \in N$. Analog zeigt man die Gültigkeit der übrigen Identitäten in G. Die Gültigkeit der Fastringaxiome für den Operatorenbereich N folgt aus den Identitäten (i)—(iv), da zwei unäre Operationen auf G genau dann gleich sind, wenn sie dieselbe Abbildung auf G bewirken. Damit haben wir bewiesen, daß $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ eine N-Gruppe über dem Fastring N ist.

Wir haben nun zu beweisen, daß G auch die Eigenschaft (2) aus (2.4), also die Universalitätsbedingung erfüllt.

Sei $\varphi: G_0 \to A$ ein (partieller) N-Homomorphismus der partiellen N-Gruppe G_0 in eine N-Gruppe A. Wird definieren eine Abbildung $\varphi': G \to A$ auf folgende Weise:

Sei g ein beliebiges Element aus $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$, dann gibt es einen Index λ mit $g = g_{\lambda+1} \in G_{\lambda+1}$. $g_{\lambda+1}$ ist eine endliche Summe von Elementen der Form $g_{\lambda i}$ und $g_{\lambda j} n_j$ mit $g_{\lambda i}, g_{\lambda j} \in G_\lambda$, $n_j \in N$ (wobei $g_{\lambda j} n_j \notin G_\lambda$ und $i = 0, 1, \ldots, k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, l$ endliche Mengen durchlaufen und es kann jede mögliche Reihenfolge endlich vieler solcher Summanden auftreten). Es genügt g in der Form $g = g_{\lambda+1} = g_{\lambda 0} + g_{\lambda 1} n$ anzunehmen und wir definieren:

$$g_{\lambda+1}\varphi' := g_{\lambda 0}\varphi' + (g_{\lambda 1}\varphi')n \quad \text{für} \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

(2.6)

$$\text{mit} \quad g_0\varphi' := g_0\varphi \quad \text{für alle} \quad g_0 \in G_0.$$

Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion über λ, daß φ'_{G_λ} (d. h. die Einschränkung von φ' auf G_λ) für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ ein partieller N-Homomorphismus ist. Für $\lambda = 0$ folgt die Behauptung sofort aus der Definition. Sei φ'_{G_λ} der partieller N-Homomorphismus von G_λ. Dann folgt für $g_\lambda n \notin G_\lambda$, also $g_\lambda n = g'_{\lambda+1} \in G_{\lambda+1}$, aus (2.6), daß $g'_{\lambda+1}\varphi'_{G_{\lambda+1}} = (g_\lambda n)\varphi'_{G_{\lambda+1}} = (g_\lambda \varphi'_{G_\lambda})n = (g_\lambda \varphi'_{G_{\lambda+1}})n$ gilt, da $g_\lambda \in G_\lambda \subseteq G_{\lambda+1}$ ist. Hieraus folgt durch leichte Rechnung sofort, daß $\varphi'_{G_{\lambda+1}}$ ein partieller N-Homomorphismus ist, der insbesondere eine Erweiterung von φ'_{G_λ} darstellt.

φ' selbst ist ein N-Homomorphismus der N-Gruppe $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ in die N-Gruppe A, denn sind $g, g' \in G$ zwei beliebige Elemente, so gibt es einen Index i, so daß $g, g' \in G_i$ ist. Da φ' als Erweiterung von φ'_{G_i} auf G_i mit φ'_{G_i} übereinstimmt, ist $g\varphi' + g'\varphi' = (g + g')\varphi'$. Seien ferner $n \in N$ und $g \in G$ beliebig gewählt, dann gibt es wieder nach Konstruktion von G einen Index i, so daß $gn \in G_i$ ist und nach derselben Argumentation wie eben ist $(gn)\varphi' = (g\varphi')n$. Damit ist die N-Gruppe $G = H_N(G_0)$ die exakte N-Hülle der partiellen N-Gruppe G_0.

(2.7) **Lemma.** *Die exakte N-Hülle $H_N(\{0\})$ der trivialen Gruppe $G_0 = \{0\}$ ist die N-Gruppe $0N = \{0n / n \in N\}$, die N-isomorph zu dem konstanten Unterfastring N_k von N ist.*

BEWEIS. Wir wenden die Konstruktion der exakten N-Hülle (2.5) auf die partielle N-gruppe $G_0=\{0\}$ an. Damit erhalten wir $G_0=\{0\}$, $G_1=\big(\sum\limits_{n\in N}^{*}\langle 0,n\rangle\big)/H_1$. Wegen der Gültigkeit des „Linksdistributivgesetzes" haben alle Elemente $g_1\in G_1$ die Form

$$g_1=0n_1+0n_2+\ldots+0n_r=0(n_1+n_2+\ldots+n_r)=0n'$$

und wegen $(0n)m=0(nm)$ für alle $n, m\in N$ ist G_1 schon eine N-Gruppe. Damit ist $G_1=G_2=\ldots=G_i=\ldots$ für alle $i\geqq 1$, d. h. es ist $H_N(\{0\})=G_1=\{0n/n\in N\}$. Da $0n\neq 0$ genau dann gilt, wenn $n\in N_k$, gibt es einen N-Isomorphismus von $H_N(\{0\})$ auf N_k (als N-Untergruppe von N_N betrachtet).

Hieraus und aus (2) von (2.4) folgt

(2.8) **Lemma.** *Jede N-Gruppe der Form $G=0N$ ist ein N-homomorphes Bild des konstanten Unterfastringes N_k von N als N-Gruppe betrachtet.*

(2.9) Sei insbesondere R ein Ring mit dem Einselement e, und sei G_0 eine abelsche Gruppe. Dann ist in der Klasse $\mathfrak{G}_R$ der R-Moduln die exakte R-Hülle $G=H_R(G_0)=$ $=G_0R$ ein unitärer R-Modul, wobei G_0R (nach [10]) die Menge aller endlichen Summen von Elementen der Form g_0r, $g_0\in G_0$, $r\in R$ bedeutet.

BEWEIS. Wir wenden die Konstruktion der exakten R-Hülle auf die Klasse $\mathfrak{G}_{PR}$ aller partiellen R-Moduln an, indem wir jede abelsche Gruppe G_0 als partiellen R-Modul betrachten und zusätlich die Identitäten

$$\text{(viii)}\quad (g+g')r=gr+g'r,\ \forall g, g'\in G_0,\ r\in R,$$

und (vi) $g+g'=g'+g\ \forall g, g'\in G_0$ zu fordern haben, falls die Elemente $(g+g')r, gr, g'r$ in G_0 definiert sind. (Die Identität (iii) entfällt trivialer Weise, da jeder Ring ein nullsymmetrischer Fastring ist). Die freie Summe von abelschen Gruppen wird wegen (vi) in der Klasse $\mathfrak{G}_{PR}$ zur (diskreten) direkten Summe. Damit erhalten wir eine aufsteigende Folge partieller R-Moduln $G_0\subseteqq G_1\subseteqq G_2\subseteqq\ldots\subseteqq G_i\subseteqq\ldots$ mit

$$G_{i+1}=\big(G_i\oplus\sum\nolimits^{\oplus}\langle g_ir\rangle\big)/H_{i+1},\ r\in R,\ g_i\in G_i,\ g_ir\notin G_i\quad \text{für}\quad i=0,1,2,\ldots,$$

wobei hier H_{i+1} jeweils die abelsche Untergruppe ist, die durch alle Elemente der Form $g_i(r+s)-g_ir-g_is$, $(g_i+g_i')r-g_ir-g_i'r$, $g_i(rs)-(g_ir)s$, $0r$, g_ie-g_i, g_i0_R für alle $g_i, g_i'\in G_i$; $r, s\in R$, und $a_R\in A_R$ erzeugt wird. Jedes Element $g_1\in G_1$ ist eine endliche Summe von Elementen aus G_0 und der Form g_0r mit $g_0\in G_0$, $r\in R$. Wegen (viii) ist G_1 schon ein R-Modul und jedes Element von G_1 ist eine endliche Summe von Elementen der Form g_0r, $g_0\in G_0$, $r\in R$. Also gilt $H_R(G_0)=G_0R$.

(2.10) Sei N ein beliebiger (aber fester) Fastring. Dann definiert die Konstruktion der exakten N-Hülle eine Hüllenoperation auf der Klasse $\mathfrak{G}_{PN}$ aller partiellen N-Gruppen.

Nach der Definition einer Hüllenoperation (z. B. [7]) haben wir noch die Monotonie und die Idempotenz der exakten N-Hülle zu zeigen. Sei $G_0\in\mathfrak{G}_{PN}$, so folgt aus der Konstruktion sofort die Idempotenz der exakten N-Hülle, d. h. $H_N(H_N(G_0))=H_N(G_0)$.

Um die Monotonie zu zeigen, seien A_0, B_0 partielle N-Gruppen mit $A_0\subseteqq B_0$. Sei $A_0\subseteqq A_1\subseteqq\ldots\subseteqq A_i\subseteqq\ldots$ die in (2.5) definierte aufsteigende Folge partieller N-

Gruppen bezüglich der exakten N-Hülle $H_N(A_0)$ und sei $B_0 \subseteqq B_1 \subseteqq \ldots \subseteqq B_i \subseteqq \ldots$ eine zu $H_N(B_0)$ gehörende Folge partieller N-Gruppen, wobei die A_i und B_i $(i=1, 2, \ldots)$ wie in (2.5) definiert sind. Da die Glieder der beiden Folgen induktiv definiert sind, kann man leicht nachweisen, daß für jedes $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $A_i \subseteqq B_i$ gilt und folglich $H_N(A_0) \subseteqq H_N(B_0)$.

(2.11) **Satz.** *Sei G_0 eine injektive additive Gruppe, und sei N ein beliebiger Fastring. Dann ist die exakte N-Hülle $H_N(G_0)$ eine injektive N-Gruppe.*

Beweis. Es sei A eine N-Untergruppe der N-Gruppe B, und es sei $\varphi: A \to H_N(G_0)$ ein N-Homomorphismus von A in $H_N(G_0)$. Dann ist φ insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $\varphi_+:(A, +) \to (H_N(G_0), +)$. Auf Grund der Konstruktion $H_N(G_0)$ ist G_0 eine additive Untergruppe von $(H_N(G_0), +)$ und $G_0' = G_0 \cap \operatorname{im} \varphi$ eine additive Untergruppe von $G_0 \subseteqq (H_N(G_0), +)$. Das vollständige Original von $G_0' = G_0 \cap \operatorname{im} \varphi$ bei φ_+ ist eine additive Untergruppe $A_0' = A_0 + \ker \varphi$ von $(A, +)$ und es ist $H_N(A_0') = A$; denn einerseits ist auf Grund der Monotonieeigenschaft des Hüllenoperators $H_N(H_N(A_0')) \subseteqq H_N(A) = A$ und andererseits ist $A \subseteqq H_N(A_0')$, da folgendes gilt:

Wir betrachten die aufsteigenden Folgen der partiellen N-Gruppen

$$(*) \qquad G_0 \cap \operatorname{im} \varphi \subseteqq G_1 \cap \operatorname{im} \varphi \subseteqq G_2 \cap \operatorname{im} \varphi \subseteqq \ldots \subseteqq G_i \cap \operatorname{im} \varphi \subseteqq \ldots$$

und ihrer vollständigen Originale bei φ_+

$$A_0 + \ker \varphi \subseteqq A_1 + \ker \varphi \subseteqq A_2 + \ker \varphi \subseteqq \ldots \subseteqq A_i + \ker \varphi \subseteqq \ldots,$$

die einander eineindeutig zugeordnet sind (auf Grund der Gruppentheorie). Sei nun a ein beliebiges Element aus A. Dann gibt es wegen

$$H_N(G_0 \cap \operatorname{im} \varphi) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (G_i \cap \operatorname{im} \varphi) = H_N(G_0) \cap \operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} \varphi$$

einen Index i $(i \in \{0, 1, 2, \ldots\})$, so daß $a\varphi \in G_i \cap \operatorname{im} \varphi$ ist. Damit ist $a \in A_i + \ker \varphi$ und folglich $a \in H_N(A_0 + \ker \varphi)$.

Sei nun $(B_0, +)$ eine additive Untergruppe von B mit der Eigenschaft, daß $A_0 + \ker \varphi \subseteqq (B_0, +)$ und $H_N(B_0) = B$ ist. (Eine solche Untergruppe existiert, da insbesondere B selbst wegen der Idempotenz des Hüllenoperators H_N diese Eigenschaften wegen $A = H_N(A_0 + \ker \varphi) \subseteqq B$ erfüllt.) Da G_0 eine injektive additive Gruppe ist, läßt sich der Gruppenhomomorphismus $\varphi / A_0 + \ker \varphi := \varphi_0 : A_0 + {} + \ker \varphi \to G_0$ erweitern zu einem Gruppenhomomorphismus $\eta_0 : B_0 \to G_0$. Wir definieren nun eine Abbildung $\eta : H_N(B_0) \to H_N(G_0)$ auf die folgende Art: Sei $B_0 \subseteqq B_1 \subseteqq B_2 \subseteqq \ldots \subseteqq B_i \subseteqq \ldots$ eine Folge partieller N-Gruppen derart, daß $H_N(B_0) = {} = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = B$ ist und für jedes $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $A_i + \ker \varphi \subseteqq B_i$ gilt, wobei die $A_i + \ker \varphi$ die vollständigen Originale der partiellen N-Gruppen $G_i \cap \operatorname{im} \varphi$ der Folge $(*)$ sind. Sei $b \in B$ ein beliebiges Element, dann gibt es einen Index $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so daß $b = b_{i+1} \in B_{i+1}$ ist. Nach der Konstruktion der partiellen N-Gruppen B_i können wir b in der Form $b = b_{i0} + b_{i1} n$ annehmen, da wir höchstens endlich viele solcher Summanden $b_i \in B_i$ und $b_i n \notin B_i$, $b_i n \in B_{i+1}$ haben, wobei die

Reihenfolge der Summanden eine andere als die angegebene sein kann. Dann definieren wir:

$$b\eta := \begin{cases} b\eta_0 & \text{für} \quad b \in B_0 \\ b\varphi & \text{für} \quad b \in A \\ b_{i+1}\eta = b_{i0}\eta + (b_{i1}\eta)n & \text{für} \quad b \in B_{i+1} \setminus A_{i+1},\ n \in N \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Analog zu (2.5) kann man nachweisen, daß η ein N-Homomorphismus ist, der auf der N-Gruppe A mit φ zusammenfällt.

(2.12) Da die triviale additive Gruppe $\{0\}$ stets injektiv ist, folgt aus dem eben bewiesenen Satz neben (2.2) auch, daß die exakte N-Hülle $H_N(\{0\}) = 0N$ von $\{0\}$ stets eine injektive N-Gruppe ist, d. h. N_k ist als N-Gruppe injektiv.

Wir können nun zeigen

(2.13) **Satz.** *Jede abelsche N-Gruppe A über einem abelscheen Fastring N kann in eine injektive N-Gruppe eingebettet werden.*

Beweis. Zum Beweis benutzen wir die bekannten Sätze aus der Gruppentheorie die besagen, daß genau die dividierbaren abelschen Gruppen injektiv sind, und daß jede abelsche Gruppe eine dividierbare abelsche Hülle besitzt.

Sei nun A eine beliebige abelsche N-Gruppe, so gibt es eine injektive abelsche Gruppe $(A_0, +)$ die die additive Gruppe $(A, +)$ von A enthält. Nach (2.10) gilt für die exakten N-Hüllen der beiden additiven Gruppen $A \subseteqq A_0$ die Inklusion $H_N(A) = A \subseteqq H_N(A_0)$, und nach (2.11) ist $H_N(A_0)$ die gesuchte injektive N-Gruppe, die die abelsche N-Gruppe A enthält.

Aus (2.13) folgt

(2.14) **Satz.** *Die in* (2.13) *erhaltene injektive Erweiterung einer abelschen N-Gruppe ist eine minimale injektive Erweiterung, die bis auf N-Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

(2.15) Wir erhalten damit insbesondere, daß in der Varietät $\mathfrak{G}_{AN}$ aller abelschen N-Gruppen zu jeder N-Gruppe $A \in \mathfrak{G}_{AN}$ eine injektive Hülle existiert und man kann analog den Methoden in [4] zeigen, daß eine minimale injektive Erweiterung einer N-Gruppe $A \in \mathfrak{G}_{AN}$ gleich der maximalen wesentlichen Erweiterung (2.16) von A ist. Dies sei hier ohne Beweis vermerkt.

Zum Abschluß dieser Arbeit sollen noch zwei zur Injektivität äquivalente Eigenschaften abelscher N-Gruppen angegeben werden, die entsprechende Eigenschaften aus der Theorie der R-Modkln verallgemeinern.

(2.16) Es sei A eine N-Untergruppe der N-Gruppe G über einem beliebigen Fastring N. A heißt *wesentlich in G*, oder G eine *wesentliche Erweiterung* von A, wenn für jeden N-Kern K von G mit $K \cap A = 0$ stets $K = 0$ folgt.

Offenbar ist jede N-Gruppe G eine wesentliche Erweiterung von sich selbst; diese heißt unecht, jede andere echt. Ist insbesondere A ein N-Kern von G mit obiger Eigenschaft, so heißt A *groß* in G [15]. Sind N ein Ring und A, G R-Moduln, so erhalten wir die übliche Definition einer wesentlichen Erweiterung für R-Moduln.

(2.17) **Lemma.** *In jeder echten Erweiterung E einer N-Gruppe G gibt es einen N-Kern K mit $G \cap K = 0$, so daß $E/K \supset (G+K)/K \cong_N G$ eine wesentliche Erweiterung von G ist.*

Beweis. Sei E eine echte Erweiterung der N-Gruppe G. Die Menge der N-Kerne $K_i (i \in I)$ von E mit $K_i \cap G = 0$ ist durch Inklusion induktiv geordnet. Sie besitzt somit nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element K. Wir betrachten die Faktor-N-Gruppe E/K. Sei H/K ein beliebiger echter Faktor-N-Kern (wie in (1.21) definiert) von E/K mit $H/K \cap (G+K)/K = 0$. Das bedeutet aber $E \supset H \supseteqq K$ und $H \cap G = 0$. Da K ein maximaler N-Kern von E bezüglich der Eigenschaft $K \cap G = 0$ war, muß $H = K$ sein, also $H/K = 0$.

(2.18) **Lemma.** *Sei G eine injektive N-Gruppe. Dann ist jeder N-Retrakt H von G injektiv.*

Beweis. Sei H ein N-Retrakt von G mit der N-Retraktion $\varrho: G \to H$ und dem N-Homomorphismus $\mu: H \to G$ mit $\mu\varrho = id_H$. Ferner sei A eine beliebige N-Untergruppe der N-Grupe B, und $\varphi: A \to H$ sei ein beliebiger N-Homomorphismus von A in H. Dann ist $\eta = \varphi\mu: A \to G$ ein N-Homomorphismus von A in G, der auf Grund der Voraussetzung zu einem N-Homomorphismus $\eta': B \to G$ erweitert werden kann. Dann ist $\eta'\varrho: B \to H$ eine Erweiterung des N-Homomorphismus $\varphi: A \to H$, denn für alle $a \in A$ ist

$$a(\eta'\varrho) = a(\varphi\mu)\varrho = (a\varphi)(\mu\varrho) = a\varphi.$$

(2.19) **Satz.** *Für eine abelsche N-Gruppe G aus der Varietät aller abelschen N-Gruppen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) *G ist eine injektive N-Gruppe.*
(b) *Sei E eine Erweiterung von G, dann ist G ein N-Retrakt von E.*
(c) *G besitzt keine echte wesentliche Erweiterung.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Sei E eine beliebige Erweiterung von G, d. h. G ist eine N-Untergruppe von E. Da G injektiv ist, gibt es insbesondere zu der identischen Abbildung id_G von G eine Erweiterung $\eta: E \to G$, die wegen $\eta_G = id_G$ ein N-Epimorphismus ist.

(b)$\Rightarrow$(c): G sei nun N-Retrakt einer beliebigen echten Erweiterung E von G. Dann besitzt E nach (1.19) eine eindeutige Summendarstellung $E = G + K$ mit $K \cap G = \{0\}$, wobei K als normales Komplement von G in E ein N-Kern von E ist. Da $E \supset G$ vorausgesetzt ist, folgt $K \neq \{0\}$. Also gilt (c).

(c)$\Rightarrow$(a): Sei E eine beliebige Erweiterung der N-Gruppe G. Dann ist nach (2.17) mit der dortigen Symbolik E/K eine wesentliche Erweiterung von G. Da G nach Voraussetzung keine echte wesentliche Erweiterung besitzt, ist $E/K \cong_N G$ und folglich G ein N-Retrakt von E. Dies gilt insbesondere auch für eine injektive Erweiterung E von G. Als N-Retrakt einer injektiven N-Gruppe E ist G nach (2.18) selbst injektiv.

Zitierte Literatur

[1] R. BAER, Absolute retracts in group theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 501—506.

[2] G. BERMAN—R. SILVERMAN, Near-rings, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 23—34.

[3] G. BETSCH, Struktursätze für Fastringe, *Doktor—Dissertation, Universität Tübingen,* 1963.

[4] G. ECKMANN—A. SCHOPF, Über injektive Moduln, *Arch. Math.* **4** (1953), 75—78.

[5] A. FRÖHLICH, Distributively generated near-rings, I, II, *Proc. London Math. Soc.* **8** (1958), 76—94; 95—108.

[6] A. FRÖHLICH, On groups over a d.g. near-ring. I, II, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **11** (1960), 193—210; 211—228.

[7] G. GRÄTZER, Universal algebra; *Toronto* 1968.

[8] W. HÄMISCH, Über die Topologie in der Algebra, *Math. Z.* **60** (1954), 458—487.

[9] P. J. HIGGINS, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956), 366—416.

[10] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über artinsche Ringe, *Budapest* 1968.

[11] A. G. KUROŠ, Свободные суммы мультиоператорных групп; *Acta. Sci. Math. Szeged (Hung.)* **21** (1960), 187—196.

[12] A. G. KUROŠ, Gruppentheorie I, II; *Berlin* 1970, 1972.

[13] R. LANCKAU, Das verallgemeinerte freie Produkt in primitiven Klassen universeller Algebren I, II, *Publ. Math. (Debrecen)* **16** (1969), 307—323; **17** (1970), 321—331.

[14] R. MLITZ, Jacobson-Radikale in Fastringen mit einseitiger Null, *Math. Nachr.* **63** (1974), 49—65.

[15] Chr. RIEDL, Radikale für Fastmoduln, Fastringe und Kompositionsringe, *Doktor-Dissertation, Universität Wien,* 1966.

[16] R. J. ROTH, The structure of near-rings and near-ring modules, *Doktor-Dissertation, Duke-University,* 1962.

[17] E. T. SCHMIDT, Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen, *Math. Forschungsberichte,* XXV. *Berlin,* 1969.

[18] H. SCHUBERT, Kategorien, I, II; *Berlin* 1970.

[19] J. TIMM, Zur Theorie der (nicht notwendig assoziativen) Fastringe; *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **35** (1970), 14—31.

ADRESSE DES AUTORS:
RENATE PREHN
PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE ERFURT—MÜHLHAUSEN
SEKTION MATHEMATIK—PHYSIK
501 ERFURT NORDHÄUSER STR. 63

(Eingegangen am 11 Dezember 1975.)