M—Radikale von universellen Algebren

Von REINHARD STRECKER (Güstrow)

In memoriam ANDOR KERTÉSZ

0. Im Gegensatz zur Ring- und Gruppentheorie hat man in universellen Algebren einen schwächeren Radikalbegriff. Das hat zur Folge, daß in Klassen universeller Algebren wohl die radikalfreien Algebren noch das Radikal bestimmen, aber die radikalen die radikalfreien und damit das Radikal nicht mehr eindeutig festlegen. HOEHNKE [4] betrachtet spezielle Radikale, die er M-Radikale nennt, und die durch ihre Klasse radikalfreier Algebren eindeutig bestimmt sind. Für M-Radikale kann er die Konstruktion des unteren Radikals von KUROSCH [7] übertragen. Im Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit übertragen wir die Konstruktion einer radikalen Klasse aus einer gegebenen von YU-LEE LEE [10] (vgl. auch LEAVITT und YU-LEE LEE [9] SZÁSZ [13] und WIEGANDT [18]). Im Abschnitt 3 wird die Kongruenz M-Radikal näher untersucht und im Abschnitt 4 werden für Halbgruppen Beispiele für Relationen M und radikale Klassen gegeben.

1. Radikale und halbeinfache Klassen

Wir gehen von folgender Kategorie $\mathbf{C}$ aus. $\mathrm{ob}\,\mathbf{C}$ sei eine abstrakte Klasse von Algebren eines festen finitären Typs. Die Morphismen von $\mathbf{C}$ seien Homomorphismen zwischen den Algebren (nicht notwendig alle). $\mathbf{C}$ erfülle folgende Bedingungen

i) Es gibt in $\mathrm{ob}\,\mathbf{C}$ eine einelementige Algebra. Diese ist terminales Objekt in $\mathbf{C}$. Die terminalen Objekte von $\mathbf{C}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$.

ii) Falls $\alpha\colon A\to B$ und $\beta\colon A\to C\in\mathbf{C}$ mit $\mathrm{Ker}\,\alpha\subseteq\mathrm{Ker}\,\beta$, so gibt es ein $\gamma\colon B\to C\in\mathbf{C}$ mit $\gamma\alpha=\beta$.

iii) Die Menge $\mathbf{C}(A)$ aller Kongruenzen σ der Form $\sigma=\mathrm{Ker}\,\alpha$, $\alpha\colon A\to\ldots\in\mathbf{C}$ ist ein vollständiger Verband.

Wir beziehen uns in diesem und dem folgenden Abschnitt auf $\mathbf{C}$, alle auftretenden Objekte seien aus $\mathbf{C}$, alle auftretenden Homomorphismen seien Morphismen aus $\mathbf{C}$, und es werden nur solche Kongruenzen betrachtet, die Kerne von Morphismen aus $\mathbf{C}$ sind.

Es sei R eine auf $\mathrm{ob}\,\mathbf{C}$ definierte Funktion, die jeder Algebra $A\in\mathrm{ob}\,\mathbf{C}$ eine Kongruenz $R(A)\in\mathbf{C}(A)$ zuordnet. R heißt ein *Radikal*, wenn gilt

(1) $\varphi R(A)\subseteq R(B)$ für alle $A,B\in\mathrm{ob}\,\mathbf{C}$ und Surjektionen $\varphi\colon A\to B$ aus $\mathbf{C}$. Dabei ist $\varphi R(A)=\{(\varphi(a),\varphi(b))/(a,b)\in R(A)\}$.

(2) Es ist $R(A/R(A))=0$ (die Nullkongruenz).

Die Algebren $A \notin \mathrm{ob}^0\, \mathbf{C}$ mit $R(A)=0$ heißen *radikalfrei* oder *halbeinfach,* die Algebren A mit $R(A)=1$ (Allkongruenz) heißen *radikal.*

Es ist $R(A)$ die feinste Kongruenz derart, daß $A/R(A)$ radikalfrei ist. Denn ist A/σ radikalfrei, so ist nach (1) $\sigma(a)=\sigma(b)$ für alle $(a, b)\in R(A)$.

Diese Definition des Radikals stammt von HOEHNKE [4], sie stimmt für Ringe und Gruppen nicht mit der Definition von KUROSCH [7] und AMITSUR [1] überein.

Eine Algebra A heißt *subdirektes Produkt* der Algebren A_i, $i\in I$, $A=\prod_{i\in I} A_i$, genau dann, wenn es Surjektionen $\pi_i\colon A\to A_i$ gibt derart, daß $\bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}\pi_i=0$.

Ist eine (in $\mathbf{C}$) subdirekt abgeschlossene Klasse $\mathfrak{F}$ von Algebren mit $\mathfrak{F}\cap \mathrm{ob}^0\, \mathbf{C}=\emptyset$ gegeben, so bezeichne $\sum(\mathfrak{F})$ die Klasse der Surjektionen aus $\mathbf{C}$ auf Algebren aus $\mathfrak{F}$. Die Klasse der Surjektionen aus $\sum(\mathfrak{F})$ mit der Quelle A bezeichnen wir mit $\sum_A(\mathfrak{F})$. Wir definieren $R_{\mathfrak{F}}$ durch

$$R_{\mathfrak{F}}(A) = \bigcap_{\varphi\in\Sigma_A(\mathfrak{F})} \operatorname{Ker}\varphi, \tag{3}$$

dabei wird für leeres $\sum_A(\mathfrak{F})$ gesetzt $R_{\mathfrak{F}}(A)=1$. HOEHNKE [4] beweist folgenden

Satz 1.a) *Die Klasse $\mathfrak{F}_R$ der bezüglich des Radikals R halbeinfachen Algebren ist subdirekt abgeschlossen.*

b) *Zu vorgegebener subdirekt abgeschlossener Klasse $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}\cap \mathrm{ob}^0\, C=\emptyset$ ist $R_{\mathfrak{F}}$ ein Radikal.*

BEWEIS. a) Sei $A=\prod_{i\in I} A_i$, und es seien $\pi_i\colon A\to A_i$ die zugehörigen Surjektionen. Nach (1) gilt $\pi_i(R(A))\subseteq R(A_i)=0$, und wir haben $R(A)=0$.

b) Es sei π eine Surjektion von A auf B und $(a, b)\in R_{\mathfrak{F}}(A)$, d. h., $\varphi(a)=\varphi(b)$ für alle $\varphi\colon A\to X$, $X\in\mathfrak{F}$, also insbesondere für die φ, die sich über B faktorisieren lassen, d. h., es ist $(\pi(a), \pi(b))\in R_{\mathfrak{F}}(B)$. Es sei η die natürliche Surjektion von A auf $A/R_{\mathfrak{F}}(A)$. Für $\pi\in\sum_A(\mathfrak{F})$ gilt $\operatorname{Ker}\pi\supseteq R_{\mathfrak{F}}(A)$, es ist $\pi=\varphi\eta$ für ein geeignetes $\varphi\in \sum_{A/R_{\mathfrak{F}}(A)}$. Es folgt aus $(\bar a, \bar b)\in R_{\mathfrak{F}}(A/R_{\mathfrak{F}}(A))$ die Gleichheit $\varphi(\bar a)=\varphi(\bar b)$ für alle $\varphi\in \sum_{A/R_{\mathfrak{F}}(A)}$. Für beliebige Urbilder a und b von $\bar a$ und $\bar b$ gilt $\varphi\eta(a)=\varphi\eta(b)$, $\varphi\eta$ durchläuft mit φ ganz $\sum_A(\mathfrak{F})$, daher folgt $(a, b)\in R_{\mathfrak{F}}(A)$, und es ist $\bar a=\bar b$.

Folgerung 2. (HOEHNKE [4, 5].) *Es sei R ein Radikal, $\mathfrak{F}_R$ die Klasse der radikalfreien Algebren. Dann ist*

$$R(A) = \bigcap_{\varphi\in\Sigma_A(\mathfrak{F}_R)} \operatorname{Ker}\varphi.$$

2. Untere Radikalkonstruktionen für M-Radikale

In $\text{ob}\,\mathbf{C}\setminus\text{ob}^0\,\mathbf{C}$ sei eine binäre Relation M gegeben, und es gelte

(4) $(A, A)\in M$ für alle $A\in\text{ob}\,\mathbf{C}\setminus\text{ob}^0\,\mathbf{C}$.

(5) Wenn A gemäß $A=\prod_{i\in I} A_i$ subdirekt dargestellt ist und $(A, B)\in M$, so existieren ein Index i und eine Surjektion $\varphi\colon B\to B_i$ derart, daß $(A_i, B_i)\in M$.

In Verschärfung von Hoehnke [4] nennen wir ein Radikal ein *M-Radikal,* wenn M die Bedingungen (4) und (5) erfüllt und wenn gelten:

(6) Für alle $A, B\in\text{ob}\,\mathbf{C}$ gilt: Wenn $A\in\mathfrak{F}_R$ und $(A, B)\in M$, so ist B nicht radikal.

(7) Für alle $A\in\text{ob}\,\mathbf{C}\setminus\text{ob}^0\mathbf{C}$ gilt: Wenn für alle $B\in\text{ob}\,\mathbf{C}$ aus $(A, B)\in M$ stets folgt, daß B nicht radikal ist, so ist $A\in\mathfrak{F}_R$.

In Analogie zur Ringtheorie (vgl. Wiegandt [18], Szász [13] Divinsky [3]) nenner wir eine abstrakte, nichtleere Klasse $\mathfrak{R}$ von Algebren *M-radikal*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(8) Wenn $A\in\mathfrak{R}$ und $\varphi\colon A\to B\,\overline{\in}\,\text{ob}^0C$, eine Surjektion ist, so gibt es ein $C\in\mathfrak{R}$, mit $(B, C)\in M$.

(9) Wenn für jede Surjektion $\varphi\colon B\to C$, $C\,\overline{\in}\,\text{ob}^0\,\mathbf{C}$, ein $D\in\mathfrak{R}$, existiert mit $(C, D)\in M$, dann ist $B\in\mathfrak{R}$.

Wegen (9) sind die Objekte aus $\text{ob}^0\,\mathbf{C}$ in jeder M-radikalen Klasse enthalten. Aus (8) und (9) folgt leicht, daß eine M-radikale Klasse homomorph abgeschlossen ist.

Satz 3. *Eine Klasse $\mathfrak{R}$ ist M-radikal genau dann, wenn es ein M-Radikal R gibt derart, daß* $R(A)=1\leftrightarrow A\in\mathfrak{R}$.

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{R}$ eine M-radikale Klasse. Wir setzen

(10) $A\in\mathfrak{F}\leftrightarrow$ Aus $(A, B)\in M$ folgt $B\,\overline{\in}\,\mathfrak{R}$ und es ist $A\,\overline{\in}\,\text{ob}^0\,C$.

Es ist $\mathfrak{F}\cap\text{ob}^0\,C=\emptyset$. $\mathfrak{F}$ ist subdirekt abgeschlossen, denn sei $A=\prod_{i\in I} A_i$, $A_i\in\mathfrak{F}$ und $(A, B)\in M$. Nach (5) gibt es ein $\varphi\colon B\to B_i$ mit $(A_i, B_i)\in M$, nach Voraussetzung folgt $B_i\,\overline{\in}\,\mathfrak{R}$. Daraus folgt die Existenz eines $\varphi'\colon B_i\to C$, $C\,\overline{\in}\,\text{ob}^0\,\mathbf{C}$, so daß es kein $D\in\mathfrak{R}$ mit $(C, D)\in M$ gibt, daher gibt es zu $\varphi'\varphi\colon B\to C$ kein $D\in\mathfrak{R}$ mit $(C, D)\in M$, es folgt $B\,\overline{\in}\,\mathfrak{R}$ und $A\in\mathfrak{F}$. Nach Definition von $R_{\mathfrak{F}}$ ist $R_{\mathfrak{F}}(A)=1\leftrightarrow\sum_A(\mathfrak{F})=\emptyset$. Radikal in Bezug auf $R_{\mathfrak{F}}$ sind genau die Algebren A, die sich nicht surjektiv auf Algebren aus $\mathfrak{F}$ abbilden lassen. Sei A eine solche Algebra. Für jede Surjektion $\varphi\colon A\to C$ ist $C\,\overline{\in}\,\mathfrak{F}$, daher gibt es ein $D\in\mathfrak{R}$ mit $(C, D)\in M$, und es ist $A\in\mathfrak{R}$. Nach (8) lassen sich die Algebren aus $\mathfrak{R}$ nicht surjektiv auf Algebren aus $\mathfrak{F}$ abbilden. Deshalb ist $\mathfrak{R}$ die Klasse der bezüglich $R_{\mathfrak{F}}$ radikalen Algebren. Offensichtlich ist $R_{\mathfrak{F}}$ ein M-Radikal.

b) Es sei umgekehrt R ein M-Radikal und $\mathfrak{R}$ die Klasse der Algebren A mit $R(A)=1$. Man zeigt leicht, daß $\mathfrak{R}$ eine radikale Klasse ist.

Die der M-radikalen Klasse $\mathfrak{R}$ vermöge (10) zugeordnete halbeinfache Klasse heißt die zu $\mathfrak{R}$ gehörige halbeinfache Klasse $\mathfrak{F}$, das zugehörige M-Radikal R, das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Radikal. R ist nach Hoehnke [4] durch $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt.

Hoehnke [4] hat die Konstruktion des zu einer homomorph abgeschlossenen Klasse $\mathfrak{P}$ gehörigen unteren Radikals $\mathscr{L}\mathfrak{P}$ gegeben. Eine andere Methode, um aus einer gegebenen Klasse von Ringen eine radikale Klasse zu gewinnen, gab

YU-LEE LEE [10], vgl. auch WIEGANDT [18], LEAVITT und YU-LEE LEE [9], LEAVITT [8], SZÁSZ [13]. Wir übertragen diese Methode auf Algebren. Sei A eine Algebra, B eine Teilalgebra. B heißt *erreichbar*, wenn es eine Folge $C_1, \ldots, C_n$ von Algebren gibt, so daß (A, C_1), (C_1, C_2), $\ldots$, (C_{n-1}, C_n), $(C_n, B) \in M$ sind.

Zu einer gegebenen Klasse $\mathfrak{P}$ bilden wir $\mathscr{Y}\mathfrak{P} = \{A \in \mathrm{ob}\,\mathbf{C} \mid$ Zu jedem homomorphen Bild $B \in\mid \mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$ und $(B, C) \in M$ gibt es eine Teilalgebra $U \subseteq C$, $U \in \mathfrak{P}$, $U \in\mid \mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$, die erreichbar ist.$\}$.

Satz 4. *$\mathscr{Y}\mathfrak{P}$ ist eine M-radikale Klasse.*

BEWEIS. Offensichtlich ist $\mathscr{Y}\mathfrak{P}$ homomorph abgeschlossen. Daher ist (8) mit $C = B$ erfüllt. Nun gebe es zu jedem $\varphi: B \to C$, $C \in\mid \mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$, ein D aus $\mathscr{Y}\mathfrak{P}$ mit $(C, D) \in M$. In D gibt es eine Teilalgebra $U \in \mathfrak{P}$, die erreichbar ist, d. h., es ist $B \in \mathscr{Y}\mathfrak{P}$.

Die zu einem M-Radikal R gehörige halbeinfache Klasse $\mathfrak{F}$ heißt *M-erblich*, wenn aus $A \in \mathfrak{F}$, $(A, B) \in M$ folgt $B \in \mathfrak{F}$.

Der folgende Satz ist ein Analogon zu einem Satz von LEAVITT und YU-LEE LEE [9].

Satz 5. *Ist $\mathfrak{R}$ eine M-radikale Klasse, deren zugehörige halbeinfache Klasse M-erblich ist, so ist $\mathscr{Y}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$.*

BEWEIS. Offenbar gilt $\mathscr{Y}\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{R}$. Es sei $\mathscr{Y}\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}$, dann gibt es ein $A \in\mid \mathfrak{R}$, $A \in \mathscr{Y}\mathfrak{R}$. Für das zu $\mathfrak{R}$ gehörige M-Radikal R gilt $R(A) \neq A$, es ist daher $A/R(A)$ halbeinfach aber nicht aus $\mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$. Gilt $\big(A/R(A), C\big) \in M$, so ist auch C halbeinfach. Daher ist auch jede erreichbare Teilalgebra $U \in\mid \mathrm{ob}^0\,\mathbf{C}$ von C halbeinfach, insbesondere $U \in\mid \mathfrak{R}$, und damit ist $A \in\mid \mathscr{Y}\mathfrak{R}$, im Widerspruch zur Annahme.

Folgerung 6. Es sei $\mathfrak{P}$ homomorph abgeschlossen. M besitze die Eigenschaft, daß die zu $\mathscr{L}\mathfrak{P}$ gehörige halbeinfache Klasse M-erblich ist. Dann ist $\mathscr{L}\mathfrak{P} = \mathscr{Y}\mathfrak{P}$.

BEWEIS. Nach Definition von $\mathscr{L}\mathfrak{P}$ gilt $\mathscr{L}\mathfrak{P} \subseteq \mathscr{Y}\mathfrak{P}$. Es ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathscr{L}\mathfrak{P}$. Nach Satz 5 folgt $\mathscr{Y}\mathfrak{P} \subseteq \mathscr{Y}\mathscr{L}\mathfrak{P} = \mathscr{L}\mathfrak{P}$.

Wir werden nun zeigen, daß es immer ein M gibt, so daß die Voraussetzung der Folgerung 6 erfüllt ist.

Beispiel 7. Es sei R ein Radikal, $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{R}$ die zugehörigen halbeinfache bzw. radikale Klassen. Wir setzen

$$(A, B) \in M \leftrightarrow \begin{cases} \textit{Falls} \quad A \in \mathfrak{F}, & \textit{so} \quad B \in\mid \mathfrak{R}, \\ \textit{falls} \quad A \in\mid \mathfrak{F}, & \textit{so} \quad B \textit{ beliebig}. \end{cases} \tag{11}$$

$$(A, B) \in M^* \leftrightarrow \begin{cases} \textit{Falls} \quad A \in \mathfrak{F}, & \textit{so} \quad B \in \mathfrak{F}, \\ \textit{falls} \quad A \in\mid \mathfrak{F}, & \textit{so} \quad B \textit{ beliebig}. \end{cases} \tag{12}$$

Es ist R sowohl M- als auch M^*-Radikal. $\mathfrak{F}$ ist M^*-erblich.

BEWEIS. Da $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{F} = 0$, ist (4) erfüllt. Sei A dargestellt als subdirektes Produkt $A = \prod_{i \in I} A_i$. Ist $A \in \mathfrak{F}$ und $(A, B) \in M$, so ist $B \in\mid \mathfrak{R}$. Gilt für wenigstens ein $j \in I$ die Beziehung $A_j \in \mathfrak{F}$, so ist $(A_j, B) \in M$. Ist $A_i \in\mid \mathfrak{F}$ für alle $i \in I$, so ist $(A_i, B) \in M$ für alle A_i. Ist $A \in \mathfrak{F}$ und $(A, B) \in M^*$, so ist für alle i $(A_i, B) \in M^*$. Ist $A \in\mid \mathfrak{F}$, dann gibt es ein $j \in I$ mit $A_j \in\mid \mathfrak{F}$, da $\mathfrak{F}$ subdirekt abgeschlossen ist. Mit $(A, B) \in M$ oder

$\in M^*$ ist $(A_j, B)\in M$ oder $\in M^*$. (5) ist erfüllt. Nach Definition von M^* ist $\mathfrak{F}$ M^*-erblich.

Offenbar ist M die größte Relation derart, daß R ein M-Radikal ist, und es ist M^* die größte Relation derart, daß R ein M^*-Radikal ist, dessen zugehörige halbeinfache Klasse $\mathfrak{F}$ M^*-erblich ist.

Satz 8. *Es sei R ein M_k-Radikal für alle k aus einer Indexmenge K. Dabei erfülle M_k für alle $k\in K$ die Bedingungen (4) und (5). Dann erfüllt auch $M=\bigcup\limits_{k\in K} M_k$ diese Bedingungen, und es ist R auch ein M-Radikal.*

Beweis. M erfüllt die Bedingung (4). Seien $A=\prod\limits_{i\in I} A_i$ und $(A, B)\in M$. Dann gibt es ein $1\in K$ mit $(A, B)\in M_1$. Daraus folgt die Existenz eines $\varphi\colon B\to B_j$ mit $(A_j, B_j)\in M_1\subseteqq M$. Man sieht ebenso leicht, daß (6) und (7) erfüllt sind.

3. Eigenschaften der Kongruenz M-Radikal

Wir ersetzen in diesem und den folgenden Abschnitten die Bedingung (5) an die binäre Relation M durch die Bedingung;

(13) Aus $(A, B)\in M$ folgt, daß B eine Teilalgebra von A mit $|B|>1$ ist, und es folgt $(\varphi(A), \varphi(B))\in M$ für jede Surjektion $\varphi\colon A\to X$ mit $|\varphi(B)|>1$.

Falls eine binäre Relation M auf ob $\mathbf{C}$ die Bedingung (13) erfüllt, so auch (5), (13) ist eine Verschärfung von (5).

Es sei $\mathfrak{R}$ eine M-radikale Klasse, d. h., M erfüllt die Bedingungen (4) und (13), und für das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Radikal gelten (6) und (7).

Hilfssatz 9. *Es sei $(A, B)\in M$, $B\in\mathfrak{R}$. Dann ist $B\subseteqq[b]_{R(A)}$ für jedes $b\in B$.* ($[b]_{R(A)}$ bezeichne die Kongruenzklasse von b nach der Kongruenz $R(A)$).

Beweis. Es ist $R(A)=\bigcap\ker\varphi$, wobei $\varphi\colon A\to X$ die Surjektionen von A auf alle radikalfreien Algebren X durchläuft. Es ist $\varphi(B)$ radikal und falls $|\varphi(B)|>1$ ist, gilt $(\varphi(A), \varphi(B))\in M$ im Widerspruch zur Radikalfreiheit von X. Daher ist $|\varphi(B)|=1$ für alle betrachteten φ, d. h., B ist in einer Kongruenzklasse nach $R(A)$ enthalten, $B\subseteqq[b]_{R(A)}$.

Satz. 10. *Es sei $\{[a_j]_{R(A)}, j\in J\}$ die Menge der Kongruenzklassen von $R(A)$, die Teilalgebren von A sind. Dann ist $R(A)=\bigcap\varrho$, wobei ϱ alle Kongruenzen durchläuft, die ebenfalls alle $[a_j]_{R(A)}$, $j\in J$, als volle Kongruenzklassen haben.*

Beweis. Es ist $R(A)$ die feinste Kongruenz σ derart, daß A/σ radikalfrei ist. Es ist $\bigcap\varrho\subseteqq R(A)$. Wir nehmen $\bigcap\varrho\subset R(A)$ an. Dann ist $A/\bigcap\varrho$ nicht radikalfrei, d. h., es gibt ein $B\in\mathfrak{R}$, $|B|>1$, mit $(A/\bigcap\varrho, B)\in M$. Sei η der natürliche Homomorphismus von $A/\bigcap\varrho$ auf $A/R(A)$. Aus $|\eta(B)|=1$ folgt, daß das Urbild von B in A Teilalgebra ist, die in einer vollen Kongruenzklasse nach $R(A)$ enthalten ist. Daraus folgt aber $|B|=1$, im Widerspruch zur Annahme. Daher ist $|\eta(B)|>1$, und es folgt $(A/R(A), \eta(B))\in M$, das ist ein Widerspruch zur Radikalfreiheit von $A/R(A)$, da $\eta(B)\in\mathfrak{R}$.

Satz 11. *(Erweiterungseigenschaft). Es seien B_i, $i\in I$, Teilalgebren von A mit $(A, B_i)\in M$ und $B_i\in\mathfrak{R}$. ϱ sei die feinste Kongruenz von A derart, daß jede Teilalgebra B_i in einer ϱ-Klasse enthalten ist. Es sei $A/\varrho\in\mathfrak{R}$. Dann ist auch $A\in\mathfrak{R}$.*

BEWEIS. Es sei $\varphi: A \to X$ eine Surjektion, $|X|>1$. Ist $|\varphi(B_i)|=1$ für alle B_i, $i\in I$, so ist X homomorphes Bild von A/ϱ, es folgt $X\in\mathfrak{R}$ und $(X, X)\in M$. Ist $|\varphi(B_i)|>1$, so ist $(X, \varphi(B_i))\in M$ und $\varphi(B_i)\in\mathfrak{R}$. Für jedes φ gibt es daher ein $Y\in\mathfrak{R}$ mit $(X, Y)\in M$, nach (1.9) ist $A\in\mathfrak{R}$.

4. M_{I}—M_{IV}-Radikale von Halbgruppen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Halbgruppen. Da wir spezielle Konstruktionen durchführen wollen, nehmen wir **C** als abstrakte, homomorph abgeschlossene Klasse von Halbgruppen an, die M-erblich ist, d. h. aus $A\in\operatorname{ob}\mathbf{C}$, $(A, B)\in M$ folgt $B\in\operatorname{ob}\mathbf{C}$. Wir bezeichnen wir üblich **C** als universelle Klasse (vgl. LEAVITT [8], SZÁSZ [13]).

Bekanntlich (s. LJAPIN [11]) heißt eine Teilmenge K einer Halbgruppe A *normaler Komplex*, wenn für beliebige $x, y\in A^1$ und beliebige $k_1, k_2\in K$ gilt $xk_1y\in K$ genau dann, wenn $xk_2y\in K$. Ist K ein normaler Komplex, so ist die Relation

$$(14)\qquad a\sim b \leftrightarrow \begin{cases} a=b \ \text{ oder} \\ \text{es gibt } \ u, u'\in A^1, v_1, v_2\in K \ \text{ mit} \\ a=uv_1u' \ \text{ und } \ b=uv_2u', \end{cases}$$

reflexiv, symmetrisch und mit der Multiplikation verträglich. Ihr transitiver Abschluß ϱ

$$(15)\qquad (a, b)\in\varrho \leftrightarrow \text{Es gibt } \ x_1, \dots, x_n \ \text{ mit } \ a=x_1\sim x_2\sim\dots\sim x_n=b$$

ist die feinste Kongruenz derart, daß K eine volle Kongruenzklasse ist. Umgekehrt gilt, daß die Kongruenzklassen nach einer Kongruenz normale Komplexe sind (LJAPIN [11]). Wir bezeichnen A/ϱ auch mit A/K.

Als *Normalteiler* eines Monoids wollen wir einen normalen Komplex bezeichnen, der das Einselement enthält.

Nach JÜRGENSEN [6] bezeichnen wir eine Unterhalbgruppe B von A als Fastideal, falls für alle $a\in A$ gilt

$$aB\subseteqq B \quad \text{oder} \quad |aB|=1$$

und

$$Ba\subseteqq B \quad \text{oder} \quad |Ba|=1.$$

JÜRGENSEN zeigte, daß es Fastideale gibt, die keine Ideale sind.

Es seien **C** und **D** Klassen von Halbgruppen mit $\mathbf{D}\supseteqq\mathbf{C}$. **D** sei abstrakt, **C** sei universell bezüglich der jeweils betrachteten Relation M. Ist N Teilhalbgruppe und normaler Komplex von $A\in\mathbf{D}$, so sei $N\in\mathbf{D}$.

$$(16)\qquad (A, B)\in M_{\mathrm{I}} \leftrightarrow \begin{cases} |B|>1, \ \text{und es gibt eine Halbgruppe } \ S \ \text{ aus } \mathbf{D} \\ \text{mit einem normalen Komplex } \ T \ \text{ und eine Surjektion } \ \varphi \\ \text{von } \ S \ \text{ auf } \ A \ \text{ mit } \ \varphi(T)=B. \end{cases}$$

$$(17)\qquad (A, B)\in M_{\mathrm{III}} \leftrightarrow |B|>1, \ \text{ und } \ B \ \text{ ist Fastideal von } \ A.$$

$$(18)\qquad (A, B)\in M_{\mathrm{IV}} \leftrightarrow |B|>1, \ \text{ und } \ B \ \text{ ist Ideal von } \ A.$$

Es seien **C** und **D** universelle Klassen von Monoiden. Wir definieren

$$(19)\qquad (A, B)\in M_{\mathrm{II}} \leftrightarrow \begin{cases} |B|>1, \text{ und es gibt eine Halbgruppe } S \text{ aus } \mathbf{D} \\ \text{mit einem Normalteiler } T \text{ und eine Surjektion } \varphi \\ \text{von } S \text{ auf } A \text{ mit } \varphi(T)=B \end{cases}$$

Eine ausführliche Untersuchung der M_{II} Radikale erfolgt in [12].

Offensichtlich richtig ist

Hilfssatz 12. *Die Relationen* $M_{\mathrm{I}}-M_{\mathrm{IV}}$ *erfüllen die Bedingungen* (4), (13) *und damit auch* (5).

Beispiele 13. a) Es sei $\mathbf{C}=\mathbf{D}$ eine universelle Klasse von Gruppen. Dann ist $M_{\mathrm{I}}=M_{\mathrm{II}}$, und es ist $(A, B)\in M_{\mathrm{I}}\leftrightarrow B$ ist Normalteiler von A. Bezeichnet man den zur Kongruenz $R(A)$ gehörigen Normalteiler als das Radikal, so sind die M_{I}-Radikale genau die Radikale im Sinne von Kurosch [7].

b) Es sei $\mathbf{C}=\mathbf{D}$ *die Varietät aller Halbgruppen. Es gilt*

(20) $(A, B)\in M_{\mathrm{I}}\leftrightarrow|B|>1$ *und* B *ist Teilhalbgruppe von* A.

Beweis. Es sei W_A die in **C** freie Halbgruppe mit den Elementen der Trägermenge von A als freien Erzeugenden. Entsprechend sei W_B die in **C** freie Halbgruppe mit den Elementen der Trägermenge von B als freien Erzeugenden. Wir fassen W_B als Teilhalbgruppe von W_A auf. Es ist W_B normaler Komplex von W_A. Die Zuordnung $\varphi'\colon a\in W_A\to a\in A$ läßt sich zu einem Homomorphismus φ von W_A auf A mit $\varphi(W_B)=B$ fortsetzen.

c) Es sei $M=M_{\mathrm{IV}}$. Es sei $\{B_i\}$, $i\in I$, die Menge der Ideale von A mit $B_i\in\mathfrak{R}$. Dann ist auch $B=\bigcup_{i\in I} B_i$ aus $\mathfrak{R}$. Denn ist $\varphi\colon B\to C$, $C\neq 1$, eine Surjektion, so ist für wenigstens ein i $|\varphi(B_i)|\neq 1$, und es ist $(\varphi(B), \varphi(B_i))\in M$. Nach (9) ist B radikal. Es folgt leicht, daß die Reessche Faktorhalbgruppe A/B radikalfrei ist. Unmittelbar aus der Definition des Radikals folgt, daß das M_{IV}-Radikal eine Reessche Kongruenz ist. Diese Kongruenzen entsprechen eineindeutig den Idealen, daher können wir auch $B=\bigcup B_i$, $i\in I$, $B_i\in\mathfrak{R}$ als das Radikal von A bezeichnen. Das Radikal von A umfaßt jedes Ideal von A, das radikal ist. Es liegt ein Analogon zum Radikal von Kurosch—Amitsur für Halbgruppen vor, das in der Literatur vielfach untersucht wurde (u. a. Szász [14], Tischtschenko [16], Wiegandt [17]).

d) Setzt man an Stelle von M_{I} (bzw. M_{II}) die Relation $(A, B)\in M\leftrightarrow|B|>1$ und B ist Teilhalbgruppe und normaler Komplex (bzw. Normalteiler), so ist (13) nicht erfüllt, da das homomorphe Bild eines Normalteilers nicht notwendig Normalteiler ist.

Wir interessieren uns jetzt für die Teilhalbgruppen einer Halbgruppe, die zu einer gegebenen radikalen Klasse gehören und beweisen

Hilfssatz 14. *Es sei* M *eine der Relationen* $M_{\mathrm{I}}-M_{\mathrm{IV}}$. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *eine* M*-radikale Klasse.*

a) *Es seien* (A, B_1) *und* $(A, B_2)\in M$, B_1, $B_2\in\mathfrak{R}$ *und* $B_1\cap B_2\neq\emptyset$. *Dann ist auch die von* B_1 *und* B_2 *erzeugte Halbgruppe* $B=\langle B_1\cup B_2\rangle\in\mathfrak{R}$.

b) *Es sei* $B_1\subseteqq B_2\subseteqq\dots$ *eine aufsteigende Folge von Teilhalbgruppen von* A *mit* $B_i\in\mathfrak{R}$, $i=1, 2, \dots (A, B_i)\in M$. *Dann ist auch* $B=\bigcup_{i=1} B_i\in\mathfrak{R}$.

Beweis. a) Wir zeigen, daß für jede Surjektion $\varphi\colon B \to X$, $|X| \neq 1$, ein $C \in \mathfrak{R}$ mit $|C| \neq 1$ und $(X, C) \in M$ existiert. Nach (9) ist dann $B \in \mathfrak{R}$. Gilt $|\varphi(B_1)| = 1$ und $|\varphi(B_2)| = 1$, so gilt wegen $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ die Gleichheit $\varphi(B_1) = \varphi(B_2) = \varphi(\langle B_1 \cup B_2 \rangle)$, im Widerspruch zu $|X| \neq 1$. Daher muß $|\varphi(B_1)|$ oder $|\varphi(B_2)| \neq 1$ sein, *oBdA* $\varphi(B_1)$. Es ist nach (13) $(X, \varphi(B_1)) \in M$, wegen $\varphi(B_i) \in \mathfrak{R}$ folgt aus (9) $B \in \mathfrak{R}$.

b) Es sei $\varphi\colon B \to X$ eine Surjektion. $|X| \neq 1$. Gilt für alle B_i die Beziehung $|\varphi(B_i)| = 1$, so ist $|X| = 1$. Wegen der Voraussetzung $|X| > 1$ gibt es ein B_j mit $|\varphi(B_j)| \neq 1$. Es ist $(X, \varphi(B_j)) \in M$ und $\varphi(B_j) \in \mathfrak{R}$, daher ist $X \in \mathfrak{R}$.

Mit den Bezeichnungen von Hilfssatz 14 gilt

Folgerung 15. a) *Für* $M = M_{\mathrm{III}}$ *oder* $M = M_{\mathrm{IV}}$ *gilt*

$$(A, \langle B_1 \cup B_2 \rangle) \in M \quad \textit{und} \quad (A, \cup B_i) \in M. \tag{21}$$

b) *Es sei* $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ *die Varietät aller Halbgruppen. Dann gelten auch für* $M = M_{\mathrm{I}}$ *die Beziehungen* (21).

Beweis. a) Die Vereinigung $B = \cup B_i$ einer Menge von Fastidealen mit $\cap B_i \neq \emptyset$ ist ein Fastideal (Jürgensen [6]), ebenso ist die Vereinigung von Idealen ein Ideal, die Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 14.

b) Folgt für $M = M_{\mathrm{I}}$ aus (20). Analog wie dort folgt die Behauptung auch für $M = M_{\mathrm{II}}$.

Satz 16. *Es sei* M *eine der Relationen* $M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{IV}}, M_{\mathrm{III}}$. $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ *sei eine Varietät, im Fall* M_{I} *die Varietät aller Halbgruppen* $\mathfrak{R}$ *eine* M*-radikale Klasse. Dann gibt es in jeder Halbgruppe* $A \in C$ *eine Teilhalbgruppe* $B \in \mathfrak{R}$, *die bezüglich der Eigenschaft radikal zu sein und* $(A, B) \in M$ *zu erfüllen, maximal in* A *ist. Darüber hinaus gilt für zwei verschiedene solche Halbgruppen* B *und* B' *die Beziehung* $B \cap B' = \emptyset$.

Beweis. Nach Hilfssatz 14 b) besitzt jede Kette in der halbgeordneten Menge der Teilhalbgruppen von A aus $\mathfrak{R}$ mit $(A, B) \in M$ eine obere Schranke. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz der maximalen Teilhalbgruppe $B \in \mathfrak{R}$. Nach Folgerung 15 ist $(A, B) \in M$. Nach Hilfssatz 14 gilt $B \cap B' = \emptyset$ für $B \neq B'$.

Wir geben einige Beispiele für M-radikale Klassen.

Beispiele 17. a) Es sei $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ die Klasse aller Halbgruppen. $M = M_{\mathrm{I}}$. Die abelschen Halbgruppen bilden keine M-radikale Klasse. Denn sei $S = \{1, e, j\}$ mit $ej = e$, $je = j$, $e^2 = e$, $j^2 = j$, 1 das Einselement. Es gibt neben den trivialen Kongruenzen noch die Kongruenz $\equiv$, die e und j in einer Klasse enthält. $S/\equiv$ ist abelsch, $\{1, j\}$ ist abelsch, daher ist (9) für S erfüllt, obwohl S nicht abelsch ist.

b) Es sei $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ die Klasse der kommutativen Monoide. $M = M_{\mathrm{II}}$. Die abelschen Gruppen bilden eine M-radikale Klasse. Die Bedingung (8) ist offenbar erfüllt. Nun sei S ein kommutatives Monoid $\neq 1$ und die Bedingung (9) sei erfüllt. Wir zeigen, daß S abelsche Gruppe ist. Sei G die maximale Gruppe von S mit 1 als Einselement. Nach Voraussetzung ist $G \neq 1$. Es ist G Normalteiler von S, denn für $g, h \in G$, $x \in S$ folgt aus $xg = h$ die Beziehung $x = hg^{-1} \in G$. Die feinste Kongruenz, so daß G eine volle Kongruenzklasse ist, ist durch die Nebenklassenzerlegung nach G gegeben. S/G bezeichne das homomorphe Bild von S nach dieser Kongruenz. Ist $|S/G| > 1$, so besitzt S/G eine Gruppe B, $|B| \neq 1$. Sei in S/G $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$, d. h., in S

gilt für Urbilder x und y von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Beziehung $xG \cdot yG \subseteq G$, daraus folgt $xy \in G$ und daraus $x, y \in G$. Es ist also $S/G = 1$, damit ist S eine Gruppe.

c) Es sei $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ die Klasse aller kommutativen Halbgruppen. $M = M_1$. Dann bilden die archimedischen Halbgruppen eine M-radikale Klasse. Denn sei S eine Halbgruppe und die Bedingung (9) erfüllt. Das maximale homomorphe Bild von S, das Halbverband ist, besitzt keine nicht-triviale archimedische Unterhalbgruppe, daher ist dieser Halbverband einelementig, d. h., S ist eine archimedische Halbgruppe.

d) Es sei $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ die Klasse aller Halbgruppen. $M = M_1$. Dann bilden die Halbgruppen, die nur eine triviale Halbverbandszerlegung besitzen, eine M-radikale Klasse. Denn besitzt A nur eine triviale Halbverbandszerlegung, so auch jedes homomorphe Bild. Es sei die in (9) geforderte Bedingung erfüllt für eine Halbgruppe S. Es sei $\varphi \colon S \to X$. die Surjektion auf das maximale homomorphe Bild, das Halbverband ist. Ist $X \neq 1$, so besitzt jede Unterhalbgruppe T mit $|T| \neq 1$ eine nicht-triviale Halbverbandszerlegung. Daher ist $|X| = 1$ und S ist M-radikal.

e) Es sei $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ die Klasse aller kommutativen Halbgruppen. $M = M_1$. Dann bilden die abelschen Gruppen eine M-radikale Klasse. Offenbar ist die Bedingung (8) erfüllt. Es sei B eine abelsche Halbgruppe derart, daß für jede Surjektion $\varphi \colon B \to C$, $|C| \neq 1$, eine Gruppe $\neq 1$ in C enthalten ist. Wir zeigen, daß B Gruppe ist. Wir bilden B auf das maximale homomorphe Bild ab, das Halbverband ist. Ein Halbverband enthält keine nichttriviale Gruppe, nach Voraussetzung ist daher B eine archimedische Halbgruppe. B besitzt ein Idempotent e, als archimedische Halbgruppe höchstens eines, also genau ein Idempotent e (s. CLIFFORD—PRESTON [2]). Es sei $Be \subset B$. Dann besitzt auch die Reessche Faktorhalbgruppe B/Be nur ein Idempotent. Es ist $|B/Be| \neq 1$, daher besitzt B/Be eine nichttriviale Teilhalbgruppe, die Gruppe ist. Diese besitzt aber Be, also Null, als Einselement, das ist ein Widerspruch. Daher ist $Be = B$. Es folgt $be = b$ für alle $b \in B$. Da B archimedisch ist, ist jede Gleichung $xa = e$ lösbar. Sei auch $ya = e$, es folgt $yxa = xe = x = y$. Daraus folgt, daß jede Gleichung $xa = b$ eindeutig lösbar ist, B ist Gruppe.

Literatur

[1] S. A. AMITSUR, A general theory of radicals I, II, III, *Amer. J. Math.* **74** (1952), 774—786; **76** (1954), 100—125, 126—136.

[2] A. H. CLIFFORD und G. B. PRESTON, The algebraic theory of semigroups, Vol I, *Providence* 1961.

[3] N. DIVINSKY, Rings and radicals, *Toronto* 1965.

[4] H.-J. HOEHNKE, Radikale in allgemeinen Algebren, *Math. Nachr.* **32** (1966), 347—383.

[5] H.-J. HOEHNKE, Einige neue Resultate über abstrakte Halbgruppen, *Colloquium Math.* **14**, (1966), 329—348.

[6] H. JÜRGENSEN, Fastideale von Halbgruppen, *Semigroup Forum* **9** (1974), 261—270.

[7] A. G. KUROSCH, Radikale in Ringen und Algebren, *Math. Sborn.* **33** (1953), 13—26. (Russisch.)

[8] W. G. LEAVITT, Lower radical constructions, Kolloquium über Ringe, Moduln und Radikale, *Keszthely*, 1971.

[9] W. G. LEAVITT und YU-LEE LEE, A radical coinciding with the lower radical in associative and alternative rings, *Pac. J. Math.* **30** (1969), 459—462.

[10] YU-LEE LEE, On the construction of the lower radical properties, *Pac. J. Math.* **28** (1969), 393—395.

[11] E. S. LJAPIN, Halbgruppen, *Moskau* 1960. (Russisch.)

[12] L. MÁRKI, R. MLITZ und R. STRECKER *(in preparation.)*

[13] F. Szász, Radikale der Ringe, *Berlin*, 1975.
[14] F. Szász, On radicals of semigroups with zero, I, *Proc. Jap. Acad.* **46** (1970), 595—598.
[15] R. Tangeman und D. Kreiling, Lower radicals in non-assoziative rings, *J. Austr. Math. Soc.* **14** (1972), 419—423.
[16] A. W. Tischtschenko, Radikale und radikale Klassen in Gruppoiden und Halbgruppen, *Novosibirsk*, 1973. Deponiert bei Winiti und der Nummer 7419—73, angekündigt in *Sibir. Math. J.* **15**, (1974) 458. *(Russisch.)*
[17] R. Wiegandt, On the structure of lower radical semigroups, *Czechoslovak. Math. J.* **22** (97) (1972), 1—6.
[18] R. Wiegandt, Lectures on radical and semisimple classes of rings, *Islamabad* 1972.

PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE
„LISELOTTE HERMANN"
SEKTION MATHEMATIK/PHYSIK
DDR 26 GÜSTROW

(Eingegangen am 17 Juli 1976.)