Die lokal kompakten Halbgruppen und Ringe von Pollák—Rédeischem Typus

Von PETER PLAUMANN und KARL STRAMBACH (Erlangen)

§ 1 Einleitung und Ergebnisse

POLLÁK und RÉDEI haben diejenigen diskreten Halbgruppen bestimmt, deren echte Unterhalbgruppen sämtlich Gruppen sind. Der Stand der Theorie der lokal kompakten Halbgruppen erlaubt es, daß wir uns der Verallgemeinerung des Satzes von Pollák—Rédei in dieser Kategorie zuwenden können. Es genügt dabei anzunehmen, daß jede echte abgeschlossene Unterhalbgruppe der lokal kompakten Halbgruppe S in einer (abgeschlossenen) Untergruppe von S enthalten ist, um die der Klassifikation von Pollák und Rédei entsprechenden Typen als die einzigen nachweisen zu können.

Außer Ideen, die denen von Pollák und Rédei verwandt sind, lebt unser Beweis von der Tatsache, daß eine lokal kompakte monothetische Gruppe entweder kompakt und dann sogar monothetische Halbgruppe ist oder aber daß sie isomorph zur diskreten Gruppe $\mathbf{Z}$ ausfällt und dann jede ihrer monothetischen Unterhalbgruppen $\neq 0$ isomorph zur Halbgruppe $\mathbf{N}^+$ der positiven ganzen Zahlen ist (HEWITT—ROSS, Theorem 9.1.). Daneben verwenden wir einige der einfacheren Tatsachen der Theorie der kompakten Halbgruppen (HOFMANN—MOSTERT, Chapter 1 und Chapter 2). Prinzipiell bezeichnen wir mit $\overline{\langle T\rangle}$ die von der Teilmenge T einer Halbgruppe S erzeugte Unterhalbgruppe, mit $\overline{\mathfrak{M}}$ dem topologischen Abschluß der Teilmenge $\mathfrak{M}$ im topologischen Raum S.

Satz 1. *Liegt jede echte abgeschlossene Unterhalbgruppe einer lokal kompakten Halbgruppe S in einer Untergruppe von S, so ist S entweder eine Gruppe oder eine der folgenden Halbgruppen:*

(a) *S hat genau zwei Elemente*

(b) *$S=\overline{\langle z\rangle}$, wobei $\overline{\langle z^2\rangle}$ eine kompakte Gruppe ist.*

Die Pollák—Rédeische Fragestellung hat eine natürliche Entsprechung in der Ringtheorie. Wir nennen einen lokal kompakten Ring R von Pollák—Rédeischem Typ, wenn jeder echte abgeschlossene Unterring $\neq 0$ von R in einem Unterkörper[1]) enthalten ist. Auch hier gelingt dank der Ergebnisse von Kaplansky zur Theorie der lokal kompakten Ringe leicht eine Klassifizierung. Nach der bekannten Klassi-

[1]) Wir verwenden in dieser Note die Wörter Körper und Schiefkörper synonym.

fikation lokal kompakter Schiefkörper (WEISS—ZIERLER) enthält jeder unendliche lokal kompakte Körper einen echten abgeschlossenen Unterring. Dies führt zu

Satz 2. *Ein lokal kompakter Ring von Pollák—Rédeischem Typ fällt in genau eine der folgenden Klassen:*
(a) *die Nullringe von Primzahlordnung*
(b) *die direkte Summe zweier endlichen Primkörper*
(c) *die lokal kompakten Schiefkörper.*

§ 2. Beweise

BEWEIS VON SATZ 1. Wir nehmen zunächst an, daß S verschiedene Idempotente e und f enthält. Dann ist notwendig $S=\overline{\langle e, f\rangle}$. Wir betrachten die Unterhalbgruppen

$$S_1 = \{e\} \qquad S_2 = \{f\}$$
$$S_3 = \overline{\langle ef\rangle} \qquad S_4 = \overline{\langle fe\rangle}$$
$$S_5 = \overline{\langle efe\rangle} \qquad S_6 = \overline{\langle fef\rangle}.$$

Es gilt $S=\bigcup_{i=1}^{6} S_i$, denn $\{e\}\cup\{f\}\cup\langle ef\rangle\cup\langle fe\rangle\cup\langle efe\rangle\cup\langle fef\rangle$ liegt dicht in S und der Abschluß der Vereinigung endlich vieler Teilmengen eines topologischen Raumes ist die Vereinigung der Abschlüsse der einzelnen Mengen. Ist S kommutativ, so gilt $S=\{e, f\}$ oder $S=\{e, f, ef\}$. Die zweite Möglichkeit tritt nicht auf, weil dann $\{e, ef\}$ eine echte Unterhalbgruppe von S mit zwei verschiedenen Idempotenten wäre. Also ist $S\cong\{0, 1\}$.

Wir betrachten nun den Fall, daß S nicht kommutativ ist. Ist $e=ef$, so ist entweder $S=\{e,f\}$ oder $S=\{e,f,fe\}$. Im zweiten Fall wäre aber $\{f,fe\}$ eine echte Unterhalbgruppe mit den zwei Idempotenten f und fe. Es werden nun alle anderen Möglichkeiten ausgeschlossen. Wir arbeiten wiederum mit den Unterhalbgruppen S_i, die nun echte Teilmengen von S sind. Mit H_i sei die kleinste abgeschlossene Untergruppe von S bezeichnet, die die Unterhalbgruppe S_i enthält. Die Gruppen H_i sind dann lokal kompakte monothetische topologische Gruppen (vgl. ELLIS, Th. 2). Angenommen, eine der Gruppen H_i ist nicht kompakt: Aus Symmetriegründen haben wir dann nur die beiden Fälle $S_3\cong\mathbf{N}^+$ oder $S_5\cong\mathbf{N}^+$ zu betrachten. Ist $S_3\cong\mathbf{N}^+$, so folgt aus $S_5=S_3e$, $S_6=fS_3$, $S_4^2=S_4\cdot S_4=fS_5$, daß auch S_4, S_5 und S_6 diskret und somit isomorph zu $\mathbf{N}^+$ sind. Betrachten wir $S_5'=\{e\}\cup S_5$, so ist dies eine kommutative Halbgruppe, also in einer Untergruppe von S enthalten. Aus $e(efe)=efe=(efe)e$ folgt, daß e das Einselement der kleinsten (abgeschlossenen) Untergruppe H ist, welche S_5' enthält. Es ist klar, daß H isomorph zur diskreten Gruppe $\mathbf{Z}$ ist. Es sei $w\in H$ mit $(efe)w=e$ und $w=\lim w_j$, wobei w_j ein Netz in $\langle e,f\rangle$ ist. Wegen $ewe=w$ dürfen wir annehmen, daß w_j sogar ein Netz in S_5' ist, indem wir nötigenfalls zum Netz ew_je übergehen. In der diskreten Gruppe $H\cong\mathbf{Z}$ hat dies aber $w\in S_5$ zur Folge, ein offenbarer Widerspruch. Nun wenden wir uns der Möglichkeit $S_5\cong\mathbf{N}^+$ zu. Es gilt $S_4^2=fS$, $S_3^2=S_5f$ und $S_6^2=eS_5e$, so daß auch diesmal die Unterhalbgruppen S_i diskret sind.

Wir dürfen also annehmen, daß die Gruppen H_i kompakt sind. Dann gilt $S_i = H_i$ (s. HEWITT—ROSS, 9.16, S. 99), und $S = \bigcup_{i=1}^{6} S_i$ ist kompakt. Nach HOFMAN—MOSTERT 1.11 gibt es ein kleinstes (abgeschlossenes) zweiseitiges Ideal J in S.

Im Falle $J = S$ betrachten wir die von e und ef erzeugte (abgeschlossene) Unterhalbgruppe H. Offenbar ist e eine Linkseins von H. Wäre $H = S$, dann wäre $s \mapsto ese$: $S \to eSe$ ein stetiger Homomorphismus, da ja

$$(es_1e)(es_2e) = es_1(es_2e) = es_1s_2e$$

gälte. Nach HOFMANN—MOSTERT 2.21, S. 23, folgte, daß die Menge E der Idempotenten von S eine Unterhalbgruppe bildete. Da verschiedene Idempotente existieren, müßte S aus lauter Idempotenten bestehen; sie würde von den beiden Idempotenten e und f erzeugt, bestände also genau aus den Elementen e, f, ef, fe, efe, fef. Dann wäre aber $\{ef, fe, efe, fef\}$ eine echte Unterhalbgruppe, die in keine Gruppe eingebettet werden kann. Also ist $H \neq S$ eine echte Unterhalbgruppe von S mit dem Einselement e, welche S_5 enthält. Daher ist $efe = ef$, d.h. $S_3 = S_5$ und $H_3 = H_5$. Entsprechende Argumentation angewandt auf die von ef und f erzeugte Halbgruppe H mit der Rechtseins f zeigt $S_3 = S_6$ und $H_3 = H_6$, also $e = f$. Damit ist die Annahme $J = S$ endgültig hinfällig.

Das Ideal $J \neq S$ enthält ein primitives Idempotent (HOFMANN—MOSTERT 2.2), von dem wir annehmen dürfen, daß es e ist, weil S von je zwei verschiedenen ihrer Idempotente erzeugt wird. Wäre $J = \{e\}$, so folgt $ef = e$, und es wäre wieder $S \cong \{0, 1\}$.

Aus den eben zitierten Stellen aus HOFMANN—MOSTERT folgt weiter

$$J = eJe = eSe \subseteqq S_5.$$

Nun gilt $fS_5 \subseteqq S_4$, $S_4 f = S_6$, $eS_6 \subseteqq S_3$, $S_3 e \subseteqq S_5$.

Also ist $0 \neq J \subseteqq \bigcap_{i=3}^{6} S_i$. Also ist e das Einselement von S_i für $3 \leqq i \leqq 6$. Hieraus folgt aber $e = f$.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß S höchstens ein Idempotent e besitzt. Wird S nicht von einem Element (topologisch) erzeugt, so ist $\overline{\langle g \rangle}$ für jedes $g \in S$ entweder eine kompakte monothetische Gruppe oder isomorph zu $\mathbf{N}^+$, und liegt in einer zu $\mathbf{Z}$ isomorphen Untergruppe von S. In jedem Fall ist e das Einselement von S, und jedes Element von S ist eine Einheit. Also ist S eine Gruppe.

Nun sei $S = \overline{\langle z \rangle}$ monothetisch; insbesondere ist dann S abelsch. Wir nehmen zunächst $Sz = S$ an. Dann gibt es e in S mit $ez = z$. Ist $s = \lim_{i \to \infty} ez^{n_i}$, so folgt $es = e(\lim_{i \to \infty} z^{n_i}) = \lim_{i \to \infty} ez^{n_i} = s$, und e ist das Einselement von S. Wegen $Sz = S$ ist dann aber z invertierbar, und S ist eine monothetische Gruppe. Es sei schließlich $Sz \neq S$. Dann ist $\overline{\langle z^2 \rangle}$ eine echte Unterhalbgruppe von S, also in einer Untergruppe G von S enthalten. Entweder ist G eine kompakte monothetische Gruppe oder isomorph zu $\mathbf{Z}$. Der zweite Fall kann nicht eintreten, weil $\langle z^{-2} \rangle$ nicht im Erzeugnis von z liegt.

BEWEIS VON SATZ 2. Ist R ein Nullring, so ist jede additive Untergruppe von R ein Unterring. Als Ring von Pollák—Rédeischem Typ hat R also Primzahlordnung.

Wir nehmen zunächst an, daß der Ring R Nullteiler besitzt. Es seien also $a, b \in R \setminus \{0\}$ mit $ab=0$. Ist $Ra=R$, so folgt $Rb=Rab=0$. Also liegt b im Rechtsannulator $C=\{x; Rx=0\}$ von R. Es ist klar, daß das zweiseitige Ideal C in keinem Teilkörper von R enthalten ist. Wegen $0 \neq b \in C$ gilt also $C=R$, d.h. R ist ein Nullring. Entsprechendes folgt aus $Ra=0$ bzw. $bR=R$ oder $bR=0$.

Ist R kein Nullring, so gibt es Teilkörper K und L von R mit Einselementen e und f für die $Ra \subseteqq K$ und $bR \subseteqq L$ gilt. Es seien a^{-1} bzw. b^{-1} die Inversen von a bzw. b in K bzw. L. Dann ist $ef=a^{-1}abb^{-1}=0$ und $0=a^{-1}0b^{-1}=a^{-1}efb^{-1}=$ $=a^{-1}b^{-1}$ sowie $ab^{-1}=aefb^{-1}=0$ bzw. $a^{-1}b=a^{-1}efb=0$. Seien K_1 bzw. L_1 die von a bzw. b erzeugten Unterkörper von K bzw. L. Dann gilt $K_1L_1=0$.

Wir betrachten die additive Untergruppe fK_1 von R^+. Für $x, y \in K_1$ ist $fx\,fy \in fK_1L_1y=0$. Also ist fK_1 ein Nullring. Da R kein Nullring ist, folgt $fK_1=0$ und somit $L_1K_1=0$. Also enthält R die ringdirekte Summe $K_1 \oplus L_1$. Da R ein Ring von Pollák—Rédeischem Typ ist, folgt $R=K_1 \oplus L$. Wäre etw K_1 kein endlicher Primkörper, so enthielte K_1 einen echten abgeschlossenen Unterring $A \neq 0$. Dann gäbe es aber Nullteiler in $A \oplus L_1$.

Ab nun dürfen wir annehmen, daß der Ring R nullteilerfrei ist. Es sei $I \neq 0$ ein abgeschlossenes Rechtsideal. Dann gibt es einen I enthaltenden Unterkörper K. Es folgt, daß I kein weiteres Rechtsideal $\neq 0$ von R enthalten kann. Insbesondere ist also die Minimalbedingung für abgeschlossene Rechtsideale auf triviale Weise erfüllt.

Nach Kaplansky [1951], Th. 1, ist das Radikal J von R ein abgeschlossenes Ideal.

Ist $0 \neq J \neq R$, so liegt J in einem Unterkörper K von R, und es gilt dann sogar $J=K$. Die Eins von K ist aber kein quasireguläres Element, was einer bekannten Charakterisierung des Jacobson-Radikals widerspricht (vgl. McCoy Th. 6.7).

Ist $J=R$, so hat J als Pollák—Rédeischer Ring nach dem eben Gesagten keine nichttrivialen abgeschlossenen Unterringe. Insbesondere sind die Hauptideale Ra und aR abgeschlossen, stimmen also wegen der Nullteilerfreiheit von R mit R überein. Also ist R ein Körper im Widerspruch zur Annahme $R=J$.

Zum Schluß haben wir noch die Situation zu betrachten, daß $J=0$ und somit R ein halbeinfacher Ring ist. Wir haben bereits erwähnt, daß R die Minimalbedingung für abgeschlossene Rechtsideale erfüllt.

Ersetzt man im Beweis vom Lemma 15 in Kaplansky [1974] die Folgen geeignet durch Netze, so gilt das dortige Theorem 21 ohne Voraussetzung des zweiten Abzählbarkeitsaxioms: Der nullteilerfreie Ring R ist ein Q-Ring, d.h., die quasiregulären Elemente bilden eine offene Teilmenge von R. Nach Kaplansky [1948], Theorem 10, erfüllt dann der halbeinfache Q-Ring R die Minimalbedingung für alle Rechtsideale. Es folgt aus dem Satz von Wedderburn—Artin (vgl. McCoy, Theorem 5.59), daß R als abstrakter Ring isomorph zur direkten Summe endlich vieler voller Matrizenringe über Schiefkörpern ist. Da R nullteilerfrei ist, muß R ein Schiefkörper sein.

Literatur

R. Ellis, Locally compact transformation groups. *Duke Math. J.* **24** (1957), 119—125.
E. Hewitt & K. A. Ross, Abstract harmonic analysis I. *Berlin, Heidelberg, New York* 1963.
K. H. Hofman & P. S. Mostert, Elements of compact semigroups. *Columbus*, 1966.
I. Kaplansky, Topological Rings. *Amer. J. of Math.* **68** (1947), 153—183.
I. Kaplansky, Locally compact rings. I. *Amer. J. of Math.* **70** (1948), 447—459.
I. Kaplansky, Locally compact rings. II. *Amer. J. of Math.* **73** (1951), 20—29.
N. H. McCoy, The Theory of Rings. *New York* 1964.
G. Pollák & L. Rédei, Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind. Publicationes Math. (Debrecen) **6** (1959), 126—130.
E. Weiss & N. Zierler, Locally compact division rings. *Pac. J. of Math.* **8** (1958), 369—371.

ANSCHRIFT DER VERFASSER:
PROF. DR. PETER PLAUMANN
PROF. DR. KARL STRAMBACH
MATHEMATISCHES INSTIUT
DER UNIVERSITÄT ERLANGEN—NÜRNBERG
BISMARCKSTRAßE 11/2
D—8520 ERLANGEN

(Eingegangen am 22. Mai 1976.)