Untergruppen und Faktoren torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2

Von O. MUTZBAUER (Würzburg)

1. Einleitung

Diese Arbeit gibt einen Überblick über die Untergruppen und Faktoren torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, beschrieben durch Charakteristiken [3]. Einige der hier bewiesenen Sätze sind von Beaumont und Pierce [1] auf anderem Wege gezeigt worden. Wenn hier zum Teil neue Beweise bekannter Sätze angegeben werden, so deshalb, um zu demonstrieren, daß die in [3] angegebenen Invarianten eine „geschlossene" Theorie für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2 ermöglichen.

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{P}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen, der ganzen und der Primzahlen. Alle anderen Notationen werden aus Fuchs [2] übernommen, sofern keine eigenen Definitionen gegeben werden.

2. Charakteristiken

Eine Charakteristik ist nach [3, (7)] eine Folge

$$\mathbf{M} := \{M_p \mid p \in \mathbf{P}\} \tag{1}$$

von 2×2-Matrizen M_p der folgenden Gestalt:

$$\begin{cases} M_p := \begin{pmatrix} p^{-m_p} & p^{-n_p}\pi_p \\ 0 & p^{-n_p} \end{pmatrix} \\ \text{mit} \quad \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \quad \text{und} \quad \pi_p = \pi_p^{(|m_p - n_p|)}; \\ \text{für} \quad m_p \leqq n_p \quad \text{gilt} \quad \pi_p \in \mathbf{Q}_p^*, \\ \text{für} \quad m_p > n_p \quad \text{gilt} \quad \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^* \quad \text{oder} \quad \pi_p = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$\mathbf{K}_p^*$ und $\mathbf{Q}_p^*$ bezeichnen den Körper der p-adischen Zahlen bzw. den Ring der p-adischen ganzen Zahlen. Für $k \in \mathbf{N}$ und $\beta \in \mathbf{K}_p^*$ sei

$$\beta^{(k)} := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j p^j & \text{für} \quad \beta \in \mathbf{Q}_p^* \\ [(\beta^{-1})^{(k)}]^{-1} & \text{für} \quad \beta \notin \mathbf{Q}_p^* \quad \text{und} \quad (\beta^{-1})^{(k)} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3}$$

mit der p-adischen Standardentwicklung

$$\beta = \sum_{j=l}^{\infty} \beta_j p^j \quad (0 \leqq \beta_j < p,\ l \in \mathbf{Z}). \tag{4}$$

Mit $\mathfrak{M}$ wird die Menge aller Charakteristiken benannt. Für $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}_p^*$, $0 < l \leqq \infty$ und zwei unabhängigen Elementen u, v des rationalen Vektorraumes $\mathbf{Q}^2$ der Dimension 2 läßt sich eine (evtl. unendliche) Folge von Elementen aus $\mathbf{Q}^2$ angeben:

$$p^{-l}(\alpha u + \beta v) := \{p^{-(k+1)}(\alpha^{(k+1)} u + \beta^{(k+1)} v) \in \mathbf{Q}^2 | 0 \leqq k < l\}. \tag{5}$$

Jede torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 läßt sich in $\mathbf{Q}^2$ einbetten. Nun kann man nach [3, Lemma 1] einer Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ bis auf Isomorphie genau eine Gruppe $G = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle \sim \mathbf{M}$ zuordnen, nämlich das Gruppenerzeugnis der folgenden Elemente aus $\mathbf{Q}^2$:

$$G = \langle u,\ v,\ p^{-m_p} u,\ p^{-n_p}(v + \pi_p u),\ q^{-m_q}(u + \pi_q^{-1} v),\ q^{-n_q} v \,|\, p, q \in \mathbf{P},\ \pi_p \in \mathbf{Q}_p^*,\ \pi_q \notin \mathbf{Q}_q^* \rangle. \tag{6}$$

Hält man die Basis u, v von G fest, so ist die Zuordnung $G \mapsto \mathbf{M}$ umkehrbar eindeutig. Das Isomorphieproblem reduziert sich somit auf die Untersuchungen der Basistransformationen in G. Nach [3, Lemma 2] gilt für $G = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$ mit $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ und $a, b \in \mathbf{Q}$: $au + bv \in G$ genau dann, wenn

$$\begin{cases} \text{(i)}\ a, b \in \langle p^{-m_p}, p^{-n_p} | p \in \mathbf{P} \rangle \\ \quad \text{und wenn für alle Primzahlen } p \in \mathbf{P} \text{ gilt:} \\ \text{(ii)}\ p^{m_p}(b\pi_p - a) \in \mathbf{Q}_p^* \quad \text{für} \quad m_p \leqq n_p \quad \text{und} \quad m_p < \infty, \\ \quad p^{n_p}(a\pi_p^{-1} - b) \in \mathbf{Q}_p^* \quad \text{für} \quad m_p > n_p \quad \text{und} \quad \pi_p \neq 0, \\ \quad p^{n_p} b \in \mathbf{Q}_p^* \quad \text{für} \quad m_p > n_p \quad \text{und} \quad \pi_p = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Eine rationale 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ beschreibt genau dann eine Basistransformation bzgl. $\mathbf{M}$ (d.h. $u^A := au + bv$, $v^A := cu + dv \in G = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$), wenn gilt:

$$\begin{cases} \text{(i)}\ ad - bc \neq 0 \\ \text{(ii) für } a, b \text{ und für } c, d \text{ gilt jeweils die Formel (7).} \end{cases} \tag{8}$$

Zwei Charakteristiken $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$ beschreiben nach [3, Satz 1] genau dann isomorphe Gruppen, wenn es eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M}$ gibt, so daß $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^A$ ist, wobei die Transformation der Charakteristik $\mathbf{M}$ durch A wie folgt vorzunehmen ist:

Sei $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Die Indizierung mit p wird weggelassen. $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^A$ mittels

$$M_p = \begin{pmatrix} p^{-m} & p^{-n}\pi \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \mapsto M_p^A = \begin{pmatrix} p^{-m^A} & p^{-n^A}\pi^A \\ 0 & p^{-n^A} \end{pmatrix} \tag{9}$$

für alle Primzahlen $p \in \mathbf{P}$. Genauer wird vereinbart:

$$\begin{cases} \text{Seien } k, x, y, z \in \mathbf{Z},\ k \geqq 0, \text{ minimal bzgl. } p^x a,\ p^x b,\ p^y c,\ p^y d \in \mathbf{Q}_p^* \\ p^z(a + c\pi),\ p^z(d + b\pi),\ p^{x+z-k}(ad - bc) \in \mathbf{Q}_p^* \text{ für } m \leqq n, \\ p^z(a + c\pi^{-1}),\ p^z(b + d\pi^{-1}),\ p^{y+z-k}(ad - bc) \in \mathbf{Q}_p^* \text{ für } m > n \ (\pi = 0 \Rightarrow \pi^{-1} := 0). \end{cases} \tag{10}$$

Seien

$$(11)\qquad \begin{cases} m' := \begin{cases} \max(m+x, 0) & \text{für} \quad m \leqq n \\ \max(n+y, 0) & \text{für} \quad m > n, \end{cases} \\ n' := \begin{cases} \max(n+z, 0) & \text{für} \quad m \leqq n \\ \max(m+z, 0) & \text{für} \quad m > n, \end{cases} \\ k' := \min(k, \min(m', n')). \end{cases}$$

Einige Fälle werden zusammengefaßt:

$$(*)\qquad \begin{cases} m \leqq n, m' \leqq n' & \text{und} \quad [p^z(d+b\pi)]^{(n'-m'+k')} = 0, \\ m > n, m' \leqq n', \pi \neq 0 & \text{und} \quad [p^z(b+d\pi^{-1})]^{(n'-m'+k')} = 0, \\ m > n, m' > n' & \text{und} \quad (p^y d)^{(m'-n'+k')} = 0, \\ m \leqq n, m' > n' & \text{und} \quad (p^x b)^{(m'-n'+k')} = 0, \\ m > n, m' \leqq n', \pi = 0 & \text{und} \quad (p^x b)^{(n'-m'+k')} = 0. \end{cases}$$

Es wird definiert:

$$(12)\quad \pi^A := \begin{cases} [(c+a\pi)(d+b\pi)^{-1}]^{(|n'-m'|+k')} & \text{für} \quad m \leqq n, m' \leqq n' \quad \text{oder} \\ & \phantom{\text{für}} \quad m > n, m' \leqq n', \pi \neq 0 \quad \text{ohne } (*) \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für} \quad m \leqq n, m' > n' \quad \text{oder} \\ & \phantom{\text{für}} \quad m > n, m' \leqq n', \pi = 0 \quad \text{ohne } (*) \\ \left(\dfrac{c}{d}\right)^{(|n'-m'|+k')} & \text{für} \quad m > n, m' > n' \quad \text{ohne } (*) \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

und weiter

$$(13)\qquad \begin{cases} m^A := \begin{cases} \max(m', n'), & \text{für} \quad \pi^A \notin \mathbf{Q}_p^* \quad \text{oder für} \quad (*) \\ \min(m', n') - k' & \text{für} \quad \pi^A \in \mathbf{Q}_p^* \quad \text{und nicht} \quad (*), \end{cases} \\ n^A := \begin{cases} \min(m', n') - k' & \text{für} \quad \pi^A \notin \mathbf{Q}_p^* \quad \text{oder für} \quad (*) \\ \max(m', n') & \text{für} \quad \pi^A \in \mathbf{Q}_p^* \quad \text{und nicht} \quad (*). \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist die Operation $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^A$ vollständig beschrieben.

Es sei

$$P^*(\mathbf{M}) := \{p \in \mathbf{P} \mid m_p > n_p \text{ und } \pi_p = 0\}.$$

3. Untergruppen

Zwei Charakteristiken $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ heißen äquivalent, $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}'$, wenn es eine Basistransformation $A \in GL(2, \mathbf{Q})$ bzgl. $\mathbf{M}$ gibt mit $\mathbf{M}^A = \mathbf{M}'$. Nach [3, Satz 1] sind $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}'$ genau dann äquivalent, wenn sie isomorphe Gruppen beschreiben, es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathfrak{M}$ aller Charakteristiken. Eine Äquivalenzklasse in $\mathfrak{M}$ heißt ein Typ $\mathbf{t}$. Die Gruppe G heißt vom Typ $\mathbf{t} = \mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(\mathbf{M})$, wenn es eine Charakteristik $\mathbf{M} \in \mathbf{t}$ gibt mit $\mathbf{M} \sim G$. Dieser Typ ist eine echte Invariante für Gruppen des Ranges 2, denn es gilt:

$$G \cong H \Leftrightarrow \mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H).$$

Wie auch für Gruppen des Ranges 1 definiert man für Charakteristiken aus $\mathfrak{M}$ (2-Charakteristiken im Unterschied zu 1-Charakteristiken der Gruppen des Ranges 1) eine Ordnung. Dazu wird eine Bezeichnung für p-adische Zahlen $\pi \in \mathbf{K}_p^*$ benötigt:

$$\text{(14)} \quad \begin{gathered} \mathcal{O}_p(\pi) := x \in \mathbf{Z} \quad \text{mit } x \text{ minimal bzgl. } p^{-x}\pi \in \mathbf{Q}_p^*, \quad \text{d.h.} \\ \mathcal{O}_p(\pi) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \neq \pi \in \mathbf{Q}_p^*, \quad \mathcal{O}_p(0) := \infty \quad \text{und} \quad \mathcal{O}_p(\pi^{-1}) = -\mathcal{O}_p(\pi). \end{gathered}$$

Definition. Seien $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, $k_p' := \min(m_p', n_p')$ und $l_p := \max(m_p, n_p)$. $\mathbf{M}$ ist in $\mathbf{M}'$ enthalten, $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'$, wenn

(i) für alle Primzahlen $p \in \mathbf{P}$ gilt: $m_p \leqq m_p'$ und $n_p \leqq n_p'$,

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} \pi_p = \pi_p' \quad \text{für} \quad l_p - k_p' = \infty \quad (\infty - \infty := 0) \\ \text{oder} \\ l_p - k_p' \leqq \begin{cases} \mathcal{O}_p(\pi_p - \pi_p') & \text{für} \quad \pi_p, \pi_p' \in \mathbf{Q}_p^* \\ \mathcal{O}_p(\pi_p^{-1} - \pi_p'^{-1}) & \text{für} \quad \pi_p, \pi_p' \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^* \\ -\mathcal{O}_p(\pi_p') & \text{für} \quad p \in P^*(\mathbf{M}) \setminus P^*(\mathbf{M}') \\ -\mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für} \quad p \in P^*(\mathbf{M}') \setminus P^*(\mathbf{M}). \end{cases} \end{cases}$$

Die Bedeutung dieser Ordnung für 2-Charakteristiken klärt der folgende Sachverhalt.

Lemma 1. *Seien* $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, $G := \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$ *und* $G' := \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle$. *G ist genau dann Untergruppe von G', wenn* $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'$ *ist.*

BEWEIS. Es genügt die lokalen p-Strukturen einzeln zu betrachten. Der Fall $m_p \leqq n_p$ und $m_p' < n_p'$ wird exemplarisch behandelt und die Indizierung mit p wird weggelassen. Es ist zu zeigen, daß die Elemente $p^{-m}u$ und $p^{-n}(v + \pi u)$ modulo $\langle u, v \rangle$ genau dann ganzzahlige Linearkombinationen von $p^{-m'}u$ und $p^{-n'}(v + \pi' u)$ sind, wenn $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'$ gilt. Es folgt sofort $m \leqq m'$ und $n \leqq n'$. Setzt man mit ganzen Zahlen x, y:

$$p^{-n}(v + \pi u) \equiv x p^{-m'} u + y p^{-n'}(v + \pi' u) \quad (\mathrm{mod}\ \langle u, v \rangle)$$

so impliziert $n = \infty$ sofort $\pi = \pi'$. Für $m' = \infty$ können π, π' beliebig sein. Sei also $m', n < \infty$, so gilt

$$p^{-n}(v + \pi u) \equiv x p^{-m'} u + p^{-n}(v + \pi'(n - m')u)$$

und damit

$$p^{m'-n}(\pi - \pi') \in \mathbf{Q}_p^*.$$

Somit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 1 zeigt auch, daß die Relation „$\leqq$" für 2-Charakteristiken transitiv und antisymmetrisch ist, also tatsächlich eine Ordnungsrelation.

Eine 1-Charakteristik χ (für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 1, siehe FUCHS [2]) hat die Form:

$$\chi = \{k_p | p \in \mathbf{P}\}$$

mit $0 \leqq k_p \in \mathbf{Z}$ oder $k_p = \infty$. Wie für 2-Charakteristiken läßt sich eine Gruppe des Ranges 1 schreiben als:

$$G = \langle u,\, p^{-k_p} u \,|\, p \in \mathbf{P} \rangle := \langle u \,|\, \chi \rangle \tag{15}$$

oder wenn die Basis der Gruppe G nicht näher bezeichnet werden soll, als $G \sim \chi$. Für 1-Charakteristiken χ, χ' läßt sich wie in FUCHS [2] eine Ordnung „$\leqq$" definieren, so daß gilt:

$$\langle u \,|\, \chi \rangle \leqq \langle u \,|\, \chi' \rangle \Leftrightarrow \chi \leqq \chi'.$$

Nun wird auch zwischen einer 1-Charakteristik und einer 2-Charakteristik eine Relation „$\leqq$" eingeführt.

Definition: Seien $\chi = \langle k_p \,|\, p \in \mathbf{P} \rangle$ und $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$ eine 1-bzw. 2-Charakteristik. χ ist in $\mathbf{M}$ enthalten, $\chi < \mathbf{M}$, wenn für alle Primzahlen $p \in \mathbf{P}$ gilt:

$$k_p \leqq \begin{cases} m_p & \text{für} \quad \pi_p \in \mathbf{Q}_p^* \\ n_p - \mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für} \quad \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*. \end{cases} \tag{16}$$

Mit dieser Bezeichnung gilt:

Lemma 2. *Seien χ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken, $G = \langle u | \chi \rangle$, $H = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$. G ist genau dann Untergruppe von H, wenn $\chi < \mathbf{M}$ ist.*

BEWEIS. Ganz ähnlich, wie im Beweis von Lemma 1, zeigt man, daß $p^{-k} u$ modulo $\langle u, v \rangle$ genau dann eine ganzzahlige Linearkombination von $p^{-m} u$ und $p^{-n}(v + \pi u)$ ist (Indizierung mit p ist weggelassen), wenn $\chi < \mathbf{M}$ gilt. Für $m \leqq n$ (d.h. $\pi \in \mathbf{Q}_p^*$) folgt sofort $k \leqq m$, für $m > n$ und $\pi = 0$ gilt $k \leqq m$. Ist $m > n$ und $\pi \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$, so gilt:

$$p^{-k} u \equiv x p^{-m} (u + \pi^{-1} v) + y p^{-n} v \quad (\text{mod}\, \langle u, v \rangle)$$

mit $x, y \in \mathbf{Z}$ genau dann, wenn $k \leqq n + \mathcal{O}_p(\pi^{-1})$, und Lemma 2 ist bewiesen.

Korallar 1. *Seinen χ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken, $G = \langle u | \chi \rangle$, $H = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$. G ist genau dann reine Untergruppe (pure subgroup) von H, wenn gilt:*

$$k_p = \begin{cases} m_p & \text{für} \quad \pi_p \in \mathbf{Q}_p^* \\ n_p - \mathcal{O}_p(\pi_p) & \text{für} \quad \pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*. \end{cases} \tag{17}$$

BEWEIS. Für die reine Untergruppe G ist k_p aus Formel (16) für jede Primzahl maximal zu wählen. Man erhält (17) und Korollar 1 ist bewiesen.

Ähnlich wie für 1-Typen von Gruppen des Ranges 1 (FUCHS [2, § 85]) heiße

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(G) := \{\mathbf{M} \in \mathfrak{M} \,|\, \mathbf{M} \sim G\} = \mathbf{t}(\mathbf{M})$$

2-Typ der torsionsfreien abelschen Gruppe $G \sim \mathbf{M}$. Ein 2-Typ ist die Äquivalenzklasse von 2-Charakteristiken, die isomorphe Gruppen beschreiben, d. h. nach [3, Satz 1] gibt es für $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathbf{t}$ eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M}$, so daß $\mathbf{M}^A = \mathbf{M}'$ ist. Natürlich gilt mit diesen Bezeichnungen für Gruppen G, H der Ränge 1 oder 2:

$$G \cong H \Leftrightarrow \mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H).$$

$\mathfrak{T}$ sei die Menge aller Typen der Gruppen des Ranges 1 und 2. Seien $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{T}$, dann heiße $\mathbf{t}$ in $\mathbf{t}'$ enthalten, $\mathbf{t} \leqq \mathbf{t}'$, wenn es Charakteristiken $t \in \mathbf{t}$ und $t' \in \mathbf{t}'$ gibt, so daß gilt: $t \leqq t'$. Für 1-Typen (Klassen von 1-Charakteristiken) ist dieser Sachverhalt wohlbekannt (siehe FUCHS [2, § 85]); ist $\mathbf{t}' = \mathbf{t}(\mathbf{M})$ ein 2-Typ (Klasse von 2-Charakteristiken), so gilt $\mathbf{t}(t) \leqq \mathbf{t}(\mathbf{M})$ genau dann, wenn es für die Charakteristik $t \in \mathbf{t}$ eine Basistransformation A bzgl. $\mathbf{M} \in \mathbf{t}'(\mathbf{M})$ gibt, so daß mit den oben gegebenen Definitionen $t \leqq \mathbf{M}^A$ ist. Die Bestimmung einer Beziehung der Form $\mathbf{t} \leqq \mathbf{t}'$ führt damit auf ähnliche rechnerische bzw. prinzipielle Probleme wie sie schon bei der Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 in [3] aufgetreten sind. Der Sinn der obigen Vereinbarungen kommt in dem nun folgenden Satz zum Ausdruck.

Satz 1. *Seien G und H torsionsfreie abelsche Gruppen der Ränge* 1 *oder* 2, *so ist G genau dann isomorph zu einer Untergruppe von H, wenn $\mathbf{t}(G) \leqq \mathbf{t}(H)$ ist.*

BEWEIS. Haben G und H den Rang 1, so ist der Satz wohlbekannt (siehe FUCHS [2, § 85, Exercise 8]). Sei also $H = \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle$ vom Rang 2 mit $\mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$. G kann den Rang 1 oder 2 haben. Sei G zuerst vom Rang 2, $G = \langle x, y | \mathbf{M} \rangle$ mit $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$. Ist $G \leqq H$, so ist x, y auch eine Basis von H und mit

$$x = au + bv, \quad y = cu + dv, \quad A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

(a, b, c, d rational) beschreibt also A eine Basistransformation bzgl. $\mathbf{M}'$, und es gilt:

$$\langle x, y | \mathbf{M} \rangle \leqq \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle = \langle x, y | \mathbf{M}'^A \rangle.$$

Nach Lemma 1 folgt $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'^A$ und damit gilt:

$$\mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(\mathbf{M}) \leqq \mathbf{t}(\mathbf{M}'^A) = \mathbf{t}(\mathbf{M}') = \mathbf{t}(H).$$

Setzt man $\mathbf{t}(G) \leqq \mathbf{t}(H)$ voraus, so gibt es $\mathbf{M} \in \mathbf{t}(G)$ und $\mathbf{M}' \in \mathbf{t}(H)$ mit $\mathbf{M} < \mathbf{M}'$ und nach Lemma 1 ist

$$G \cong \langle u, v | \mathbf{M} \rangle \leqq \langle u, v | \mathbf{M}' \rangle \cong H.$$

Hat G den Rang 1 so führt man mittels Lemma 2 den Beweis des Satzes 1 analog.

Einen wesentlichen Gesichtspunkt stellt hier die Tatsache dar, daß im Gegensatz zu 1-Typen, die Relation „$\leqq$" für 2-Typen keine Ordnungsrelation ist, denn aus $\mathbf{t} \leqq \mathbf{t}'$ und $\mathbf{t}' \leqq \mathbf{t}$ folgt nicht $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ (keine Antisymmetrie); diese Situation liegt beispielsweise für quasiisomorphe Gruppen vor, die nicht isomorph sein müssen, da der Rang größer als 1 ist (siehe Fuchs [2, § 92]). Eine weitere Vereinbarung sei für $\pi \in \mathbf{K}_p^*$:

$$\mathcal{O}_p^+(\pi) := \max(\mathcal{O}_p(\pi), 0)$$
$$\mathcal{O}_p^-(\pi) := \min(\mathcal{O}_p(\pi), 0).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_p(0) = \mathcal{O}_p^+(0) = \infty, && \mathcal{O}_p^-(0) = 0 \quad \text{und} \\ &\mathcal{O}_p^+(\pi) = \mathcal{O}_p(\pi), && \mathcal{O}_p^-(\pi) = 0 \quad \text{für} \quad \pi \in \mathbf{Q}_p^* \\ &\mathcal{O}_p^-(\pi) = \mathcal{O}_p(\pi), && \mathcal{O}_p^+(\pi) = 0 \quad \text{für} \quad \pi \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*. \end{aligned}$$

Einen Überblick über die Typenmenge und damit über sämtliche (reinen) Untergruppen des Ranges 1 einer torsionsfreien abelschen Gruppe des Ranges 2 vermittelt das folgende Lemma.

Lemma 3. *Seien* $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}$, $G=\langle u, v|\mathbf{M}\rangle$, *und sei* $0\neq w=xu+yv\in G$ *mit* $x, y\in\mathbf{Q}$. *Dann gilt für den Typ* $\mathbf{t}^G(w)=\{k_p|p\in\mathbf{P}\}$ *von* w *in* G *entweder, sofern* $y=0$:

$$k_p = \min(m_p, n_p)-\mathcal{O}_p^-(\pi_p) \tag{17'}$$

oder, sofern $y\neq 0$:

$$k_p = \min(m_p, n_p)+h_p(x, y) \tag{18}$$

mit

$$h_p(x, y) := \min\left(\mathcal{O}_p^+(y\pi_p-x),\ |m_p-n_p|\right).$$

Beweis. Für $y=0$ ist $w=xu$, also von u abhängig, und die Typen von w und u sind nach Fuchs [2, § 85 (A)] gleich. Nach Korollar 1, Formel (17), läßt sich der Typ von u in G aus $\mathbf{M}$ bestimmen.

Sei also $y\neq 0$. Wendet man auf $G=\langle u, v|\mathbf{M}\rangle$ die Basistransformation $A:=\begin{pmatrix} x & 1\\ y & 0\end{pmatrix}$ an, so gilt mit $u^A:=xu+yv$ und $v^A=u$ nach [3, Lemma 3]:

$$G = \langle u^A, v^A|\mathbf{M}^A\rangle,$$

wobei $u^A=w$ und der Typ von w läßt sich nach Korollar 1 bestimmen, sofern man $\mathbf{M}^A$ kennt. In die Formeln (10), (11), (12) und $(*)$ ist einzusetzen:

$$a=0,\quad b=1,\quad c=\frac{1}{y}\quad \text{und}\quad d=-\frac{x}{y}.$$

Einige Details der Formeln $(*)$ und (12) verändern den Typ von u^A nicht (Indizierung mit p ist teilweise weggelassen): $m>n$ mit $m'>n'$, sowie $m\leqq n$ mit $m'>n'$ ist nur für $m, n, m^A, n^A<\infty$ und nur für endlich viele Primzahlen möglich (siehe (10) und (11)). Die Festlegung des Typs von u^A nach Formel (17) geschieht also ohne diese Primzahlen. Weiter gilt nach (10), (11) und (13) für fast alle Primzahlen entweder $m_p^A=m_p$ und $n_p^A=n_p$ oder umgekehrt $m_p^A=n_p$ und $n_p^A=m_p$. Von den endlich vielen Primzahlen, für die das eben Gesagte nicht gilt, sind nur diejenigen von Bedeutung für den gesuchten Typ, für die $|m_p-n_p|=\infty$ ist und damit auch $|m_p^A-n_p^A|=\infty$, so daß man bis auf endlich viele Ausnahmen p, für die noch $m_p, n_p<\infty$ ist, die also den Typ von u^A nicht beeinflussen, (12) wegen (13) schreiben kann wie folgt:

$$\pi_p^A = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{y\pi_p-x}\right)^{(|m_p-n_p|)} & \textit{für}\quad p\notin P^*(\mathbf{M})\quad \text{und}\\ & (y\pi_p-x)^{(|m_p-n_p|)}\neq 0\\ 0 & \textit{sonst}.\end{cases} \tag{12'}$$

Dabei ist für den ersten Fall $m_p^A<n_p^A$, wenn $\pi_p^A\in\mathbf{Q}_p^*$ und $m_p^A>n_p^A$, wenn $\pi_p^A\notin\mathbf{Q}_p^*$. Für den zweiten Fall, $\pi_p^A=0$, ist $m_p^A\leqq n_p^A$, wenn $(y\pi_p-x)^{(|m_p-n_p|)}\neq 0$, und $m_p^A>n_p^A$, wenn $(y\pi_p-x)^{(|m_p-n_p|)}=0$.

Also ist nach Formel (17) für $p\notin P^*(\mathbf{M})$ und $(y\pi_p-x)^{(|m_p-n_p|)}\neq 0$ zur Bestimmung des Typs von $w=xu+yv$ zu berechnen:

$$m_p^A \quad \text{für}\quad \pi_p^A\in\mathbf{Q}_p^*$$
$$n_p^A-\mathcal{O}_p(\pi_p^A)\quad \text{für}\quad \pi_p^A\notin\mathbf{Q}_p^*.$$

Für alle anderen Primzahlen muß m_p^A bestimmt werden.

Für $p \notin P^*(\mathbf{M})$ und $(y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} \neq 0$ folgt $p \notin P^*(\mathbf{M}^A)$ und

$$k_p = \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-[(y\pi_p - x)^{-1}]. \tag{19}$$

Für die Fälle, in denen $\pi_p^A = 0$ ist muß man zwischen $(y\pi_p - x)^{(|m_p - n_p|)} = 0$ oder $\neq 0$ unterscheiden. Im ersten Fall ist $p \in P^*(\mathbf{M}^A)$ und

$$k_p = m_p^A = \max(m_p, n_p) = \min(m_p, n_p) + |m_p - n_p| = \min(m_p, n_p) + h_p; \tag{20}$$

im zweiten Fall ist $p \notin P^*(\mathbf{M}^A)$ und es gilt Formel (19). Aus (19) und (20) folgt (18). Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Zusammenfassend läßt sich formulieren:

Satz 2. [1; 7.4]. *G werde durch die 2-Charakteristik* $\mathbf{M}$ *beschrieben. G hat eine reine Untergruppe mit 1-Charakteristik* $\chi = \{k_p | p \in \mathbf{P}\}$ *genau dann, wenn entweder*

$$k_p = \min(m_p, n_p) - \mathcal{O}_p^-(\pi_p)$$

oder es gibt eine rationale Zahl $r \in \mathbf{Q}$ *mit:*

$$k_p(r) = \min(m_p, n_p) + l_p(r) \tag{21}$$

wobei

$$l_p(r) := \min(\mathcal{O}_p^+(\pi_p - r),\ |m_p - n_p|).$$

Beweis. Reine Untergruppen von G sind die reinen Hüllen der Elemente $0 \neq w = xu + yv \in G$. Formel (17′) von Lemma 3 überträgt sich unverändert als Typ der reinen Hülle $\langle u \rangle_*^G$ von u in G, wenn $G = \langle u, v | \mathbf{M} \rangle$ ist. Zu jeder rationalen Zahl $r = \frac{x}{y} \in \mathbf{Q}$ mit $x, y \in \mathbf{Z}$ gibt es ein $w = xu + yv \in G$. Umgekehrt gibt es auch zu jedem Element $w' \in G$ ein solches $w = xu + yv$, so daß w und w' abhängig sind, also gleichen Typ haben. Da $y \neq 0$ und damit Einheit in fast allen $\mathbf{Q}_p^*$ ist, unterscheiden sich l_p und h_p aus Lemma 3 nur an endlich vielen Stellen, und auch hier ist $h_p - l_p$ endlich, d. h. (21) beschreibt denselben Typ wie (18) und Satz 2 ist bewiesen.

Satz 2 beschreibt die Typenmenge

$$\mathfrak{T}(\mathbf{M}) = \mathfrak{T}(G) := \{\mathbf{t}^G(x) | x \in G\}$$

der Gruppe $G \sim \mathbf{M}$. Da sich jede Untergruppe U des Ranges 1 von G in eine reine Untergruppe V des Ranges 1 einbetten läßt, d. h. $\mathbf{t}(U) \leqq \mathbf{t}(V)$ nach Fuchs [2, § 85 Exercise 8], gibt Satz 2 einen vollständigen Überblick über alle Untergruppen des Ranges 1 von G, wenn die 2-Charakteristik $\mathbf{M}$ von G bekannt ist.

Im weiteren sollen parallel zu Beaumont—Pierce [1] einige Ergebnisse über die Typenmenge $\mathfrak{T}(G)$ zusammengetragen werden.

Lemma 4. [1; 7.6] *In einer torsionsfreien abelschen Gruppe G des Ranges 2, beschrieben durch die Charakteristik* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$, *gilt für zwei unabhängige Elemente* $u, v \in G$:

$$\mathbf{t}^G(u) \cap \mathbf{t}^G(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}} := \{\min(m_p, n_p)|_p \in \mathbf{P}\}$$

Beweis. Für unabhängige $w = xu + yv$ und $w' = x'u + y'v$ kann man annehmen $y \neq 0$. Ist $y' = 0$, so werden die Typen von w und w' durch (18) bzw. (17′) aus Lemma 3 angegeben deren Schnitt $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ ergibt, da für $\mathcal{O}_p^-(\pi_p) \neq 0$ fast immer gilt: $\mathcal{O}_p^+(y\pi_p - x) = 0$ wegen $\pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$. Hat man $y \neq 0$ und $y' \neq 0$, so sind w und w' genau dann unabhängig, wenn $\frac{x}{y} \neq \frac{x'}{y'}$ ist. Der Schnitt von $\left\{k_p\left(\frac{x}{y}\right) \middle| p \in \mathbf{P}\right\}$ mit $\left\{k_p\left(\frac{x'}{y'}\right) \middle| p \in \mathbf{P}\right\}$ ergibt wieder $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Satz 3. [1; 7.7] *G sei eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges* 2 *mit der Charakteristik* $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}$.

(i) *Seien* $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{T}(G)$. *Für* $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ *gilt* $\mathbf{t} \cap \mathbf{t}' = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$

(ii) *Seien* $0 \neq u, v \in G$. *Dann sind u und v abhängig, wenn* $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) \neq \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ *gilt.*

(iii) *Ist* $\mathfrak{T}(G)$ *endlich, so ist* $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}} \in \mathfrak{T}(G)$.

Beweis. (i) folgt aus Satz 2. Für (ii) sei $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) \neq \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Nimmt man an, daß u und v unabhängig sind, so gilt nach Lemma 4: $\mathbf{t}(u) \cap \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$, also $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$. Dieser Widerspruch zeigt, daß u und v unabhängig sind. Zum Beweis von (iii) stellt man fest, daß nach Lemma 3, für eine Gruppe G mit endlicher Typenmenge $\mathfrak{T}(G)$, die Existenz unabhängiger Elemente mit gleichem Typ folgt; denn verschiedenen Quotienten $\frac{x}{y}$ entsprechen unabhängige Elemente. Nach (ii) ist dann $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(v) = \mathbf{t}_0^{\mathbf{M}} \in \mathfrak{T}(G)$ und Satz 3 ist bewiesen.

4. Faktoren

Ist H Untergruppe von G, dann läßt sich der Faktor G/H natürlich nur dann ermitteln, wenn die Einbettung von H in G explizit gegeben ist.

Lemma 5. *Seien* $H := \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle \leqq G = \langle u, v \mid \mathbf{M}' \rangle$ *torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges* 2 *mit* $\mathbf{M}, \mathbf{M}' \in \mathfrak{M}$, d. h. $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'$. *Dann ist*

$$G/H \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{P}} [Z(p^{m'_p - m_p}) + Z(p^{n'_p - n_p})].$$

Beweis. Exemplarisch wird der Fall $m_p \leqq n_p$, $m'_p \leqq n'_p$ behandelt. Die p-Höhe von $p^{-m'_p} u + H$ in G/H ist $m'_p - m_p$, die p-Höhe von $p^{-n'_p}(v + \pi'_p u) + H$ ist auf Grund der Definition von $\mathbf{M} \leqq \mathbf{M}'$ $n'_p - n_p$. Andere Elemente deren Ordnung eine Potenz von p wären gibt es nicht und Lemma 5 ist bewiesen.

Mit Hilfe von Basistransformationen lassen sich stets die speziellen Einbettungen in Lemma 5 und auch in den folgenden Lemma 6 und Satz 5 erreichen.

Lemma 6. *Seien* χ *und* $\mathbf{M}$ 1-*bzw.* 2-*Charakteristiken,* $H := \langle u \rangle_*^G = \langle u \mid \chi \rangle$ *die reine Hülle von u in* $G = \langle u, v \mid \mathbf{M} \rangle$, *dann hat der Faktor* G/H *den Typ:*

$$\mathbf{t}(G/H) = \{h_p \mid p \in \mathbf{P}\}$$

mit

$$h_p = \max(m_p, n_p) + \mathcal{O}_p^-(\pi_p).$$

Beweis. Bis auf den Fall $m_p > n_p$ und $\pi_p \in \mathbf{K}_p^* \setminus \mathbf{Q}_p^*$ ist alles klar. Es gilt (Indizierung mit p wird weggelassen) modulo H nach Korollar 1:

$$p^{m + \mathcal{O}(\pi)} p^{-m}(u + \pi^{-1} v) \equiv p^{\mathcal{O}(\pi)}(u + \pi^{-1} v) \equiv p^{-\mathcal{O}(\pi^{-1})} \pi^{-1} v,$$

und $m + \mathcal{O}(\pi)$ ist genau die p-Höhe von $v + H$ in G/H. Damit ist Lemma 6 bewiesen.

Satz 4. *Sei G eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit der Charakteristik $\mathbf{M}\in\mathfrak{M}$. Sei $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ der 1-Typ, der die 1-Charakteristik $\chi_1^{\mathbf{M}}:=\{m_p+n_p|p\in\mathbf{P}\}$ enthält. Dann gilt für eine reine Untergruppe U von G des Ranges* 1:

$$\mathbf{t}(U)\cdot\mathbf{t}(G/U)=\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}.$$

Beweis. Es genügt $U:=\langle u\rangle_*\leqq G=\langle u,v|\mathbf{M}\rangle$ zu setzen, dann beweisen Korollar 1, siehe (17), und Lemma 6 den Satz 4, wenn man verwendet, daß G/U torsionsfrei vom Range 1 ist, Fuchs [2; § 16 Exercise 3 (d) und 26.1. (iii)].

Die 1-Typen $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ und $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ sind Invarianten der Gruppe $G\sim\mathbf{M}$. Für $\mathbf{t}_0^{\mathbf{M}}$ folgt das aus Lemma 4 für $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}$ entweder aus Satz 4 oder man entnimmt den Formeln (10)—(13) und $(*)$ direkt:

$$m_p+n_p=m_p^A+n_p^A \quad \text{für fast alle Primzahlen}$$

und

$$|m_p+n_p-m_p^A-n_p^A|<\infty \quad \text{für die endlich vielen Ausnahmen.}$$

Satz 5. *Seien $\chi=\{h_p|p\in\mathbf{P}\}$ und $\mathbf{M}$ 1-bzw. 2-Charakteristiken. Seien*

$$U:=\langle u|\chi\rangle\langle G:=\langle u,v|\mathbf{M}\rangle,$$

d. h. $\chi<\mathbf{M}$. Dann gilt für die Torsionsuntergruppe von G/U:

$$T(G/U)\cong\bigoplus_{p\in\mathbf{P}}Z(p^{k_p-h_p})$$

mit

$$k_p:=\min(m_p,n_p)-\mathcal{O}_p^-(\pi_p) \quad \text{und} \quad \{k_p|p\in\mathbf{P}\}\in\mathbf{t}^*.$$

$$(G/U)/T(G/U) \quad \textit{hat den Typ} \quad \mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}:\mathbf{t}^*\cdot$$

$T(G/U)$ ist stets direkter Summand von G/U.

Beweis. Die reine Hülle von U ist $H:=\langle u\rangle_*^G$ und nach Korollar 1 vom Typ $\{k_p|p\in\mathbf{P}\}\in\mathbf{t}^*$. Die Torsionsuntergruppe von G/U ist H/U, da $G/H\cong(G/U)/(H/U)$ torsionsfrei auf Grund der Reinheit von H ist. H/U läßt sich nach Fuchs [2, § 85] berechnen, wie im Satz angegeben, da, wegen $U\leqq H$, für alle Primzahlen p $h_p\leqq k_p$ gilt. Der Faktor $(G/U)/T(G/U)\cong G/H$ hat nach Satz 4 den Typ $\mathbf{t}_1^{\mathbf{M}}:\mathbf{t}^*$ (Bezeichnungen siehe Fuchs [2, § 85]). Die Gruppe G/U zerfällt nach [2, 52.2].

Literaturverzeichnis

[1] R. A. Beaumont, R. S. Pierce, Torsion free groups of rank two, *Mem. Amer. Math. Soc. Nr.* **38** (1961).
[2] L. Fuchs, Infinite abelian groups, *New York* (1970, 1973).
[3] O. Mutzbauer, Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* **55** (1976), 195—208.

OTTO MUTZBAUER
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT WÜRZBURG
87 WÜRZBURG
AM HUBLAND
BRD

(Eingegangen am Dezember 16. 1975.)