Verallgemeinerung eines Satzes von Kertész

Von GERD RICHTER (Halle)

Dem Andenken an Herrn Professor Andor Kertész gewidmet

Ein Satz von A. Kertész [6] besagt, daß eine Untermenge C einer primären abelschen Gruppe G genau dann eine Basis von G ist, wenn C eine maximale unabhängige Untermenge von G ist und die Unabhängigkeit von C stets verletzt wird, wenn ein Element von C gegen ein Element von G mit größerer Ordnung ausgetauscht wird.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Analogon zu diesem Satz für eine Klasse algebraischer modularer Verbände, die die Klasse der Untergruppenverbände der verallgemeinerten primären abelschen Gruppen (siehe [9]), also nicht nur der primären abelschen Gruppen, echt umfaßt und für die es ein Analogon zum Kriterium von L. J. Kulikov [8] (siehe auch [2] und [4]) nicht gibt, bewiesen.

Außerdem werden für eine Klasse von Verbänden, die die Klasse der Untergruppenverbände der primären abelschen Gruppen umfaßt, und für eine Klasse, die die Klasse der Untergruppenverbände der torsionsfreien verallgemeinerten primären abelschen Gruppen umfaßt, Modifikationen dieses Analogons bewiesen.

Es handelt sich im wesentlichen um zum Teil vereinfachte Beweise von Ergebnissen aus der Dissertation [10] des Verfassers. Einige der dabei benutzten Sätze aus [10] werden in einer in Vorbereitung befindlichen Mitteilung enthalten sein. Die Begriffsbildungen und Bezeichnungsweisen aus der Arbeit von R. Fritzsche [3] sollen ohne besondere Bezugnahme übernommen werden.

1. L sei ein algebraischer modularer Verband, K sei die Menge der kompakten Elemente und $Z=Z(L)$ die Menge der Zyklen von L.

Nach A. Kertész [7] heiße ein Element $b \in L$ genau dann ein Servanzelement in L, wenn zu jedem $c \in K$ ein Element $d \in L$ mit $b \cup c = b \dot{\cup} d$ existiert.

Eine Untermenge P von Z heiße genau dann eine zyklische Basis von L, wenn $1 = \dot{\bigcup}(z | z \in P)$ gilt.

Eine Untermenge P von $X \overset{\text{def}}{=} Z \setminus \{0\}$ heiße genau dann S-unabhängig, wenn $\dot{\bigcup}(z | z \in P)$ existiert und ein Servanzelement in L ist, und maximal S-unabhängig in der Untermenge R von X, wenn $P \subseteq R \subseteq X$ gilt und für jedes Element $x \in R \setminus P$ die Menge $P \cup \{x\}$ nicht S-unabhängig ist.

In [7] wird der folgende *Satz* bewiesen:

(1) *Eine Untermenge B von K ist genau dann eine Basis von L, wenn B maximal unabhängig in K und $\dot{\bigcup}(c | c \in B)$ ein Servanzelement in L ist.*

Nach T. J. HEAD [5] gilt die folgende Aussage (siehe auch [10]):

(2) *Ist* $a \leqq b$ $(a, b \in L)$, *a Servanzelement in L und b Servanzelement im Intervall* $1/a$, *dann ist b auch Servanzelement in L.*

Im folgenden sei L ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (A) (siehe auch [3]):
(A) Für alle Elemente $z \in Z$ und alle Elemente $b, c \in L$ folgt aus

$$z^{(n)} \leqq b^{(n)} \cup c, \quad z^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)} \cup c$$

die Existenz eines Elements $x \in Z$ mit

$$x \leqq b \cup z, \quad x^{(n)} \leqq c, \quad x^{(n-1)} \not\leqq b^{(n-1)} \cup c.$$

In [10] wird bewiesen, daß jeder zyklisch erzeugte modulare Verband mit (A) die folgenden Eigenschaften besitzt (siehe auch [3]):

(3) $$y \in Z(b/a) \Leftrightarrow y = a \cup z, \quad z \in Z;$$

(4) $y = a \cup z \in Z(b/a),\ z \in Z \Rightarrow y_a^{(n)} = a \cup z^{(n)}$ für jede natürliche Zahl n;

(5) $$z \leqq \bigcup (z_\nu \mid z_\nu \in Z,\ \nu \in N), \quad z \not\leqq \bigcup (z'_\nu \mid \nu \in N), \quad z \in Z$$
$$\Rightarrow \bigcup (z_\nu \mid \nu \in N) = z \cup \bigcup (z_\nu \mid \nu \in N \setminus \{r\}), \quad r \in N;$$

(6) $$z \in Z, \quad z \leqq \bigcup (b \mid b \in B,\ B \subseteq L) \Rightarrow z' \leqq \bigcup (b' \mid b \in B);$$

(7) $a = \bigcup (b \mid b \in B,\ B \subseteq L) \Rightarrow a^{(n)} = \bigcup (b^{(n)} \mid b \in B)$ für jede natürliche Zahl n;
(8) $z \in Z,\ a \in L,\ z \leqq a^{(n)} \Rightarrow z = x^{(n)}$ mit $x \in Z(a/0)$ für jede natürliche Zahl n;
(9) $a, b \in L,\ a \leqq b \Rightarrow b/a$ besitzt die Eigenschaft (A);
(10) $a, b, c \in L,\ a \leqq b \leqq c$, b Servanzelement in $c/a \Leftrightarrow H_b(z) = H_c(z)$ für alle $z \in Z(c/a)$;
(11) $B \subseteq X \Rightarrow B$ enthält eine maximale S-unabhängige Untermenge;

Wenn $P = \{z_\nu \mid z_\nu \in X,\ \nu \in N,\ N$ geeignete Indexmenge$\}$ eine maximale unabhängige Untermenge von X ist, so werde im folgenden für jeden Index $r \in N$

$$a_r \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup} (z_\nu \mid \nu \in N \setminus \{r\})$$

gesetzt.

2. Der zu beweisende Satz kann nunmehr folgendermaßen formuliert werden.

Satz 1. L besitzt genau dann eine zyklische Basis $P = \{z_\nu \mid z_\nu \in X,\ \nu \in N\}$, wenn P eine maximale unabhängige Untermenge in X ist und für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ mit $a_r \cap z = 0$ aus

$$a_r < a_r \dot{\cup}\, z_r^{(n)} = a_r \dot{\cup}\, z^{(m)}$$

stets $n \geqq m$ folgt.

BEWEIS. P sei eine solche maximale unabhängige Untermenge von X. Dann ist P auch maximale unabhängige Untermenge von K.

Kann man zeigen, daß P S-unabhängig ist, dann ist P nach (1) zyklische Basis von L. Nach (11) enthält P eine maximale S-unabhängige Untermenge

$$P_0 = \{z_\nu | \nu \in N_0 \subseteqq N\}.$$

Dann ist $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}(z_\nu | \nu \in N_0)$ Servanzelement in L.

Unter der Voraussetzung $N_0 \subset N$ ist für jeden Index $r \in N \setminus N_0$ das Element $a \mathbin{\dot{\cup}} z_r$ weder in L noch in $1/a$ (wegen (2)) Servanzelement.

Es sei $r \in N \setminus N_0$ ein fester Index.

Nach (3) und (10) existiert dann eine nichtnegative ganze Zahl n und ein Zyklus $x = z_r^{(n)}$ mit

$$H(a \mathbin{\dot{\cup}} x) > H_{a \dot{\cup} z_r}(a \mathbin{\dot{\cup}} x) = n,$$

also auch ein Zyklus $y \in Z(1/a)$ mit

$$y_a^{(n+1)} = a \mathbin{\dot{\cup}} x = a \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(n)} > a.$$

Aus (3) und der Definition des Begriffes Servanzelement folgt die Existenz eines Zyklus $z \in X$ mit $y = a \mathbin{\dot{\cup}} z$, und nach (4) gilt

$$a \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(n)} = y_a^{(n+1)} = a \mathbin{\dot{\cup}} z^{(n+1)}.$$

Es sei

$$b \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}(z_\nu | \nu \in N \setminus (N_0 \cup \{z_r\})).$$

Dann gilt

$$a_r < a_r \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(n)} = b \mathbin{\dot{\cup}} a \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(n)} = b \mathbin{\dot{\cup}} a \mathbin{\dot{\cup}} z^{(n+1)} = a_r \mathbin{\dot{\cup}} z^{(n+1)}$$

im Widerspruch zu obiger Voraussetzung über P.

Somit gilt $P_0 = P$, d.h., P ist S-unabhängig und damit nach (1) zyklische Basis von L.

L besitze eine zyklische Basis $P = \{z_\nu | z_\nu \in X,\ \nu \in N\}$. Dann ist P maximal unabhängig in X, und es gilt für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ mit $a_r \cap z = 0$

$$1 = a_r \mathbin{\dot{\cup}} z_r \geqq a_r \mathbin{\dot{\cup}} z.$$

Auf Grund von (3) und (4) gilt somit

$$a_r \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(m)} \geqq a_r \mathbin{\dot{\cup}} z^{(m)}$$

für jede natürliche Zahl m, so daß aus

$$a_r \mathbin{\dot{\cup}} z_r^{(n)} = a_r \mathbin{\dot{\cup}} z^{(m)}$$

stets $n \geqq m$ folgt.

Folgerung. *Besitzt L eine zyklische Basis P, dann existieren in L außer* 0 *keine Zyklen mit unendlicher Höhe.*

Beweis. Es sei $x \in X$. Da x kompakt ist, folgt aus

$$x \leqq 1 = \dot{\bigcup}(z | z \in P)$$

die Existenz einer natürlichen Zahl n mit

$$x \leqq \dot{\bigcup}(z_i | z_i \in P,\ i = 1, \dots, n) \overset{\text{def}}{=} a$$

und

$$x \not\leqq \dot{\bigcup}(z_i | z_i \in P,\ i = 1, \dots, n-1) \stackrel{\text{def}}{=} b,$$

d.h., es gilt

$$b < b \cup x \leqq a.$$

a ist direkte Komponente von 1 und deshalb Servanzelement in L, so daß nach (10)

$$H(x) = H_a(x)$$

gilt. Weiterhin ist aber $a = b \dot{\cup} z_n$ nach (3) ein Zyklus im Teilverband a/b, d.h., nach Definition des Begriffes Zyklus ist a/y für jedes Element $y \in a/b$ mit $y > b$ eine endliche Kette.

Somit ist insbesondere $a/b \cup x$ eine endliche Kette, weshalb

$$b \cup x = a_b^{(m)} = b \dot{\cup} z_n^{(m)}$$

mit einer geeigneten natürlichen Zahl m gilt.

Für jeden Zyklus $y \in Z(a/0)$ gilt nach (6)

$$b \cup y^{(m+1)} \leqq a_b^{(m+1)} < a_b^{(m)} = b \cup x,$$

so daß $H(x) = H_a(x) \leqq m < \infty$ ist.

3. L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (A), und es gelte $O(z) < \infty$ für alle Zyklen $z \in Z$.

Satz 2. *L besitzt genau dann eine zyklische Basis $P = \{z_\nu | z_\nu \in X,\ \nu \in N\}$, wenn P in eine maximale unabhängige Untermenge ist und für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ mit $O(z) > O(z_r)$ immer $a_r \cap z > 0$ gilt.*

Beweis. P sei eine solche maximale unabhängige Untermenge von X. Für alle Zyklen $z \in X$ mit $z \cap a_r = 0$ $(r \in N)$ gilt nach Voraussetzung $O(z) \leqq O(z_r)$ und damit auch

$$O_{a_r}(a_r \dot{\cup} z) \leqq O_{a_r}(a_r \dot{\cup} z_r) = O(z_r).$$

Also folgt aus

$$a_r < (a_r \cup z)_{a_r}^{(m)} = a_r \cup z^{(m)} = a_r \dot{\cup} z_r^{(n)} = (a_r \dot{\cup} z_r)_{a_r}^{(n)}$$

stets $n \geqq m$, so daß P nach Satz 1 zyklische Basis von L ist.

L besitze eine zyklische Basis $P = \{z_\nu | \nu \in N\}$. Für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ mit $O(z) > O(z_r) = m$ (m geeignete natürliche Zahl) gilt $a_r \cup z \leqq a_r \dot{\cup} z_r$ und damit $O_{a_r}(a_r \cup z) \leqq O_{a_r}(a_r \dot{\cup} z_r) = m$. Daraus folgt nach (4)

$$a_r = (a_r \cup z)_{a_r}^{(m)} = a_r \cup z^{(m)} \geqq z^{(m)} > 0$$

und somit auch $a_r \cap z > 0$.

4. L sei ein zyklisch erzeugter modularer Verband mit der Eigenschaft (A) und für alle Zyklen $z \in X$ gelte $O(z) = \infty$.

Satz 3. *L besitzt genau dann eine zyklische Basis $P = \{z_\nu | z_\nu \in X,\ \nu \in N\}$, wenn P in X eine maximale unabhängige Untermenge ist und für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ mit $a_r \cap z = 0$ stets $a_r \dot{\cup} z_r \neq a_r \dot{\cup} z'$ gilt.*

Beweis. P sei eine solche maximale unabhängige Untermenge von X. Es sei $a \overset{\text{def}}{=} \dot{\bigcup}(z_\nu | z_\nu \in P,\ \nu \in N)$. Ist a kein Servanzelement in L, dann existiert ein Zyklus $x \in Z(a/0)$ mit $H_a(x) < H(x)$ (siehe (10)), d.h., es existiert ein Zyklus $z \in X$ mit $z \not\leqq a$ und $z' \leqq a$. Da aus der Existenz eines Zyklus $y \in Z(a/0)$ mit $y' = z'$ und $y \neq z$ nach (A) die Existenz eines Atoms im Widerspruch zu obiger Voraussetzung über X folgen würde, gilt $H_a(z') = 0$. Aus (8) und (7) folgt somit $z' \not\leqq a' = \dot{\bigcup}(z'_\nu | \nu \in N)$. Nach (5) existiert dann aber ein Index $r \in N$ mit

$$a = z' \cup \dot{\bigcup}(z_\nu | \nu \in N \setminus \{r\}) = z' \cup a_r = z_r \dot{\cup} a_r .$$

Auf Grund der Isomorphie

$$z_r/0 \cong a_r \dot{\cup} z_r/a_r = z' \cup a_r/a_r \cong z'/a_r \cap z'$$

gilt $O_{z' \cap a_r}(z') = O(z_r) = \infty$, woraus nach Definition des Begriffes Zyklus sofort im Widerspruch zur Beschaffenheit von P

$$z' \cap a_r = z \cap a_r = 0 \quad \text{und} \quad a_r \dot{\cup} z_r = a_r \dot{\cup} z'$$

folgt.

Demnach war die Annahme, daß a kein Servanzelement in L ist, falsch, d.h., nach (1) ist P zyklische Basis von L.

L besitze eine zyklische Basis $P = \{z_\nu | \nu \in N\}$. Für jeden Index $r \in N$ und jeden Zyklus $z \in X$ gilt

$$a_r \cup z \leqq a_r \dot{\cup} z_r = 1$$

und damit nach (6) und (4)

$$a_r \cup z' = (a_r \cup z)'_{a_r} \leqq 1'_{a_r} < 1 = a_r \dot{\cup} z_r .$$

Literatur

[1] R. Fritzsche, Verallgemeinerung eines Satzes von Prüfer und Baer, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **1** (1971), 155—161.

[2] R. Fritzsche, Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **2** (1974), 73—81.

[3] R. Fritzsche, Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov, Szele und Kertész, *Publ. Math. (Debrecen)* **24** (1977), 323—331.

[4] R. Fritzsche und G. Richter, Verallgemeinerung eines Satzes von Kulikov II, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **3** (1974), 161—165.

[5] T. J. Head, Purity in compactly generated modular lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 55—59.

[6] A. Kertész, On the decomposibility of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Sci. Hung.* **3** (1952), 121—125.

[7] A. Kertész, Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände, *Publ. Math. (Debrecen)* **15** (1968), 1—11.

[8] L. J. Kulikov, *K* teorii abelevich grupp proizvolnoj moščnosti, *Matem. Sb.* **16** (1945), 129—162.

[9] L. J. Kulikov, Obobščennye primarnye gruppy, *Tr. Mosk. matem. o—va* **1** (1952), 247—326; **2** (1953), 85—167.

[10] G. Richter, Zur Theorie der zyklisch erzeugten modularen Verbände, *Diss. Halle* 1975.

(Eingegangen am 5. Februar 1976.)