Über Zusammenhänge vom Finsler-Typ

Von Z. I. SZABÓ (Szeged)

Einleitung

Eine globale Begründung der Finslerschen linearen Zusammenhänge ist in M. MATSUMOTO [5] zu finden. In seiner Arbeit hat M. MATSUMOTO den „Ehresmannschen Weg" der Begründung gewählt.

Im ersten Teil dieser Arbeit geben wir eine Begründung der Finslerschen linearen Zusammenhänge im Sinne von KOSZUL, die einen gewissen Vorteil zu haben scheint. Auf diese Möglichkeit hat schon P. DOMBROWSKI in Mathematical Reviews [2] hingewiesen.

In dieser Formulierung ist eine Finsler-Triade eine Folge $\{G, \nabla^{\Gamma}, \nabla^{C}\}$, die aus einem nichtlinearen Zusammenhang G und aus gewissen kovarianten Ableitungen ∇^{Γ} und ∇^{C} besteht. Nach der Herleitung der Torsions- und Krümmungstensoren und einigen weiteren, meistens bekannten Resultaten definiert man den Lift dieser Triade und erhält man dadurch gewissen linearen Zusammenhänge des Tangentenbündels.

Diese werden Zusammenhänge vom Finsler-Typ genannt.

In dieser Arbeit geben wir notwendige und hinreichende Bedingungen, damit ein linearer Zusammenhang des Tangentenbündels ein Zusammenhang vom Finsler-Typ ist.

Mein aufrichtiger Dank gilt Herrn Prof. G. Soós für seine Hilfe.

1.1 *Finslersche Tensorfelder. Zerlegungen und Lifte*

Ist M eine n-dimensionale C^{∞}-Mannigfaltigkeit, so bezeichnet man mit $T^r_s(M)$ das Tensorbündel des Types (r, s) auf M. $T(M)$ steht für das Tangentenbündel, fernel ist die Abbildung $\pi\colon T^r_s(M) \to M$ die Projektion. Die Faser im Punkte $x \in M$ des Bündels $T^r_s(M)$ wird mit $T_x{}^r_s(M)$ bezeichnet.

Im folgenden bezeichnet man mit V die Untermannigfaltigkeit der Nichtnullvektoren des Bündels $T(M)$. Differenzierbarkeit steht also immer synonym für C^{∞}. Die Symbole $\mathfrak{A}^0_0(M)$ bzw. $\mathfrak{A}^r_s(M)$ bezeichnen den Modul der C^{∞}-Skalarfelder, bzw. den $\mathfrak{A}^0_0(M)$-Modul der C^{∞}-Tensorfelder des Types (r, s) auf M, ferner $\mathfrak{A}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}^1_0(M)$; $\mathfrak{A}^*(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}^0_1(M)$.

Definition. Ein Finslersches (r, s)-Tensorfeld X ist eine C^{∞}-Abbildung $X\colon V \to T^r_s(M)$; $p \to X(p)$, mit $X(p)$ in $T_{\pi(p)}{}^r_s(M)$.

Diese (r, s)-Tensorfelder bilden einen $\mathfrak{A}_0^0(V)$-Modul, den wir mit $\mathfrak{A}_{Fs}^r(M)$ bezeichnen. Ferner ist $\mathfrak{A}_F(M) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{A}_{F0}^1(M)$ der Modul der Finslerschen Vektorfelder, und $\mathfrak{A}_F^* \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{A}_{F1}^0(M)$ ist der duale Modul.

Es ist klar, daß man $\mathfrak{A}_{Fs}^r(M)$ mit dem $\mathfrak{A}_0^0(V)$-Modul der $\mathfrak{A}_0^0(V)$-multilinearen Abbildungen:

$$\underbrace{\mathfrak{A}_F^*(M)x \ldots x\mathfrak{A}_F^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{A}_F(M)x \ldots x\mathfrak{A}_F(M)}_{s} \to \mathfrak{A}_0^0(V)$$

identifizieren kann.

Definition. Ein nichtlinearer Zusammenhang G auf M ist ein C^∞-Feld von n-dimensionalen Unterräumen auf V:

$$G\colon (p \in V) \to G(p) \subset T_p(V)$$

derart, daß der Raum $T_p(V)$ eine direkte Summe der Unterräume $G(p)$ uns $T_p^v(V)$ sei: $T_p(V) = G(p) \oplus T_p^V(V)$. Der Raum $T_p^v(V)$ ist der n-dimensionale vertikale Unterraum von $T_p(V)$.

Wir nennen $G(p)$ den horizontalen Unterraum von $T_p(V)$. Jeder Vektor $X \in T_p(V)$ läßt sich eindeutigerweise in eine Horizontal-Komponente $HX \in (G(p)$ und eine Vertikalkomponente $VX \in T_p^v(V)$ zerlegen: $X = HX + VX$.

Mittels eines nichtlinearen Zusammenhangs G liften wir die Finslerschen Tensorfelder in den Modul der gewöhnlichen Tensorfelder von V. Ist $X \in \mathfrak{A}_F(M)$ ein Finslersches Vektorfeld, so definieren wir das horizontale Vektorfeld hX bzw. das vertikale Vektorfeld vX durch

$$hX(p) \in G(p); \quad \pi_*(hX(p)) = X(p);$$

$$vX(p) \in T_p^v(V); \quad l_p^{-1}(vX(p)) = X(p),$$

wobei l_p die Abbildung ist, welche jedem $v \in T_{\pi(p)}(M)$ den Tangentenvektor der Kurve $p + tv$ im Punkte p zuordnet.

Jetzt definieren wir die Zerlegungen h^{-1} bzw. v^{-1}. Ist $X \in \mathfrak{A}(V)$, so ist

$$h^{-1}X \overset{\text{def}}{=} \pi_*(HX); \quad v^{-1}X(p) \overset{\text{def}}{=} l_p^{-1}(VX(p)); \quad p \in V.$$

Das Vektorfeld hX ist der horizontale Lift und vX der vertikale Lift eines Finslerschen Vektorfeldes $X \in \mathfrak{A}_F$.

Durch eine elementare Rechnung bekommt man, daß die Abbildungen h^{-1} und v von der Wahl des nichtlinearen Zusammenhangs G unabhängig sind. Für nichtlineare Zusammenhänge $\overset{1}{G}$ bzw. $\overset{2}{G}$ ist die Abbildung

$$\overset{12}{G} \overset{\text{def}}{=} v_2^{-1}h\colon \mathfrak{A}_F \to \mathfrak{A}_F$$

ein Finslersches (1, 1) Tensorfeld. Diesen Tensor nennt man den Durchgangstensor zwischen $\overset{1}{G}$ und $\overset{2}{G}$. Für $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ gelten die Folgenden:

$$\overset{11}{G} = 0; \quad \overset{12}{G} = -\overset{21}{G}; \quad \overset{13}{G} = \overset{12}{G} + \overset{23}{G},$$

$$h_2 = h_1 - v\overset{12}{G},$$

$$v_2^{-1} = v_1^{-2} + \overset{12}{G} \circ h^{-1},$$

$$h^{-1}h_1 = h^{-1}h_2 = v_1^{-1}v = v_2^{-1}v = \mathrm{id},$$

$$h^{-1}v = 0,$$

$$h_1 h^{-1} + v_1 v^{-1} = \mathrm{id}.$$

Die Erweiterungen der Abbildungen h, v, h^{-1}, v^{-1} definieren wir folgendermaßen. Für $\omega \in \mathfrak{A}_F^*$ bzw. $\Omega \in \mathfrak{A}^*(V)$ definiert man die Tensorfelder $h\omega, v\omega \in \mathfrak{A}^*(V)$ bzw. $h^{-1}\Omega, v^{-1}\Omega \in \mathfrak{A}_F^*$ durch:

$$h\omega(X) = \omega(h^{-1}X); \quad v\omega(X) = (v^{-1}X); \quad X \in \mathfrak{A}(V);$$

$$h^{-1}\Omega(Y) = \Omega(hY); \quad v^{-1}\Omega(Y) = \Omega(vY); \quad Y \in \mathfrak{A}_F.$$

Im allgemeinen sind die Definitionen für $\omega \in \mathfrak{A}_{Fs}^r$; $\Omega^i \in \mathfrak{A}_F^*$; $Y_i \in \mathfrak{A}_F$; $\Omega \in \mathfrak{A}_s^r(V)$; $\omega^i \in \mathfrak{A}^*(V)$; $X_i \in \mathfrak{A}(V)$:

$$\{(\sigma_1; \ldots; \sigma_{r+s})\omega\}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\sigma_1^{-1}\omega^1, \ldots, \sigma_{r+s}^{-1}X_s)$$

$$\{(\sigma_1; \ldots; \sigma_{r+s})^{-1}\Omega\}(\Omega^1, \ldots, \Omega^r, Y_1; \ldots; Y_s) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(\sigma_1\Omega^1, \ldots, \sigma_{r+s}Y_s).$$

Oben ist das System $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+s})$ ein Folge der Symbole h und v. So hat das Finslersche Tensorfeld ω 2^{r+s} verschiedene Lifte auf V, und das gewöhnliche Tensorfeld Ω hat ebensoviele Zerlegungen in Finslersche Tensorfelder.

Wir zerlegen auch die Liesche Klammer [,] bezüglich eines nichtlinearen Zusammenhangs G. Sind $X, Y \in \mathfrak{A}_F$, so ist

$$[X, Y]^G \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}[hX, hY];$$

$$R(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} v^{-1}[hX, hY];$$

$$\nabla_X^G Y \stackrel{\text{def}}{=} v^{-1}[hX, vY];$$

$$\nabla_X^V Y \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}[vX, hY];$$

$$[X, Y]^V \stackrel{\text{def}}{=} v^{-1}[vX, vY].$$

Wir erhalten ohne Schwierigkeit die folgenden Tatsachen:

1) Die Klammern $[\ ,\ ]^G$; $[\ ,\ ]^V$ sind schiefsymmetrische, **R**-bilineare Abbildungen, und die Abbildung R ist ein schiefsymmetrisches Finslersches (1, 2)-Tensorfeld, der sogenannte Grundtensor der affinen Krümmung. Die Jacobi-Identität $\sigma[X, [Y, Z]^V]^V = 0$ (hier bezeichnet σ die zyklische Summe) gilt bezüglich $[\ ,\ ]^V$, dagegen gilt die Identität $\sigma[X, [Y, Z]^G]^G = 0$ genau dann, wenn $R = 0$.

2) Für die Abbildungen ∇^G, ∇^V gelten ähnliche Eigenschaften, als wie für eine kovariante Ableitung. Beide sind in den beiden Argumenten additiv; im unteren Argument sind sie $\mathfrak{A}_0^0(V)$-linear, ferner gilt für $f\in\mathfrak{A}_0^0(V)$:

$$\nabla_X^G fY = hX(f)Y+f\nabla_X^G Y, \quad \nabla_X^V fY = vX(f)Y+f\nabla_X^V Y.$$

Die Derivation ∇^G ist genau die Berwaldsche kovariante Ableitung bezüglich G.

1.2 *Finsler-Triade*

Definition. Eine Finsler-Triade ist eine Folge $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$, wobei G ein nichtlinearer Zusammenhang ist, und die Abbildungen:

$$\nabla^\Gamma, \nabla^C\colon \mathfrak{A}_F(M)\times\mathfrak{A}_F(M) \to \mathfrak{A}_F(M)$$

die folgenden Eigenschaften haben:

$$\nabla_X^\Gamma(Y+Z) = \nabla_X^\Gamma Y+\nabla_X^\Gamma Z; \quad \nabla_X^C Y+Z = \nabla_X^C Y+\nabla_X^C Z$$

$$\nabla_{X+Y}^\Gamma Z = \nabla_X^\Gamma Z+\nabla_Y^\Gamma Z; \quad \nabla_{X+Y}^C Z = \nabla_X^C Z+\nabla_Y^C Z$$

$$\nabla_{fX}^\Gamma Y = f\nabla_X^\Gamma Y; \quad \nabla_{fX}^C Y = f\nabla_X^C Y$$

$$\nabla_X^\Gamma fY = hX(f)Y+f\nabla_X^\Gamma Y; \quad \nabla_X^C fY = vX(f)Y+f\nabla_X^C Y,$$

$X, Y, Z\in\mathfrak{A}_F(M)$, $f\in\mathfrak{A}_0^0(V)$.

Die Triade $\{G, \nabla^G, \nabla^V\}$ heißt die Berwald-Triade bezüglich des nichtlinearen Zusammenhangs G.

Wir erweitern jetzt die Derivationen ∇^Γ bzw. ∇^C.

$$(\nabla_X^\Gamma \omega)(Y) \overset{\text{def}}{=} hX(\omega(Y))-\omega(\nabla_X^\Gamma Y),$$

$$(\nabla_X^\Gamma \Omega)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \overset{\text{def}}{=} hX(\Omega(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s))-$$

$$-\sum_i \Omega(\omega^1, \dots, \nabla_X^\Gamma \omega^i, \dots, X_1, \dots, X_s)-\sum_i \Omega(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \nabla_X^\Gamma X_i, \dots, X_s),$$

$$(\nabla^\Gamma \Omega)(\omega^1, \dots, \omega^r, X, X_1, \dots, X_s) \overset{\text{def}}{=} (\nabla_X^\Gamma \Omega)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, X_2, \dots, X_s),$$

$$X, Y, X_i\in\mathfrak{A}_F(M); \quad \omega, \omega^i\in\mathfrak{A}_F; \quad \Omega\in\mathfrak{A}_{Fs}^r.$$

Bei der Erweiterung der Derivation ∇^C bekommen wir ganz ähnliche Formeln, nur schreibt man die Symbole ∇^C bzw. vX statt der Symbole ∇^Γ bzw. hX. Wir leiten auch die Cartanschen Torsions- bzw. Krümmungstensoren einer Triade $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ ab. Liften wir zunächst diese Triade in die linearen Zusammenhänge der Mannigfaltigkeit V. Den linearen Zusammenhang $\nabla=\operatorname{Lift}\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ auf V definieren wir durch

$$\nabla_X Y = h\nabla_{h^{-1}X}^\Gamma h^{-1}Y+v\nabla_{h^{-1}X}^\Gamma v^{-1}Y+h\nabla_{v^{-1}X}^C h^{-1}Y+v\nabla_{v^{-1}X}^C v^{-1}Y,$$

$X, Y\in\mathfrak{A}(V)$. Bezeichnet man mit R^∇ bzw. T^∇ den Krümmungs- bzw. Torsionstensor des Zusammenhangs ∇, so erhalten wir mit Hilfe der verschiedenen Zerlegungen die Cartanschen Torsions- bzw. Krümmungstensoren:

$$T(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} -h^{-1}T^{\nabla}(hX, hY) = -\{\nabla_X^\Gamma Y - \nabla_Y^\Gamma X - [X, Y]^G\},$$

$$R(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} -v^{-1}T^{\nabla}(hX, hY) = v^{-1}[hX, hY],$$

$$C(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} -h^{-1}T^{\nabla}(hX, vY) = \nabla_Y^C X - \nabla_Y^V X,$$

$$P(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} -v^{-1}T^{\nabla}(hX, vY) = \nabla_X^G Y - \nabla_X^\Gamma Y,$$

$$S(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} -v^{-1}T^{\nabla}(vX, vY) = -\{\nabla_X^C Y - \nabla_X^C X - [X, Y]^V\},$$

$$\tilde{R}(X, Y)Z \stackrel{\text{def}}{=} -h^{-1}R^{\nabla}(hX, hY)hZ = -v^{-1}R^{\nabla}(hX, hY)vZ =$$

$$= -\{\nabla_X^\Gamma \nabla_Y^\Gamma Z - \nabla_Y^\Gamma \nabla_X^\Gamma Z - \nabla_{[X, Y]^G}^\Gamma Z - \nabla_{R(X, Y)}^C Z\},$$

$$\tilde{P}(X, Y)Z \stackrel{\text{def}}{=} -h^{-1}R^{\nabla}(hX, vY)hZ = -v^{-1}R^{\nabla}(hX, vY)vZ =$$

$$= -\{\nabla_X^\Gamma \nabla_Y^C Z - \nabla_Y^C \nabla_X^\Gamma Z - \nabla_{\nabla_X^G Y}^C Z + \nabla_{\nabla_Y^V X}^\Gamma Z\},$$

$$\tilde{S}(X, Y)Z \stackrel{\text{def}}{=} -h^{-1}R^{\nabla}(vX, vY)hZ = -v^{-1}R^{\nabla}(vX, vY)vZ =$$

$$= -\{\nabla_X^C \nabla_Y^C Z - \nabla_Y^C \nabla_X^C Z - \nabla_{[X, Y]^V}^C Z\}.$$

Durch Zerlegung der Bianchi- und Ricci-Gleichungen (bezüglich der Tensoren R^{∇} und T^{∇}) erhalten wir die Finslerschen Bianchi- und Ricci-Gleichungen. Wir geben hier nur die Ricci-Gleichungen an:

$$\nabla^\Gamma \nabla^\Gamma \omega(\omega^1, \ldots, \omega^r, X, Y, X_1, \ldots, X_s) - \nabla^\Gamma \nabla^\Gamma \omega(\omega^1, \ldots, \omega^r, Y, X, X_1, \ldots, X_s) =$$

$$= \{-\varphi_{\tilde{R}(X, Y)}\omega + \nabla_{T(X, Y)}^\Gamma \omega + \nabla_{R(X, Y)}^C \omega\}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s),$$

$$\nabla^\Gamma \nabla^C \omega(\omega^1, \ldots, \omega^r, X, Y, X_1, \ldots, X_s) - \nabla^C \nabla^\Gamma(\omega^1, \ldots, \omega^r, Y, X, X_1, \ldots, X_s) =$$

$$= \{-\varphi_{\tilde{P}(X, Y)}\omega + \nabla_{C(X, Y)}^\Gamma \omega + \nabla_{P(X, Y)}^C \omega\}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s),$$

$$\nabla^C \nabla^C(\omega^1, \ldots, \omega^r, X, Y, X_1, \ldots, X_s) - \nabla^C \nabla^C(\omega^1, \ldots, \omega^r, Y, X, X_1, \ldots, X_s) =$$

$$= \{-\varphi_{\tilde{S}(X, Y)}\omega + \nabla_{S(X, Y)}^C \omega\}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s),$$

wobei $X, Y, X_i \in \mathfrak{A}_F(M)$; $\omega^i \in \mathfrak{A}_F^*(M)$; $\omega \in \mathfrak{A}_{F_s^r}(M)$, und für einen Tensorfeld $Q \in \mathfrak{A}_{F3}^1$:

$$\{\varphi_{Q(X, Y)}\omega^i\}(Z) \stackrel{\text{def}}{=} -\omega^i(Q(X, Y, Z)), \quad \omega^i \in \mathfrak{A}_F^*(M), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{A}_F(M),$$

$$\{\varphi_{Q(X, Y)}\Omega\}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) = -\sum_i (\omega^1, \ldots, \varphi_{Q(X, Y)}\omega^i, \ldots, X_1, \ldots, X_s)$$

$$-\sum_i (\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, Q(X, Y, X_i), \ldots, X_s)$$

$$\Omega \in \mathfrak{A}_{F_s^r}(M); \quad X, Y, X_i \in \mathfrak{A}_F(M); \quad \omega^i \in \mathfrak{A}_F^*(M).$$

Zur Charakterisierung der linearen Zusammenhänge auf V der Form $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ führen wir die folgenden Tensoren bezüglich eines nichtlinearne Zusammenhangs G ein:

$$J \overset{\text{def}}{=} vh^{-1} - hv^{-1}; \quad J^* \overset{\text{def}}{=} vh^{-1} + hv^{-1}.$$

Die Tensoren $J, J^*, hv^{-1}, vh^{-1}, hh^{-1}, vv^{-1}$ sind gewöhnliche $(1, 1)$-Tensorfelder auf V; ferner gelten noch: $J^{*2} = Id$, $J^2 = -Id$; $hv^{-1} = J^* \circ hh^{-1}$; $vh^{-1} = J^* \circ vv^{-1}$ u.s.w. (Hier ist $\mathrm{Id} \in \mathfrak{A}_1^1(V)$.)

Aus der Definition des Zusammenhangs $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ folgt unmittelbar der

Satz 1. *Ist ein ∇ auf V der Form $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$, so gelten die Gleichungen*

$$\nabla J^* = \nabla J = \nabla hh^{-1} = \nabla hv^{-1} = \nabla vh^{-1} = \nabla vv^{-1} = 0.$$

Umgekehrt, ist für einen ∇ und G die obige Gleichungskette erfüllt, so ist ∇ der Form $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$, wobei

$$\nabla_X^\Gamma Y = h^{-1} \nabla_{hX} hY = v^{-1} \nabla_{hX} vY$$

$$\nabla_X^C Y = h^{-1} \nabla_{vX} hY = v^{-1} \nabla_{vX} vY.$$

Definition. Ein linearer Zusammenhang ∇ auf V heißt vom Finsler-Typ bezüglich eines nichtlinearen Zusammenhangs G, falls ∇ der Form $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ ist, oder die obige Gleichungskette für ∇ und G gilt. In diesem Fall nennen wir G den Berwaldschen Zusammenhang des ∇. Ein ∇ heißt vom Finsler-Typ im allgemeinen, falls ∇ vom Finsler-Typ bezüglich eines G ist.

Aus der Gleichungskette folgen wichtige Eigenschaften für die Parallelverschiebung bezüglich eines Zusammenhanges vom Finsler-Typ $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$. In der Parallelverschiebung bezüglich ∇ bleiben die horizontalen Unterräume $G(p)$, und auch die vertikalen Unterräume $T_p^v(V)$ invariant. Ist X ein paralleles Vektorfeld längs einer differenzierbaren Kurve $c: (\alpha, \beta) \to V$, so sind die Vektorfelder HX, VX, $J(X)$, $J^*(X)$ auch parallele Vektorfelder längs c. Mit Hilfe dieser Behauptungen führen wir eine Parallelverschiebung bezüglich einer Triade $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ ein.

Betrachten wir jetzt eine differenzierbare Kurve $c: (\alpha, \beta) \to V$, und eine Abbildung $X: (\alpha, \beta) \to T(M)$ mit $X(t) \in T_{\pi(c(t))}(M)$. Definieren wir die Vektorfelder $X^h: (\alpha, \beta) \to T(V)$, $X^v: (\alpha, \beta) \to T(V)$ längs c auf folgende Weise:

$$X^h(t) \in G(c(t)), \quad \text{und} \quad \pi_* X^h(t) = X(t), \quad \text{ferner:}$$

$$X^v(t) \in T_{c(t)}^v(V) \quad \text{und} \quad X^v(t) = l_{c(t)}(X(t)).$$

Definition. Ein differenzierbares Vektorfeld $X: (\alpha, \beta) \to T(M)$, $X(t) \in T_{\pi(c(t))}(M)$ heißt parallel bezüglich der Triade $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ längs der differenzierbaren Kurve $c: (\alpha, \beta) \to V$, falls die Vektorfelder $X^h(t)$, $X^v(t)$ parallele Vektorfelder bezüglich $\nabla = \mathrm{Lift}\,\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ längs c sind.

Wir geben auch die Differenzialgleichungen der Parallelverschiebung an. In einer Bündelkarte (U, x, y) auf V betrachten wir die lokalen Finslerschen Vektorfelder: $\varepsilon_i(x, y)$: $(x, y) \to \frac{\partial}{\partial x^i}(x)$. Die Cartanschen Zusammenhangsobjekte $\Gamma_{ij}^{*k}(x, y)$, $C_{ij}^{*k}(x, y)$ einer Triade $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ definieren wir durch

$$\nabla_{\varepsilon_i}^\Gamma \varepsilon_j = \Gamma_{ij}^{*k} \varepsilon_k; \quad \nabla_{\varepsilon_i}^C \varepsilon_j = C_{ij}^{*k} \varepsilon_k,$$

und die Zusammenhangsobjekte G_i^j des nichtlinearen Zusammenhangs G durch:

$$E_i(x, y) \overset{\text{def}}{=} H \frac{\partial}{\partial x^i}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x, y) - G_i^j(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

So ist das Vektorfeld X: $t \to X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}(\pi(c(t)))$ längs $c(t) = (x(t), y(t))$ genau dann ein paralleles Vektorfeld, wenn die Differenzialgleichungen:

$$\frac{dX^k}{dt} + X^l \left(\frac{dx^i}{dt} \Gamma_{il}^{*k}(x(t), y(t)) + \left(\frac{dy^i}{dt} + \frac{dx^p}{dt} G_p^i(x(t), y(t)) \right) C_{il}^k(x(t), y(t)) \right) = 0,$$

$k = 1, \ldots, n$ gelten.

Bezeichnet man mit $\lambda_{c(t_1)}^{c(t_2)}$: $T_{\pi(c(t_1))}(M) \to T_{\pi(c(t_2))}(M)$ die Parallelverschiebung bezüglich $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ aus dem Punkt $c(t_1)$ in $c(t_2)$, längs c, und mit $\tau_{c(t_1)}^{c(t_2)}$: $T_{c(t_1)}(V) \to T_{c(t_2)}(V)$ die Parallelverschiebung bezüglich $\nabla = \text{Lift}\, \{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ längs c aus $c(t_1)$ in $c(t_2)$, dann gilt

$$\lambda_{c(t_1)}^{c(t_2)} = l_{c(t_2)}^{-1} \tau_{c(t_1)}^{c(t_2)} l_{c(t_1)}.$$

Bezeichnen wir mit $\Phi_F(p)$ die Holonomiegruppe der Parallelverschiebung bezüglich $\{G, \nabla^\Gamma, \nabla^C\}$ im Punkt $p \in V$. $\Phi_F(p)$ ist eine Untergruppe der Isomorphismen $T_{\pi(p)}(M) \to T_{\pi(p)}(M)$. Ist $\Phi(p)$ die Holonomiegruppe bezüglich $\nabla = \text{Lift}\, (G, \nabla^\Gamma, \nabla^C)$ im Punkt p, so ist die Abbildung

$$(\tau \in \Phi(p)) \to (l_p^{-1} \tau l_p \in \Phi_F(p))$$

ein Isomorphismus zwischen den Lieschen Gruppen $\Phi(p)$ und $\Phi_F(p)$. Wir erweitern die obige Parallelverschiebung. Für $\omega \in T_{\pi(c(t_1))}(M)$ ist der Tensor $\lambda_{c(t_1)}^{c(t_2)} \omega \in T_{\pi(c(t_2))}(M)$ folgenderweise definiert:

$$(\lambda_{c(t_1)}^{c(t_2)} \omega)(X) = \omega(\lambda_{c(t_2)}^{c(t_1)} X), \quad X \in T_{\pi(c(t))}(M).$$

Im allgemeinen ist für $\Omega \in T_{\pi(c(\cdot))}{}_s^r(M)$,

$$(\lambda_{c(t_1)}^{c(t_2)} \Omega)(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) \overset{\text{def}}{=} \Omega(\lambda_{c(t_2)}^{c(t_1)} \omega^1, \ldots, \lambda_{c(t_2)}^{c(t_1)} X_s),$$
$$\omega^i \in T^*_{\pi(c(t_2))}(M); \quad X_i \in T_{\pi(c(t_2))}(M).$$

Ein Finslersches Tensorfeld $\Omega \in \mathfrak{A}_{F_s}^r(M)$ heißt ein totalparalleles Tensorfeld, wenn für jede differenzierbare Kurve c: $(\alpha, \beta) \to V$ die Abbildung $\Omega \circ c$: $(\alpha, \beta) \to T_s^r(M)$ ein paralleles Tensorfeld längs c ist. Dies ist der Fall genau dann, wenn $\nabla^\Gamma \Omega = \nabla^C \Omega = 0$ gilt.

Ist M bogenzusammenhängend, so läßt sich ein Tensor $\omega \in T_{\pi(p)}{}_1^1(M)$, $p \in V$, genau dann zu einem totalparallelen Finslerschen Tensorfeld durch Parallelverschiebung (ausgehend von p) erweitern, wenn $\lambda \circ \omega = \omega \circ \lambda$ für jede $\lambda \in \Phi_F(p)$ gilt.

Es folgt, daß die totalparallelen Finslerschen (1, 1)-Tensorfelder bezüglich der Addition und des Matrizenproduktes einen Ring bilden, den wir mit $C_1^1(G, \nabla^\Gamma, \nabla^C)$ bezeichnen. Es gilt auch $1 \leqq \dim C_1^1(G, \nabla^\Gamma, \nabla^C) \leqq n^2$, da für $\mathrm{id} \in \mathfrak{A}_{F1}^{\;1}(M)$ (definiert durch: $(p \in V) \to (\mathrm{id} \in T_{\pi(p)}{}_1^1(M))$) auch $\mathrm{id} \in C_1^1(G, \nabla^\Gamma, \nabla^C)$ gilt.

§ 2. Zusammenhänge vom Finsler-Typ. Das inverse Problem

In diesem Abschnitt werfen wir das inverse Problem auf. Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen, damit ein linearer Zusammenhang ∇ auf V ein Zusammenhang vom Finsler-Typ ist. Wir werden auch sehen, daß unendlich viele Berwaldsche nichtlineare Zusammenhänge bezüglich eines Zusammenhangs vom Finsler-Typ existieren. Sie werden mit Hilfe der Holonomiegruppe bestimmt.

Es seien auf V ein linearer Zusammenhang ∇, und ein nichtlinearer Zusammenhang G gegeben. Zerlegen wir ∇ bezüglich G folgendermaßen. Die Abbildungen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3^{-1})\nabla\colon\ \mathfrak{A}_F \times \mathfrak{A}_F \to \mathfrak{A}_F$ definieren wir durch:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3^{-1})\,\nabla(X, Y) = \sigma_3^{-1}\nabla_{\sigma_1 X}\sigma_2 Y,$$

wobei das System $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Folge der Symbole h und v ist. Ferner bezeichne $\bar{\sigma}$ das Symbol h, wenn $\sigma = v$, und $\bar{\sigma} = v$, wenn $\sigma = h$. Aus den Eigenschaften der kovarianten Ableitungen folgt, dass die Abbildungen der Form

$$(\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_2^{-1})\,\nabla \overset{\mathrm{def}}{=} I_{\sigma_1\sigma_2},$$

Finslersche (1, 2)-Tensorfelder sind und die Folge der Form:

$$\{G;\, (h, \sigma_1, \sigma_1^{-1})\nabla;\ (v, \sigma_2, \sigma_2^{-1})\nabla\}$$

eine Finsler-Triade ist. So läßt sich ein beliebiger Zusammenhang auf V bezüglich eines beliebigen nichtlinearen Zusammenhangs G im allgemeinen im vier Finslersche Tensorfelder und in vier Triaden zerlegen.

Wir definieren noch die Tensoren vom Finsler-Typ:

$$S_\sigma^*(X, Y) \overset{\mathrm{def}}{=} h^{-1}\nabla_{\sigma X} hY - v^{-1}\nabla_{\sigma X} vY$$

wobei $\sigma = h$ oder v, $X, Y \in \mathfrak{A}_F$ ist. Dann sind $I_{\sigma_1\sigma_2}, S_\sigma^* \in \mathfrak{A}_{F2}^{\;1}$.

Wir bemerken, daß bezüglich eines ∇ und G die Gleichungen $I_{\sigma_1\sigma_2} = 0$ genau dann erfüllt sind, wenn die kovariante Abbleitung die horizontalen bzw. die vertikalen Vektorfelder invariant läßt. Dies bedeutet, daß für $X \in \mathfrak{A}(V)$, $Y \in \mathfrak{A}_F$ auch die Vektorfelder

$$\nabla_X hY \quad \text{bzw.} \quad \nabla_X vY$$

horizontale bzw. vertikale Vektorfelder auf V sind. Gelten für ∇ und G die Gleichungen $S_\sigma^* = 0$, so läßt sich ∇ bezüglich G nur in eine einzige Triade zerlegen. Diese ist eine notwendige und hinreichende Bedingung.

Satz 2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein linearer Zusammenhang ∇ auf V bezüglich eines nichtlinearen Zusammenhangs G vom Finsler-Typ* *ist, besteht darin, daß die Gleichungen:*

$$I_{\sigma_1\sigma_2} = 0; \quad S_\sigma^* = 0 \tag{2.1}$$

bezüglich G gelten.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem folgenden:

Satz 3. *Für einen beliebigen linearen Zusammenhang* ∇ *auf* V *und für einen beliebigen nichtlinearen Zusammenhang G gelten die Folgenden:*

$$\nabla J^* = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad S_\sigma^* = 0; \quad I_{\sigma v} = I_{\sigma h}, \tag{3.1}$$

$$\nabla J = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad S_\sigma^* = 0; \quad I_{\sigma v} = -I_{\sigma h}, \tag{3.2}$$

$$\nabla v v^{-1} = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad I_{\sigma_1\sigma_2} = 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla v h^{-1} = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad S_\sigma^* = 0; \quad I_{\sigma v} = 0, \tag{3.4}$$

$$\nabla h v^{-1} = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad S_\sigma^* = 0; \quad I_{\sigma h} = 0. \tag{3.5}$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Behauptung. Ganz ähnlich kann man auch die Übrigen ausrechnen. Die Gleichung $\nabla J^*=0$ gilt genau dann, wenn für jede $X, Y \in \mathfrak{A}_F$ die Gleichungen $\nabla_{\sigma_1 X}\sigma_2 Y=0$, ($\sigma_i=h$ oder v) bestehen.
Betrachten wir die Umformungen:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\sigma X} J^*)(vY) &= \big(\nabla_{\sigma X}(vh^{-1}+hv^{-1})\big)(vY) = \nabla_{\sigma X} hY-(vh^{-1}+hv^{-1})(\nabla_{\sigma X} vY) = \\ &= (hh^{-1}+vv^{-1})(\nabla_{\sigma X} hY)-(vh^{-1}+hv^{-1})(\nabla_{\sigma X} vY) = \\ &= hS_\sigma^*(X, Y)+v\big(I_{\sigma h}(X, Y)-I_{\sigma v}(X, Y)\big).\end{aligned}$$

Ähnlicherweise erhalten wir:

$$(\nabla_{\sigma X} J^*)(hY) = -vS_\sigma^*(X, Y)+h\big(I_{\sigma v}(X, Y)-I_{\sigma h}(X, Y)\big),$$

so gilt die Gleichung $\nabla J^*=0$ genau dann, wenn $S_\sigma^*=0$, $I_{\sigma v}=I_{\sigma h}$. Aus (3, 4) erhalten wir die Behauptung: Ist ∇ auf V vom Finsler-Typ, so gilt die Gleichung $\nabla vh^{-1}=0$ bezüglich jedes nichtlinearen Zusammenhangs G, da der Tensor $vh^{-1}\in\mathfrak{A}_1^1(V)$ von der Wahl des nichtlinearen Zusammenhangs unabhängig ist. Also erhalten wir den

Satz 4. *Ist ein* ∇ *auf* V *vom Finsler Typ, so gelten die Gleichungen* $S_\sigma^*=0$, $I_{\sigma v}=0$ *bezüglich jedes nichtlinearen Zusammenhangs G. Ein Zusammenhang vom Finsler-Typ läßt sich bezüglich jedes nichtlinearen Zusammenhang G nur in eine einzige Triade zerlegen.*

Satz 5. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein linearer Zusammenhang* ∇ *auf* V *vom Finsler-Typ im allgemeinen ist, besteht darin, daß die folgenden Bedingungen bezüglich jedes beliebigen nichtlinearen Zusammenhangs G erfüllt sind:*

1) $S_\sigma^*=0$; $I_{\sigma v}=0$,
2) *Die Differenzialgleichungen:* $\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}\Omega=I_{h_0 h_0}$; $\overset{0}{\nabla}{}^{C}\Omega=I_{vh_0}$ *besitzen*

Lösungen bezüglich $\Omega \in \mathfrak{A}_{F1}^1$, wobei

$$\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} \overset{\text{def}}{=} (h_0 h_0 h^{-1})\nabla = (h_0, v, v_0^{-1})\nabla,$$

$$\overset{0}{\nabla}{}^{C} \overset{\text{def}}{=} (v h_0 h^{-1})\nabla = (v, v, v_0^{-1})\nabla.$$

Ist ∇ vom Finsler-Typ, so ist ein nichtlinearer Zusammenhang $\overset{1}{G}$ genau dann ein Berwaldscher Zusammenhang des ∇, wenn die Gleichungen

$$\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}\overset{01}{G} = I_{h_0 h_0}; \quad \overset{0}{\nabla}{}^{C}\overset{01}{G} = I_{v h_0}$$

für den Durchganstensor $\overset{01}{G}$ gelten.

Beweis. Gelten für ∇ und $\overset{0}{G}$ die Gleichungen: $S_\sigma^* = 0$, $I_{\sigma v} = 0$, so beweisen wir zunächst, dass für einen anderen nichtlinearen Zusammenhang $\overset{1}{G}$:

$$I_{h_1 h_1} = I_{h_0 h_0} - \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}\overset{01}{G} \tag{5.1}$$

$$I_{v h_1} = I_{v h_0} - \overset{0}{\nabla}{}^{C}\overset{01}{G} \tag{5.2}$$

gültig sind. In der Tat:

$$I_{v h_0}(X, Y) = v_0^{-1}\nabla_{vX} h_0 Y = (v_1^{-1} + \overset{01}{G} h^{-1})(\nabla_{vX}(h_1 Y - v\overset{01}{G}(Y))) =$$
$$= I_{v_1 h_1}(X, Y) + \overset{0}{\nabla}{}^{C}\overset{01}{G}(X, Y)$$

$$I_{h_0 h_0}(X, Y) = v_0^{-1}\nabla_{h_0 X} h_0 Y = (v_1^{-1} + \overset{01}{G} h^{-1})(\nabla_{h_1 X - v\overset{01}{G}(X)}(h_1 Y - v\overset{01}{G}(Y))) =$$
$$= I_{h_1 h_1}(X, Y) + \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}\overset{01}{G}(X, Y),$$

da aus $S_\sigma^* = I_{\sigma v} = 0$ die Gleichungen:

$$(v, h_0, h^{-1})\nabla = (v, v, v_0^{-1})\nabla = (v, h_1 h^{-1})\nabla = (v, v, v_1^{-1})\nabla$$

folgen.

Aus (5.1) und (5.2) erhalten wir, daß ∇ bezüglich $\overset{1}{G}$ genau dann vom Finsler-Typ ist, wenn bezüglich $\overset{0}{G}$

$$S_\sigma^* = 0, \quad I_{\sigma v} = 0, \quad \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}\overset{01}{G} = I_{h_0 h_0}, \quad \overset{0}{\nabla}{}^{C}\overset{01}{G} = I_{v h_0}.$$

bestehen. Q. e. d.

Definition. Ein linearer Zusammenhang ∇ auf V heißt vom Finsler-Typ im lokalen Sinne, wenn jeder Punkt $p \in V$ eine Umgebung U, und auf U einen nichtlinearen Zusammenhang G hat, bezüglich dessen ∇ vom Finsler-Typ ist.

Wir führen die Tensoren $Q_0, L_0, M_0 \in \mathfrak{A}^1_{F3}$ ein:

$$Q_0(X, Y, Z) = \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} I_{h_0 h_0}(X, Y, Z) - \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} I_{h_0 h_0}(Y, X, Z) - \\ - I_{h_0 h_0}(T(X, Y), Z) - I_{v h_0}(R(X; Y), Z),$$

$$L_0(X, Y, Z) = \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} I_{v h_0}(X, Y, Z) - \overset{0}{\nabla}{}^{C} I_{h_0 h_0}(Y, X, Z) - \\ - I_{h_0 h_0}(C(X, Y), Z) - I_{v h_0}(P(X, Y), Z),$$

$$M_0(X, Y, Z) = \overset{0}{\nabla}{}^{C} I_{v h_0}(X, Y, Z) - \overset{0}{\nabla}{}^{C} I_{v h_0}(Y, X, Z) - I_{v h_0}(S(X, Y), Z).$$

Auf Grund der Ricci-Gleichungen sind die Integrabilitätsbedingungen der Differenzialgleichungen: $\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} \Omega = I_{h_0 h_0}$, $\overset{0}{\nabla}{}^{C} \Omega = I_{v h_0}$ die Folgenden:

$$F_1 \begin{cases} Q_0(X, Y, Z) = \Omega(\tilde{R}(X, Y), Z) - \tilde{R}(X, Y)\Omega(Z), \\ L_0(X, Y, Z) = \Omega(\tilde{P}(X, Y), Z) - \tilde{P}(X, Y)\Omega(Z), \\ M_0(X, Y, Z) = \Omega(\tilde{S}(X, Y), Z) - \tilde{S}(X, Y)\Omega(Z). \end{cases}$$

usw.

Aus den Gleichungen F_1 erhalten wir die Gleichungen F_2 auf folgende Weise: man wendet die Derivationen $\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}$, $\overset{0}{\nabla}{}^{C}$ auf die Gleichungen F_1 an, und schreibt statt der Symbole $\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} \Omega$ bzw. $\overset{0}{\nabla}{}^{C} \Omega$ die Tensoren $I_{h_0 h_0}$ bzw. $I_{v h_0}$. In ähnlicher Weise bilden wir die Gleichungen F_3 aus F_2, u.s.w.; so enthält das System F_{k+1}, im allgemeinen, 3.2^k Gleichungen. Aus dem Satz von Thomas-Veblen erhalten wir:

Satz 6. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein linearer Zusammenhang ∇ auf V im lokalen Sinne vom Finsler-Typ ist, besteht darin, daß die Gleichungen $S^*_\sigma = 0$, $I_{\sigma v} = 0$ für jede G gelten, ferner für jeden Punkt $p \in V$ eine Umgebung U und eine Zahl N existierten, so daß die Gleichungen $F_1, \ldots, F_N$ auf U ein Lösungssystem haben, das die $(N+1)$-te Gleichungskette identische befriedigt.*

Zerlegen wir jetzt einen linearen Zusammenhang ∇ vom Finsler-Typ bezüglich zwei nichtlinearer Zusammenhänge $\overset{0}{G}$ und $\overset{1}{G}$. Wir erhalten

$$\overset{1}{\nabla}{}^{C}_X Y = v_1^{-1} \nabla_{vX} vY = (v_0^{-1} + \overset{01}{G} h^{-1}) \nabla_{vX} vY = v_0^{-1} \nabla_{vX} vY = \overset{0}{\nabla}{}^{C}_X Y \overset{\mathrm{def}}{=} \nabla^{C}_X Y$$

$$\overset{1}{\nabla}{}^{\Gamma}_X Y = v_1^{-1} \nabla_{h_1 X} vY = (v_0^{-1} + \overset{01}{G} h^{-1}) \nabla_{h_0 X - v\overset{01}{G}(X)} vY = \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}_X Y - \nabla^{C}_{\overset{01}{G}(X)} Y.$$

Es folgt unmittelbar, daß

$$C^1_1(\overset{0}{G}, \overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma}, \nabla^C) \equiv C^1_1(\overset{1}{G}, \overset{1}{\nabla}{}^{\Gamma}, \nabla^C).$$

gilt. Diesen eindeutig bestimmten Ring (siehe 1, 2 §) bezeichnen wir mit $C^1_1(\nabla)$.

Ist $\overset{0}{G}$ ein Berwaldscher nichtlinearer Zusammenhang eines Finsler-zusammenhangs ∇, so ist $\overset{1}{G}$ genau dann ein Berwaldscher Zusammenhang des ∇, wenn $\overset{0}{\nabla}{}^{\Gamma} \overset{01}{G} = 0$; $\overset{0}{\nabla}{}^{C} \overset{01}{G} = 0$ gelten. So bilden die Durchgangstensoren der Berwaldschen Zusammenhänge genau den Ring $C^1_1(\nabla)$. Es sei noch angenommen, daß M zusammenhängend ist.

Man betrachtet die Menge

$$\tilde{C}_1^1(\nabla) = \{\mathrm{id} - vG^* h^{-1} | G^* \in C_1^1(\nabla),\ \mathrm{id} \in \mathfrak{A}_1^1(V)\},$$

mit dem Produkt:

$$(\mathrm{id} - vG^* h^{-1}) \circ (\mathrm{id} - v\Omega h^{-1}) = \mathrm{id} - v(G^* + \Omega) h^{-1},$$

dann ist $\tilde{C}_1^1(\nabla)$ eine kommutative Liesche Gruppe mit

$$1 \leqq \dim \tilde{C}_1^1(\nabla) \leqq n^2,$$

da $\mathrm{Id} \in \tilde{C}_1^1(\nabla)$. Bezeichnet man die Abbildung $(G^* \in C_1^1(\nabla)) \to \mathrm{id} - vG^* h^{-1}$ mit φ, so erhalten wir den:

Satz 7. *Die Durchgangstensoren der Berwaldschen nichtlinearen Zusammenhänge eines Zusammenhangs ∇ vom Finsler-Typ bilden genau den Ring $C_1^1(\nabla)$. Die Abbildung $\exp^{-1} \circ \varphi$ ist ein $\mathbf{R}$-linearer Isomorphismus zwischen $C_1^1(\nabla)$ und der Lieschen Algebra der kommutativen Lieschen Gruppe $\tilde{C}_1^1(\nabla)$, mit*

$$1 \leqq \dim \tilde{C}_1^1(\nabla) \leqq n^2.$$

Literatur

[1] H. Akbar-Zadeh, Les espaces de Finsler et certaines de leurs generalisation. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **80** (1963), 1—79.
[2] P. Dombrowski, MR, **37** # 3469
[3] D. Gromoll — W. Klingenberg — W. Meyer, Riemannsche Geometrie in Großen, *Berlin, Heidelberg, New-York* 1968.
[4] S. Kobayashi—K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, 1963.
[5] M. Matsumoto, The theory of Finsler connections, *Publ. of the Study Groups of Geometry V*, Dept. of Math., *Okayama Univ.* (1970).
[6] M. Matsumoto, A global fundation of Finsler geometry, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.* **33** (1960/61), 171—208.
[7] G. Soós, On the theory of fiber spaces of Finsler type, (Hungarian) *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **13** (1963) 17—64.

(Received March 28, 1977)