Analytische und fraktionelle Iteration formal-biholomorpher Abbildungen und Differenzenrechnung

Von LUDWIG REICH (Graz)

§ 1. Einleitung. Die Struktur der Zusatzmonome

In der Arbeit [1] wurde von den Verfassern ein Kriterium für die analytische Iterierbarkeit eines Automorphismus F des Ringes $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ über $\mathbf{C}$ angegeben, das den Zusammenhang der Iteration mit der Existenz einer gewissen ausgezeichneten (einer sogenannten „glatten") Normalform von F verwendet. Dieses Kriterium erwies sich als Verallgemeinerung eines älteren Resultats von D. C. LEWIS (vgl. [2]) und SHL. STERNBERG [3], das eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer analytischen Iteration von F darstellt. In den Beweisen der Arbeit von LEWIS spielten rekursive Systeme von Differenzengleichungen eine entscheidende Rolle, während in [1] und [3] der Zusammenhang mit gewissen autonomen Differentialsystemen herangezogen wurde. Es erweist sich aber nun, daß die Idee von Lewis, nämlich die Konstruktion analytischer Iterationen mittels der Auflösung von linearen inhomogenen Systemen von Differenzengleichungen, einen sehr einfachen Zugang nicht nur zu dem in [1] bewiesenen Kriterium ermöglicht, sondern darüber hinaus auch den analogen Satz über die Existenz fraktioneller Iterationen eines gegebenen Automorphismus F sogleich mitliefert. Außer wohlbekannten Existenzaussagen bei Differenzengleichungen werden nur Sätze aus der Theorie der Normalformen biholomorpher Abbildungen aus [4] und beim Beweis der Notwendigkeit unserer Bedingung das Hauptergebnis aus [5] herangezogen.

Nun zu den Bezeichnungen und zur Formulierung der Sätze, die wir hier beweisen wollen. Ein *Automorphismus* F des Ringes $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ ist gegeben durch

$$F\colon\ x \mapsto F(x) = Ax + \mathfrak{P}(x), \tag{1}$$

wobei $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ eine Spalte von n unabhängigen Variablen, A eine nicht singuläre komplexe (n, n)-Matrix und $\mathfrak{P}(x) = {}^t(\mathfrak{P}_1(x), \dots, \mathfrak{P}_n(x))$ ein formaler Potenzreihenvektor einer Ordnung $\operatorname{ord} \mathfrak{P}(x) \geqq 2$ ist. Die gesuchten *analytischen Iterationen* $\{F_t \mid t \in \mathbf{C}\}$, d. h. einparametrige Liesche Gruppen von Automorphismen, haben die Elemente

$$F_t\colon\ x \mapsto F(t, x) = A(t)x + \mathfrak{P}(t, x), \tag{2}$$

und es gilt

$$F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'}, \tag{3}$$

$$F = F_1, \tag{4}$$

wobei $\circ$ die Substitution formaler Potenzreihen bezeichnet. t ist ein additiver Parameter, so daß die Koeffizienten des Potenzreihenvektors $F(t, x)$ holomorphe Funktionen in t sind. Wie in [1] (oder [6]) nennen wir $\{F_t | t \in \mathbf{C}\}$ *eine zu* $\Lambda = (\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n)$ *gehörige analytische Iteration von* F *(mit den festen Bestimmungen* $\ln \varrho_i$ *der Logarithmen der Eigenwerte* $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ *von* A*), falls* $A(t)$ *die Eigenwerte* $e^{\ln \varrho_1 t}, \dots, e^{\ln \varrho_n t}$ *hat.*

Bekanntlich *gehört jede analytische Iteration zu genau einem geeigneten* Λ (vgl. [6]). Für die Normalformen der Automorphismen F gegenüber Konjugiertenbildung und den dabei wesentlichen Begriff des Zusatzmonoms [1]) verweisen wir auf [4], für den Begriff einer bezüglich Λ glatten Normalform auf [1]. Dann lautet der von uns zu beweisende Satz über analytische Iterationen:

Satz 1. *F besitzt genau dann eine analytische Iteration bezüglich* $\Lambda = (\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n)$, *falls F zu einer bezüglich* Λ *glatten Normalform*

$$N\colon\; x \mapsto Jx + \mathfrak{N}(x)$$

konjugiert ist ($N = T^{-1} \circ F \circ T$ *mit einem Automorphismus* T), *d. h. in der Komponente* $\mathfrak{N}_k(x)$ *von* $\mathfrak{N}(x)$ *treten höchstens solche Zusatzmonome* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ *mit einem von* 0 *verschiedenen Koeffizienten auf, für die gilt:*

$$\ln \varrho_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \varrho_i \quad \left(\sum \alpha_i \geqq 2,\ \alpha_i \geqq 0\ \ \alpha_i \text{ ganz}\right).$$

Der Beweis dieses Satzes mittels der Methode der Differenzengleichungen ist in § 2 enthalten. Ein analoger Satz läßt sich für das *Problem faktioneller Iteration von* F aussprechen. Dazu sei m eine natürliche Zahl. *G heißt m-te Wurzel von F (fraktionelle Iterierte m-ter Ordnung von F), falls gilt:*

$$G^m = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{m\text{-mal}} = F,$$

wobei wir noch die Eigenwerte $\varrho_1^{1/m}, \dots, \varrho_n^{1/m}$ des Linearteils von G vorgeben. (Notwendigerweise ist $\varrho_i^{1/m}$ eine m-te Wurzel von ϱ_i).

Hier gilt folgendes Ergebnis:

Satz 2. *F besitzt genau dann eine m-te Wurzel zu einer gegebenen Bestimmung* $(\varrho_1^{1/m}, \dots, \varrho_n^{1/m})$ *der m-ten Wurzeln der* ϱ_i, *falls F zu einer solchen Normalform*

$$N\colon\; x \mapsto Jx + \mathfrak{N}(x)$$

konjugiert ist, so daß in $\mathfrak{N}_k(x)$ *höchstens solche Zusatzmonome* x^α *mit einem von Null verschiedenen Exponenten auftreten, falls*

$$\varrho^{1/m} = (\varrho_1^{1/m})^{\alpha_1} \dots (\varrho_n^{1/m})^{\alpha_n}.$$

Der Beweis dieses nützlichen Kriteriums wird in § 3 ebenfalls mittels der Methode der Differenzenrechnung im engen Anschluß an den Beweis von Satz 1 geführt.

---

[1]) x^α heißt Zusatzmonom zum Eigenwert ϱ_j, falls $\varrho_j = \varrho_1^{\alpha_1} \dots \varrho_n^{\alpha_n}$ $(x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$.

Wir beschließen die Einleitung mit Hilfssätzen, die sowohl im Beweis von Satz 1 als auch von Satz 2 verwendet werden.

Hilfssatz 1. *Vorgelegt sei das System von Differenzengleichungen*

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= \varrho y_1(t) & &+ e^{\ln \varrho t} P_1(t) \\ y_2(t+1) &= & y_1(t) + \varrho y_2(t) &+ e^{\ln \varrho t} P_2(t) \\ &\vdots & &\vdots \\ y_s(t+1) &= & y_{s-1}(t) + \varrho y_s(t) &+ e^{\ln \varrho t} P_s(t), \end{aligned}$$

in dem die $P_i(t)$ Polynome in t sind, $\varrho \neq 0$. Dann existiert eine Lösung $(y_1(t), \ldots, y_s(t))$ mit

$$y_i(t) = e^{\ln \varrho t} Q_i(t),$$

wobei Q_i nin Polynom in t ist, das für $t=0$ verschwindet.

Beweis. Der Ansatz $y_1 = e^{\ln \varrho t} Q_1(t)$ in der ersten Gleichung fürt auf:

$$Q_1(t+1) = Q_1(t) + \frac{1}{\varrho} P_1(t).$$

Ist $P_1(t) = 0$, so genügt es, $Q_1(t) = 0$ zu nehmen. Ist $P_1(t) = c_l t^l + c_{l-1} t^{l-1} + \ldots + c_0$, $c_l \neq 0$, $l \geqq 1$, so machen wir den Ansatz $y_l(t) = d_{l+1} t^{l+1} + \ldots + d_0$. Wir erhalten für die Koeffizienten d_j, $j \geqq 1$, ein eindeutig auflösbar rekursives lineares Gleichungssystem, während $Q_1(0) = 0$ $d_0 = 0$ ergibt. Sobald $y_1 = e^{\ln \varrho t} Q_1(t)$ bestimmt ist, ergibt sich die Existenz von $y_k = e^{\ln \varrho t} Q_k(t)$, $k \geqq 2$, mit den gleichen Überlegungen.

Hilfssatz 2. *Verschwindet ein Polynom $P(u, v)$ (in den Unbestimmten u und v) mit komplexen Koeffizienten für alle ganzen Werte von u und v, so verschwindet $P(u, v)$ identisch.*

Beweis. Es sei $P(u, v) = P_m(u) v^m + \ldots + P_0(u)$, mit Polynomen $P_i(u)$ in u. Für jedes $u_0 \in \mathbf{Z}$ gilt:

$$P(u_0, v) = P_m(u_0) v^m + \ldots + P_0(u_0)$$

verschwindet für alle $v \in \mathbf{Z}$, somit folgt $P_m(u_0) = \ldots = P_0(u_0) = 0$, für alle $u_0 \in \mathbf{Z}$, also $P_j(u) \equiv 0$, $j = 0, \ldots m$. Das bedeutet aber $P(u, v) \equiv 0$.

Sodann benötigen wir noch einige Tatsachen über die „Substitution von Zusatzmonomen in Zusatzmonome", bzw. über die „Substitution von glatten Zusatzmonomen in glatte Zusatzmonome", deren Beweis z. B. in [4] steht.

Hilfssatz 3. *Es sei $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ein Zusatzmonom zu ϱ_i (im Relationensystem für $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$), und es sei etwa $\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_{t_1}, \ldots, \varrho_{t_{k-1}+1} = \varrho_{t_{k-1}+2} = = \varrho_{t_\kappa}, \ldots, \varrho_{t_{m-1}+1} = \ldots = \varrho_n$, die Zerlegung der Menge $\{\varrho_1 \ldots \varrho_n\}$ in untereinander gleiche ϱ_j. Y_j, $j = 1, \ldots, n$, seien formale Potenzreihen in $y_1, \ldots, y_n$, so daß, falls $t_{k-1} + 1 \leqq j \leqq t_k$,*

$$y_j = \sum_{l=t_{k-1}+1}^{t_k} c_{jl} y_l + \sum_{|\nu| \geqq 2}' c_{j,\nu} y^\nu,$$

wobei die zweite Summe Σ' über alle diejenigen ν zu erstrecken ist, für die x^ν Zusatzmonom zu ϱ_j ist. Dann ist die formale Potenzreihe

$$(Y_1(y))^{\alpha_1} \dots (Y_n(y))^{\alpha_n}$$

ebenfalls eine Summe von mit komplexen Koeffizienten multiplizierten Zusatzmonomen zu ϱ_j.

Hilfssatz 4. *Es sei $x = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ein glattes Zusatzmonom zu ϱ_i bezüglich einer Bestimmung $\Lambda = (\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n)$ der Logarithmen der ϱ_i (— dabei ist in der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 3 $\ln \varrho_{t_{k-1}+1} = \dots \ln \varrho_{t_k}$, $k = 1, \dots, r$, $t_0 = 0$; zu wählen —). $Y_j(y)$ seien formale Potenzreihen wie in Hilfssatz 3, wobei hier die zweite Summe aber nur über glatte Zusatzmonome zu ϱ_j bezüglich Λ zu erstrecken ist. Dann ist die formale Potenzreihe*

$$(Y_1(y))^{\alpha_1} \dots (Y_n(y))^{\alpha_n}$$

Summe von glatten Zusatzmonomen zu ϱ_i bezüglich der Wahl Λ.

Hilfssatz 5. *Es sei $\Lambda = (\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n)$ eine feste Wahl der Logarithmen der Eigenwerte $\varrho_1, \dots, \varrho_n$. Dann existiert eine komplexe Zahl t_0 mit folgender Eigenschaft: $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ist genau dann glattes Zusatzmonom zu ϱ_k bezüglich Λ, falls x^α Zusatzmonom zu $e^{t_0 \ln \varrho_k}$ ist im Relationensystem für $e^{t_0 \ln \varrho_1}, \dots, e^{t_0 \ln \varrho_n}$ (d. h. falls $e^{t_0 \ln \varrho_k} = \exp(t_0 \sum_{i=1} \alpha_i \ln \varrho_i)$).*

Beweis. Falls x^α glattes Zusatzmonom zu ϱ_k bezüglich Λ ist, d. h. falls $\ln \varrho_k = \sum_{i=1} \alpha_i \ln \varrho_i$, so gilt offensichtlich für jedes t_0: $\exp t_0 \ln \varrho_k = \exp(t_0 \Sigma \alpha_i \ln \varrho_j)$, d. h. x^α ist glattes Zusatzmonom zu $e^{\ln \varrho_k t_0}$ im Relationensystem für

$$e^{\ln \varrho_1 t_0}, \dots, e^{\ln \varrho_n t_0}.$$

Es sei nun, zum Beweis der Umkehrung, W der von $\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n$, über $\mathbf{Q}$ erzeugte Vektorraum. W ist endlich-dimensional, während $\mathbf{C}$ über $\mathbf{Q}$ unendliche Dimension hat. Somit existiert ein $s_0 \in \mathbf{C}$, das nicht in W enthalten ist. Klarerweise ist $s_0 \neq 0$. Es sei $t_0 = \frac{2\pi i}{s_0}$. Ein solches t_0 hat nun die in Hilfssatz 5 verlangte Eigenschaft. Falls nämlich $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ Zusatzmonom zu $\exp t_0 \ln \varrho_k$ im Relationensystem für $\exp t_0 \ln \varrho_1, \dots, \exp t_0 \ln \varrho_n$ ist, so haben wir

$$\exp t_0 \ln \varrho_k = \exp(t_0 \Sigma \alpha_i \ln \varrho_i),$$

somit

$$t_0 \ln \varrho_k = t_0 \Sigma \alpha_i \ln \varrho_i + 2\pi i \nu, \quad \nu \in \mathbf{Z},$$

oder

$$\ln \varrho_k = \Sigma \alpha_i \ln \varrho_i + \frac{2\pi i}{t_0} \nu.$$

Wäre $\nu \neq 0$, so wäre demnach $s_0 = \frac{2\pi i}{t_0}$ von $\ln \varrho_1, \dots, \ln \varrho_n$ linear abhängig über

$\mathbf{Q}$, gehörte also zu W. Somit erhalten wir

$$\ln \varrho_k = \Sigma \alpha_i \ln \varrho_i,$$

d. h. x^α ist glattes Zusatzmonom zu ϱ_k bezüglich Λ.

Wir benötigen noch einen *Satz über die mit einer Normalform F vertauschbaren Automorphismen T*. Der allgemeine Fall, bei dem die Schwierigkeiten im Linearteil von T liegen, wird im [5] behandelt. Wir nehmen hier an, daß die Normalform als

$$F\colon\ x \mapsto Jx + \mathfrak{P}(x) = F(x)$$

gegeben ist; J sei Jordansche Normalform und es sei genauer

$$J = J_1 \oplus \ldots \oplus J_r \quad (r \geqq 1),$$

wo J_i ein Jordanblock, und zwar eine obere Dreiecksmatrix mit dem Eigenwert ϱ_i sei. J_l stehe in den aufeinanderfolgenden Zeilen $t_{l-1}+1, \ldots, t_l$ $(t_0=0)$. Für die k-te Komponente $F_k(x)$ des Potenzreihenvektors $F(x)$ können wir dann nach Voraussetzung schreiben, falls $t_{l-1}+1 \leqq k \leqq t_l$ ist:

$$F_k(x) = \varrho_l x_k + \varepsilon x_{k+1} + \sum_{|\nu|\geqq 2}{}' \mathfrak{p}_{k,\nu} x^\nu \quad \text{mit} \quad \varepsilon = 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 0,$$

wobei Σ' andeutet, daß nur über Zusatzmonome zu ϱ_l summiert wird, d. h. daß $\mathfrak{p}_{k,\nu}=0$, falls x^ν kein Zusatzmonom zu ϱ_l ist. Unter den (invertierbaren) Lösungen T der Funktionalgleichung $F \circ T = T \circ F$ betrachten wir hier nur solche $T\colon x \mapsto Bx + \mathfrak{T}(x)$, für deren Linearteil B gilt: (I) $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$ (das gleiche r wie in der direkten Zerlegung von J), wobei B_k in den Zeilen mit den Indizes $t_{k-1}+1, \ldots, t_k$ steht, die für J definiert wurden. (II) Die B_k sind, wie die J_k, obere Dreiecksmatrizen. Unter diesen Voraussetzungen werden wir zeigen

Hilfssatz 6. *Ist F eine Normalform der eben beschriebenen Gestalt und T eine invertierbare Lösung der Funktionalgleichung $F \circ T = T \circ F$ mit der unter* (I), (II) *angegebenen Struktur des Linearteils, so gilt $T\colon x \mapsto Bx + \mathfrak{T}(x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $BJ = JB$.

b) *In der k-ten Komponente $\mathfrak{T}_k(x)$ von $\mathfrak{T}(x)$ treten, falls $t_{l-1}+1 \leqq k \leqq t_l$, höchstens Zusatzmonome zu ϱ_l mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auf.*

Beweis. Es sei x^α, $|\alpha| \geqq 2$, das in der lexikographischen Ordnung für Monome kleinste. Monom (also insbesondere des kleinsten Grades), das in irgendeinem $\mathfrak{T}_k(x)$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftritt, ohne Zusatzmonom zum zugehörigen Eigenwert ϱ_l, $t_{l-1}+1 \leqq k \leqq t_l$, zu sein.

Wir nehmen ferner an, es sei k der größte Index eines $\mathfrak{T}_j(x)$, für den dies, bei festem minimalen $|\alpha|$, der Fall ist. Die Funktionalgleichung $F \circ T = T \circ F$ ergibt dann (etwa in $\mathbf{C}[\![y_1, \ldots, y_n]\!]$)

$$F_k(T_1(y), \ldots, T_n(y)) = T_k(F_1(y), \ldots, F_n(y)),$$

somit

$$\varrho_l T_k(y) + \varepsilon_k T_{k+1}(y) + \sum_{|\nu|\geqq 2}{}' \mathfrak{p}_{k,\nu} T(y)^\nu =$$

$$= b_{kk} F_k(y) + \ldots + b_{kt_l} F_{t_l}(y) + \sum_{|\mu|\geqq 2} t_{k,\mu} F(y)^\mu.$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten von x^α auf beiden Seiten dieser Gleichung. Mit $\{F(y)\}_m$ bezeichnen wir den Abschnitt des Grades $m-1$ $(m \geqq 1)$ der Potenzreihe $F(y)$, mit $[F(y)]_\alpha$ den Koeffizienten des Monoms y^α in $F(y)$. Der Koeffizient

$$[\varrho_l T_k(y) + \varepsilon_k T_{k+1}(y) + \sum_{|\nu| \geqq 2}' \mathfrak{p}_{k,\nu} T(y)^\nu]_\alpha$$

ist nun offensichtlich, wegen $|\nu| \geqq 2$, gleich

$$\varrho_l [T_k(y)]_\alpha + \varepsilon_k [T_{k+1}(y)]_\alpha + [\sum_{2 \leqq |\nu| \leqq |\alpha|-1}' \mathfrak{p}_{k,\nu} \{T_1(y)\}_{|\alpha|}^{\nu_1} \dots \{T_n(y)\}_{|\alpha|}^{\nu_n}]_\alpha.$$

In $T_{k+1}(y)$ tritt das Monom y^α nicht wirklich auf, nach Annahme über die Maximalität des Indexes k. In jedem $\{T_j(\mathfrak{p})\}_{|\alpha|}$ treten wegen der Minimalität des Nichtzusatzmonoms x^α nur Zusatzmonome auf, und zwar zu ϱ_m, falls $t_{m-1}+1 \leqq j \leqq t_m$. Der Linearteil von $T_k(y)$ ist nach Voraussetzung (II) von der Form

$$b_{kk} y_k + b_{kk+1} y_{k+1} + \dots + b_{kt_l} y_{t_l},$$

so daß Hilfssatz 3 anwendbar ist, weshalb auch in

$$\sum_{2 \leqq |\nu| \leqq |\alpha|-1}' \cdots$$

nur glatte Zusatzmonome zu ϱ_l wirklich auftreten. Es bleibt also auf der linken Seite, da ja

$$[\Sigma' \dots]_\alpha = 0, \quad \text{nur} \quad \varrho_l t_{k,\alpha}.$$

Auf der rechten Seite ist zunächst $[b_{kj} F_j(y)]_\alpha = 0$.

In der Summe $\sum_{|\mu| \geqq 2} t_{k,\mu} F(y)^\mu$, sind wegen der Minimalität von α alle $t_{k,\mu}=0$ für $|\mu| < |\alpha|$, falls x^μ kein Zusatzmonom zu ϱ_l ist. Nach Hilfssatz 3 trägt daher $\sum_{2 \leqq |\mu| \leqq |\alpha|-1} t_{k,\mu} F(y)^\mu$ nur glatte Zusatzmonome (zu ϱ_l) bei, es ist also

$$[\sum_{2 \leqq |\mu| \leqq |\alpha|-1} t_{k,\mu} F(y)^\mu]_\alpha = 0.$$

Klarerweise gilt

$$[\sum_{|\mu| > |\alpha|} t_{k,\mu} F(y)^\mu]_\alpha = 0.$$

Es bleibt also

$$[\sum_{|\mu| = |\alpha|} t_{k,\mu} F(y)^\mu]_\alpha$$

zu berechnen. Wegen der Minimalität von α in bezug auf „$t_{k,\alpha} \neq 0$, x^α kein Zusatzmonom zu ϱ_l“ gilt:

$$[\sum_{|\mu|=|\alpha|} t_{k,\mu} F(y)^\mu]_\alpha = [\sum_{|\mu|=|\alpha|} t_{k,\mu} (\varrho_1 y_1 + \varepsilon_1 y_2)^{\alpha_1} \dots (\varrho_n y_n)^{\alpha_n}]_\alpha =$$
$$= [t_{k,\alpha} (\varrho_1 y_1 + \varepsilon_1 y_2)^{\alpha_1} \dots (\varrho_n y_n)^{\alpha_n}]_\alpha = \varrho^\alpha t_{k,\alpha},$$

mit der Abkürzung $\varrho^\alpha = \varrho_1^{\alpha_1} \dots \varrho_1^{\alpha_{t_1}} \varrho_2^{\alpha_{t_1+1}} \dots \varrho_n^{\alpha_n}$. Dabei wurde nochmals verwendet, daß $t_{k,\mu} F(y)^\mu$ mit kleinerem μ als α keinen Beitrag zum Koeffizienten von y^α liefern können, da dann $t_{k,\mu} \neq 0$ nur, falls x^μ Zusatzmonom zu ϱ_l ist, und somit die Substitution von $F(y)$ für x nach Hilfssatz 3 nur Zusatzmonom zu ϱ_l ergibt.

Die Koeffizienten müssen aber links und rechts gleich sein, also folgt $(\varrho_l-\varrho^\alpha)t_{k,\alpha}=0$; da aber x^α kein Zusatzmonom zu ϱ_l ist, haben wir $\varrho_l-\varrho^\alpha\neq 0$, somit $t_{k,\alpha}=0$, im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir fügen noch folgende Bemerkung an. In den Bezeichnungsweisen von Hilfsatz 3 und Hilfssatz 4 gilt für die Unbestimmte x_j, mit $t_{k-1}+1\leqq j\leqq t_k$, $k=0,\dots,r$, offensichtlich

$$x_j = x_1^{e_{j,1}}\dots x_n^{e_{j,n}} = x^{e_j},$$

wobei, für ein weiteres i mit $t_{k-1}+1\leqq i\leqq t_k$ gilt:

$$\ln\varrho_j = \sum_{r=1}^{n} e_{j,r}\cdot\ln\varrho_r = \sum_{r=1}^{n} e_{k,r}\ln\varrho_r = \ln\varrho_k.$$

Somit erfüllt der Exponentenvektor e_j von x_j die Eigenschaft eines (glatten) Zusatzmonoms x^ν zu ϱ_i (bezüglich Λ), $t_{k-1}+1\leqq i\leqq t_k$, bis auf $|\nu|\geqq 2$. Somit kann in allen Sätzen über (glatte) Zusatzmonome (z. B. in Hilfssatz 3 und Hilfssatz 4) unter einem Zusatzmonom zu ϱ_i, $t_{k-1}+1\leqq i\leqq t_k$, auch x_j verstanden werden. Diese Erweiterung des Begriffs „(glattes) Zusatzmonom" werden wir in den Beweisen von Satz 1 und Satz 2 verwenden.

§ 2. Analytische Iteration und Differenzenrechnung

Um Satz 1 zu beweisen, nehmen wir zunächst an, F sei eine bezüglich der festen Wahl $\Lambda=(\ln\varrho_1,\dots,\ln\varrho_n)$ der Logarithmen glatte Normalform (vgl. [1]). Wir werden beweisen, daß dann F eine zu Λ gehörige analytische Iteration besetzt. Ihre Elemente schreiben wir nun genauer als

(5) $$F_t(x) = F(t,x) = A(t)x + \sum_{|\nu|\geqq 2}\mathfrak{p}_\nu(t)x^\nu.$$

Aus der Funktionalgleichung (3) folgt speziell mit $t'=1$:

(6) $$F(t+1,x) = F\big(1, F(t,x)\big) = F\circ F(t,x).$$

Daraus leiten wir, im Anschluß an LEWIS [2], für jedes ν ein rekursives System von Differenzengleichungen für die Komponenten $\mathfrak{p}_{\nu,j}(t)$, $j=1,\dots,n$, der Vektoren $\mathfrak{p}(t)$, $|\nu|\geqq 2$, her. Über den Linearteil $A(t)$ der analytischen Iteration (5), die zu Λ gehören soll, können wir (vgl. [4]) o.B.d.A. folgendes voraussetzen: a) $A(1)=J$, ist eine Jordansche Normalform. Es zerfalle J in Blöcke J_i gemäß

$$J = J_1\oplus J_2\oplus\dots\oplus J_r \quad (r\geqq 1).$$

J_i sei eine untere Dreiecksmatrix und der in J_i auftretende Eigenwert sei mit ϱ_i bezeichnet (in Abänderung der in der Einleitung verwendeten Bezeichnungsweise). Der Block J_k stehe dabei in den Zeilen $t_{k-1}+1$ bis t_k von J $(1\leqq k\leqq r,\ t_0=0)$.

b) Wie aus der Theorie der analytischen Iteration von Matrizen bekannt ist, ist dann eine jede zu Λ gehörige analytische Iteration von $A(1)=A=J$ konjugiert zur folgenden:

$$A(t) = A_1(t)\oplus\dots\oplus A_r(t),$$

es ist

$$A_i(t) = e^{\ln\varrho_i t}B_i(t), \quad A_i(1) = J_i,$$

wobei $B_i(t)$ ebenfalls untere Dreiecksmatrix ist, deren Elemente Polynome sind. (Für diese benötigen wir hier keine explizite Darstellung). Für den Koeffizientenvektor $\mathfrak{p}_\nu(t)$ des Monoms x^ν erhalten wir aus (5) und (6)

$$\mathfrak{p}_\nu(t+1) = A\mathfrak{p}_\nu(t) + \mathfrak{P}_\nu(\mathfrak{p}_\mu(t), f_{\mathfrak{P}}), \tag{7}$$

wobei $\mathfrak{P}_\nu$ ein Polynomvektor in den Komponenten der Koeffizientenvektoren $\mathfrak{p}_\mu(t)$ mit $|\mu|<|\nu|$ und in den Komponenten der Koeffizientenvektoren $f_\varkappa$ der bezüglich Λ glatten Normalform F sind. Die Formel (7) gilt auch für die Spalten der Matrix $A(t)$, wenn hier $\mathfrak{P}_\nu \equiv 0$ gesetzt wird $([A(t+1)=A\cdot A(t)])$. In diesen Fällen $(|\nu|=1)$ nehmen wir an, daß die $\mathfrak{p}_\nu(t)$ gemäß den Bemerkungen a) b) über die lineare Iteration $A(t)$ gewählt werden.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir mittels vollständiger Induktion nach $|\nu|$:

Die Systeme (7) besitzen Lösungen $\mathfrak{p}_\nu(t)$, bei denen

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(t) = e^{\ln \varrho_i t}\mathfrak{q}_{\nu,j}(t), \quad \text{für} \quad t_{i-1}+1 \leqq j \leqq t_i$$

mit Polynomen $\mathfrak{q}_{\nu,j}(t)$ in t. Falls ν nicht Exponentenvektor eines bezüglich Λ glatten Zusatzmonoms zu ϱ_i ist, so gilt $\mathfrak{p}_{\nu,j}(t)\equiv 0$.

Für $|\nu|=1$ ist auf Grund der Bemerkungen a) b), sowie auf Grund der Tatsache, daß sich x_j, für $t_{i-1}+1\leqq j\leqq t_i$, wie ein glattes Zusatzmonom zu ϱ_i verhält, die Behauptung richtig (vgl. Ende der Einleitung). Es sei also die Behauptung richtig für alle $\mathfrak{p}_\mu(t)$ mit $|\mu|<|\nu|$, es sei $t_{i-1}+1\leqq j\leqq t_i$, dann folgt aus der Funktionalgleichung (6) mit (5)

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(t+1) = (A\mathfrak{p}_\nu(t))_j + [\mathfrak{P}_j(F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)]_\nu; \tag{8}$$

hier haben wir mit $[\mathfrak{P}_j(F(t,x)]_\nu$ den Term cx^ν in der Potenzreihe in der eckigen Klammer bezeichnet. Bedeutet allgemein $\{\mathfrak{P}(x)\}_{|\nu|}$ den Abschnitt des Grades $|\nu|-1$ im formalen Potenzreihenvektor $\mathfrak{P}(x)$, so können wir wegen $|\nu|\geqq 2$ umformen:

$$[\mathfrak{P}_j(F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)]_\nu = [\mathfrak{P}_j(\{F(t,x)\}_{|\nu|}]_\nu.$$

Nach Induktionsannahme sind alle in $\{F_l(t,x)\}_{|\nu|}$ wirklich auftretenden Monome ebenfalls glatte Zusatzmonome zu ϱ_k, falls $t_{k-1}+1\leqq l\leqq t_k$. Nach Hilfssatz 4 sind daher alle in $\{\mathfrak{P}_j(F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x)\}_{|\nu|+1}$ wirklich auftretenden Monome $x^\varkappa$ glatte Zusatzmonome zu ϱ_i bezüglich Λ. Daraus folgt: Ist x^ν kein glattes Zusatzmonom zu ϱ_i, so lautet (7) für die j-te Komponente wegen $\mathfrak{P}_{\nu,j}(\mathfrak{p}_\mu(t), f_\varkappa)\equiv 0$: $\mathfrak{p}_{\nu,j}(t+1) = (A\mathfrak{p}_\nu(t))_j$, somit:

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(t+1) = e^{\ln \varrho_i t}\mathfrak{q}_{\nu,j}(t)$$

mit

$$\mathfrak{q}_{\nu,j}(t) \equiv 0, \quad t_{i-1} \leqq j \leqq t_i.$$

Es sei nun x^ν glattes Zusatzmonom zu ϱ_i.

Nach Induktionsannahme gilt

$$\{F_l(t,x)\}_\nu = e^{\ln \varrho_k t}\cdot \tilde{F}_l(t,x), \quad (\text{für } t_{k-1}+1 \leqq l \leqq t_k),$$

wobei die Koeffizienten von $\tilde{F}_l(t,x)$ Polynome in t sind. Nach dem, was über die in

$$\{\mathfrak{P}_j(F(t,x)\}_{|\nu|+1}, \quad \text{also in} \quad [\mathfrak{P}_j(F(t,x)]_\nu$$

wirklich auftretenden Monome vorhin bewiesen wurde, gilt somit

$$\{\mathfrak{P}_j(F(t,x)\}_{|\nu|+1} = e^{\ln \varrho_i t} \cdot \mathfrak{R}_j^{(\nu)}(t,x),$$

wobei die Koeffizienten von $\mathfrak{R}_j^{(\nu)}(t,x)$ Polynome in t sind. Somit lautet (7) für $\mathfrak{p}_{\nu,j}(t)$ in diesem Fall

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(t+1) = (A\mathfrak{p}_\nu(t))_j + e^{\ln \varrho_i t}\mathfrak{q}_{\nu,j}(t) \tag{9}$$

mit einem Polynom $\mathfrak{q}_{\nu,j}(t)$.

Nach Hilfssatz 1 hat dieses System von Differenzengleichungen eine Lösung

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(t) = e^{\ln \varrho_i t}\mathfrak{q}_{\nu,j}(t), \quad (t_{i-1}+1 \leqq j \leqq t_i),$$

mit Polynomen $\mathfrak{q}_{\nu,j}(t)$, die für $t=0$ verschwinden.

Es ist jetzt zu beweisen, daß der mit den oben konstruierten $\mathfrak{p}_\nu(t)$ gebildete Potenzreihenvektor

$$F_t(x) = \sum_{|\nu|\geqq 1} \mathfrak{p}_\nu(t)x^\nu$$

eine analytische Iteration von F ist, die zur Wahl Λ der Logarithmen gehört, d. h. daß die Funktionalgleichung

$$F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'} \quad \text{und die Randbedingung} \tag{3}$$

$$F_1 = F \quad \text{befriedigt werden.} \tag{4}$$

Auf Grund der Bedingung $\mathfrak{p}_\nu(0)=0$ für $|\nu|\geqq 2$ gilt $F_o=id$, und daher wegen der Relation $F(t+1,x)=F\circ F(t,x)$, von der wir bei der Konstruktion der $\mathfrak{p}_\nu(t)$ ausgingen:

$$F_1 = F\circ F_o = F.$$

Daraus folgt mittels vollständiger Induktion nach m:

$$F_m = F^m, \quad m\in\mathbf{N}, \quad \text{wegen} \quad F_{m+1} = F\circ F_m.$$

Somit gilt für auch für alle ganzen m, m' $F_{m+m'}=F_m\circ F_{m'}$, wie leicht zu verifizieren ist. Wir vergleichen nun den Koeffizienten eines Monoms x^ν in $F_j(t+t',x)$ mit dem in $F_j(t, F(t',x))$. Es sei $t_{k-1}+1\leqq j\leqq t_k$. Dann ist der Koeffizient von x^ν in $F_j(t+t',x)$ $\mathfrak{p}_{\nu,j}(t+t')=\exp(t+t')\ln\varrho_k\mathfrak{q}_{\nu,j}(t+t')$, wobei das Polynom $\mathfrak{q}_{\nu,j}$ identisch verschwindet, falls x^ν kein glattes Zusatzmonom zu ϱ_k bezüglich Λ ist. Andererseits erhalten wir

$$[F_j(t, F(t',x)]_\nu = \Big[\sum_{|\mu|\geqq 1} \mathfrak{p}_{\mu j}(t)F_1(t',x)^{\mu_1}\dots F_n(t',x)^{\mu_n}\Big]_\nu.$$

Nach Konstruktion ist $\mathfrak{p}_{\mu,j}(t)\neq 0$ höchstens dann, falls x^μ glattes Zusatzmonom zu ϱ_i ist, und es gilt $\mathfrak{p}_{\mu,j}(t)=e^{\ln\varrho_i t}\mathfrak{q}_{\mu,j}(t)$, mit Polynomen $\mathfrak{q}_{\mu,j}(t)$. Aus $F_l(t'x)$ läßt sich, falls $t_{k-1}+1\leqq l\leqq t_k$, $e^{t'\ln\varrho_k}$ herausheben, und der restliche Faktor hat Koeffizienten, die Polynome in t' sind. Somit läßt sich aus

$$\Big\{\sum \mathfrak{p}_{\mu j}(t)F_1(t',x)^{\mu_1}\dots F_n(t',x)^{\mu_n}\Big\}_{|\nu|+1}$$

an Exponentialfunktionen

$$\exp(t\ln\varrho_i)\cdot\exp t'(\mu\ln\varrho_1+\dots+\mu_n\ln\varrho_n) = \exp(t+t')\ln\varrho_i$$

herausheben, da ja $\ln \varrho_i = \Sigma \mu_j \ln \varrho_j$ nach Definition des glatten Zusatzmonoms. Der verbleibende Faktor hat Polynome in t, t' als Koeffizienten.

Somit folgt $[F_j(t, F(t', x))]_\nu = \exp(t+t') \ln \varrho_i \cdot \mathfrak{r}_{\nu,j}(t, t')$, mit einem Polynom $\mathfrak{r}_{\nu,j}$ in t und t'. Für beliebige ganzen Zahlen t, t' gilt, wegen $F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'}$: $\mathfrak{q}_{\nu,j}(t+t') - \mathfrak{r}_{\nu,j}(t, t') = 0$, woraus wir nach Hilfssatz 2 schließen können, daß $\mathfrak{q}_{\nu,j}(t, t') = \mathfrak{q}_{\nu,j}(t, t')$ identisch in t, t'. Also gilt

$$F_{t+t'} = F_t \circ F_{t'} \quad \text{für alle} \quad t, t' \in \mathbf{C}, \tag{3}$$

und damit ist bewiesen, daß die Bedingung von Satz 1 hinreichend ist.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, verwenden wir Hilfssatz 5. Es sei $\{F_t / t \in \mathbf{C}\}$ eine analytische Iteration von F, die zu $\Lambda = (\ln \varrho_1, \ldots, \ln \varrho_n)$ gehört, und t_0 werde wie das t_0 in Hilfssatz 5 gewählt. Dann sind die in einer Normalform N_{t_0} (vgl. [4]) von F_{t_0} höchstens auftretenden Zusatzmonome (bezüglich des Relationensystems für $\exp t_0 \ln \varrho_1, \ldots, \exp t_0 \ln \varrho_n$) zugleich glatte Zusatzmonome bezüglich Λ und umgekehrt.

Es sei $T^{-1} \circ F_{t_0} \circ T = N_{t_0}$, $T^{-1} \circ F \circ T = N$. Dann folgt aus $F \circ F_{t_0} = F_{1+t_0} = F_{t_0} \circ F$ auch $N \circ N_{t_0} = N_{t_0} \circ N$. Somit ergibt Hilfssatz 6 der vorliegenden Arbeit, daß im nichtlinearen Teil des zu F konjugierten N nur glatte Zusatzmonome bezüglich Λ auftreten, und zwar in N_k nur Zusatzmonome zu ϱ_k. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 3. Fraktionelle Iteration und Differenzenrechnung

Wir wenden nun die in § 2 ausgeführte Beweismethode auf den Satz 2 an, der ein Kriterium für die Existenz einer m-ten Wurzel eines Automorphismus F mit einer vorgegebenen Bestimmung der Eigenwerte $(\varrho_1^{1/m}, \ldots, \varrho_n^{1/m})$ gibt. Wir setzen der Kürze halber $\varrho_i^{1/m} = \sigma_i$. Zum Beweis des Satzes 2 nehmen wir zunächst an, F sei schon in der Normalform

$$F(x) = Jx + \sum_{|\nu| \geq 2} \mathfrak{p}_\nu x^\nu, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{p}_{\nu,j} = 0,$$

falls x^ν kein Zusatzmonom zu $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Wir konstruieren für alle $u \in \mathbf{Z}$ Automorphismen

$$F\left(\frac{u}{m}\right): x \mapsto A\left(\frac{u}{m}\right) x + \sum_{|\nu| \geq 2} \mathfrak{p}_\nu \left(\frac{u}{m}\right) x^\nu,$$

die folgende Bedingungen erfüllen:

$$F\left(\frac{u}{m} + 1\right) = F \circ F\left(\frac{u}{m}\right) \quad \text{für alle} \quad u \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

$$A\left(\frac{u}{m}\right) = A\left(\frac{1}{m}\right)^u, \quad \text{wobei} \quad A\left(\frac{1}{m}\right) \tag{2}$$

eine m-te Wurzel der Matrix J mit den Eigenwerten $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ist. (vgl. Gantmacher [7]. Wir nehmen ferner o.B.d.A. an, es sei $A\left(\frac{u}{m}\right)$ für alle u, ebenso wie J, eine untere Dreiecksmatrix.

(3) Es ist $\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right)=0$, für alle $u\in\mathbf{Z}$, falls x^ν nicht Zusatzmonom zu σ_i bezüglich des Relationensystems für $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ist $(t_{i-1}+1\leqq j\leqq t_i)$. Man zeigt wie in § 2, daß es Lösungen $\mathfrak{p}_\nu\left(\frac{u}{m}\right)$ der aus (1) bis (3) abgeleiteten Differenzengleichungen gibt mit folgender Bauart:

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right) = \sigma_j \mathfrak{q}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right), \quad |\nu|\geqq 1 \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{q}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right)$$

ein Polynom in u ist und $\mathfrak{q}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right)=0$, falls x^ν nicht ein Zusatzmonom zu σ_j ist. Wir zeigen nun weiter:

$$F\left(\frac{km}{m}\right) = F^k, \quad \text{für alle} \quad k\in\mathbf{Z}.$$

Denn für $u=0$ ergibt sich aus $F\left(\frac{u}{m}+1\right)=F\circ F\left(\frac{u}{m}\right)$: $F(1)=F$, und dann durch vollständige Induktion die Behauptung. Sodann beweisen wir:

$$F\left(\frac{u}{m}+\frac{u'}{m}\right) = F\left(\frac{u}{m}\right)\circ F\left(\frac{u'}{m}\right) \quad \text{für alle} \quad u, u'\in\mathbf{Z}.$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u+u'}{m}\right)$ auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung haben die Gestalt

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u+u'}{m}\right) = \sigma_j^{u+u'}\mathfrak{q}_{\nu,j}\left(\frac{u+u'}{m}\right)$$

mit dem Polynom $\mathfrak{q}_{\nu,j}$. Außerdem setzen wir

$$F\left(\frac{u}{m}\right)\circ F\left(\frac{u'}{m}\right)(x) = \sum_{|\nu|\geqq 1}\mathfrak{s}_\nu\left(\frac{u}{m}, \frac{u'}{m}\right)x^\nu,$$

sodaß nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{s}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}, \frac{u'}{m}\right)=0$ falls x^ν nicht Zusatzmonom zu σ_j ist. Andernfalls berechnen wir wie in § 2 genauer

$$\mathfrak{s}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}, \frac{u'}{m}\right) = \sum_{1\leqq|\mu|\leqq|\nu|}\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}\right)\left[F_1\left(\frac{u'}{m}, x\right)^{\mu_1}\dots F\left(\frac{u'}{m}, x\right)^{\mu_n}\right]_\nu,$$

wobei nur über solche μ zu summieren ist, für die x^μ ein Zusatzmonom zu σ_j ist. Aus den Faktoren $\mathfrak{p}_{\mu,j}\left(\frac{u}{m}\right)$ können wir σ_j^u herausheben, aus jedem $F_l\left(\frac{u'}{m}, x\right)$, $t_{k\pm 1}$ $1\leqq 1\leqq t_k$, den Faktor $\sigma_k^{u'}$, also aus dem ganzen Potenzprodukt $(\sigma_1^{\mu_1}\dots\sigma_n^{\mu_n})^{u'}=$ $=\sigma_j^{u'}$. Somit ergibt sich insgesamt $\mathfrak{s}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}, \frac{u'}{m}\right)=\sigma_j^{u+u'}\ \mathfrak{r}_{\nu,j}(u, u')$, für alle

$u, u' \in \mathbf{Z}$, wobei $\mathfrak{r}_{\nu,j}(u, u')$ ein Polynom in u und u' ist. Für alle Zahlen $u=ml$, $u=ml'$ haben wir schon bewiesen, daß

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}(l+l') = \mathfrak{s}_{\nu,j}(l, l'), \quad \text{somit} \quad \mathfrak{q}_{\nu,j}(l, l') = \mathfrak{r}_{\nu,j}(l, l')$$

für alle $l, l' \in \mathbf{Z}$ Nach Hilfssatz 1 sind daher die Polynome $\mathfrak{q}_{\nu,j}$ und $\mathfrak{r}_{\nu,j}$ identisch gleich, also gilt auch

$$\mathfrak{p}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}+\frac{u'}{m}\right) = \mathfrak{s}_{\nu,j}\left(\frac{u}{m}, \frac{u'}{m}\right), \quad \text{d. h.} \quad F\left(\frac{u}{m}+\frac{u'}{m}\right) = F\left(\frac{u}{m}\right) \circ F\left(\frac{u'}{m}\right).$$

Es folgt speziell

$$F = F(1) = \left(F\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m,$$

und somit ist die eine Richtung des Kriteriums gezeigt. Umgekehrt sei G eine m-te Wurzel von F mit den Eigenwerten $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Ist H eine Normalform von G, so gilt, falls $H=T^{-1}\circ G\circ T$, $K=T^{-1}\circ F\circ T$ wegen $G\circ F=F\circ G$ auch $H\circ K= =K\circ H$, somit hat wegen des Hilfssatzes 6 die Normalform K von F die im Satz 2 angegebene Struktur. Damit ist alles bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Reich und J. Schwaiger, Über einen Satz von Shl. Sternberg in der Theorie der analytischen Iterationen. *Monatsh. Math.* **83** (1977), 207—221.

[2] D. C. Lewis, On formal power series transformations. *Duke Math. J.* **5** (1939), 794—805.

[3] Shl. Sternberg, Infinite Lie groups and formal aspects of dynamical systems. *Journ. Math. Mech.* **10** (1961), 451—474.

[4] L. Reich, Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. *Math. Ann.* **179** (1969), 227—250.

[5] J. Schwaiger und L. Reich, Über die Lösungen der Funktionalgleichung $F\circ T=T\circ G$ für formale Potenzreihen. *Aequationes Math.* **19** (1979), 66—78.

[6] L. Reich, Über analytische Iteration linearer und kontrahierender biholomorpher Abbildungen. *Ber. Gesellschaft Math. u. Datenverarb.* Bonn (1971), *Bd* **42**.

[7] F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung. Bd. 2, 2. Aufl. *Berlin* (1966)

II. MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT GRAZ
A—8010 GRAZ STEYRERGASSE 17/IV.
ÖSTERREICH

(Eingegangen am 22. Januar 1977.)