Die Konstruktionen in der projektiven Geometrie der Quaternionengeraden II.

Von L. GYARMATHI (Debrecen)[1])

Die projektive Geometrie der Quaternionengerade nennen wir Q-Geometrie und die Quaternionengerade bezeichnen wir mit q.

Im [15] haben wir uns mit den involutorischen Abbildungen der Q-Geometrie beschäftigt, jetzt werden wir uns mit den allgemeinen Projektivitäten der Q-Geometrie beschäftigen.

3. Die Kernpunkte der Involutionen der Ketten bi-involutorischer Lage[2])

Dieser Ketten — wie wir später sehen — werden wir bei der Konstruktion der entsprechenden Elemente der allgemeinen Projektivitäten bedürfen.

Die kanonische Form der harmonischen Verwandschaft H ist (s. [15], 237)

$$z' = -z. \tag{3.1}$$

Die zwei Doppelpunkte sind jetzt 0 und ∞.

Aus der Definition der H ergibt sich, daß dieselbe durch ihre zwei Doppelpunkte eindeutig bestimmt wird.

Weil die entsprechenden Punktpaare der H ihre Doppelpunkte harmonisch trennen, folgt, daß ein entsprechender Punktpaar und die zwei Doppelpunkte auf einer Kette ersten Grades liegen[3]). Es folgt der

Satz 3.1. *Im H ist jeden durch die beiden Doppelpunkte gehende Kette ersten Grades eine Doppelkette.*

Diese Doppelketten bezeichnen wir mit $K^1_{d\mathrm{I}}$.

Aus (3.1) ergibt sich, daß Doppelketten ersten Grades die jenigen Ketten sind, welche durch das entsprechende Punktpaar $(z_1, -z_1)$ sowie durch ein z gehen, für welches $N(z) = N(z_1)$ gilt. Solche Ketten gehen nicht durch die Doppelpunkte. Wir bezeichnen sie mit $K^1_{d\mathrm{II}}$.

Es gilt der

---

[1]) Der erste Teil dieser Arbeit ist im Publ. Math. (Debrecen) **21** (1974), 233—248 erschienen, [15].

[2]) Siehe die ersten zwei Punkten im [15].

[3]) Kette ersten grades ist ([11]) die Menge derjenigen Punkte, denen entnommenes beliebiges Quadrupel ein reelles Doppelverhältnis hat.

Satz 3.2. *H wird durch einen ihrer Doppelpunkte M und durch eine ihrer Ketten K^1_{d11} eindeutig bestimmt. Der zweite Doppelpunkt N ist der symmetrische*[4]) *Punkt zu M in Bezug K^1_{d11}.*

Aus den Eigenschaften der Involutionen folgt, daß die $H(M, N)$[5]) auf einer ihrer K^1_{d11} eine elliptische Involution E_{K^1} bestimmt. Weil die Doppelpunkte der H: M, N symmetrisch in Bezug auf K^1_{d11} sind, deshalb schneiden die entsprechenden Punkte der E_{K^1} jene ihre Ketten ersten Grades aus der K^1_{d11} aus, welche darauf senkrecht sind und durch das Punktpaar (M, N) gehen. Es ist leicht einzusehen, daß umgekehrt, wir zu jeder auf K^1 befindlichen E_{K^1} ein Punktpaar obiger Eigenschaft (M, N) finden können, und jede durch K^1 gehende K^2 zwei solche Punkte hat ([3], 85). Die Punkte dieser Eigenschaft M, N nennen wir — nach Bilo — *Kernpunkte* der E_{K^1} (Fig. 14)[6]). Aus dem gesagten folgt auch, daß auf einer gegebenen K^1 ein darauf nicht liegender nach Belieben aufgenommener Kernpunkt M eine einzige E_{K^1} bestimmt. Untersuchen wir die Frage, wo in Falle einer gegebenen E_{K^1} der geometrische Ort der Kernpunkte ist.

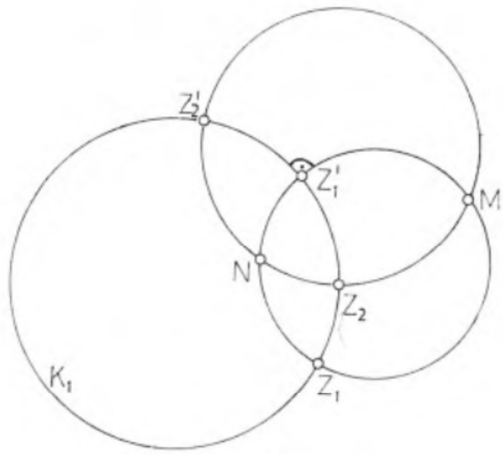

Fig. 14

Definition. In bi-involutorischer Lage in Bezug auf eine Kette ersten Grades K^1 ist die durch den auf K^1 nicht liegenden Punkt M gehende Kette zweiten Grades K^2, wenn die K^2 auf die $\hat{K}^2(K^1M)$ in deren Punkten M N vollständig senkrecht[7]) ist, wo N das Spigelbild von M in Bezug auf K^1 ist; und dann ist auch K^2 in bi-involutorische Lage in Bezug auf K^1.

[4]) Wenn eine Kette ersten Grades auf eine andere Kette ersten Grades senkrecht ist, weiter ihre gemeinsamen Punkte M, N sind und $(MNXY) = -1$ gilt, wo X, Y zwei Punkte der einen beliebigen Kette sind, dann ist (X, Y) zu der anderen Kette symmetrisch.

[5]) M, N sind die Doppelpunkte der H.

[6]) M, N sind auf K^1 symmetrische Punkte und $(Z_1, Z_1')(Z_2, Z_2')$ entsprechenden Punktpaaren von E_{K^1}. Die Ebene von K^1 können wir für K^1 gehenden K^2 betrachten.

[7]) Fig. 12. stellt zwei vollständige senkrechte K^2 dar.

Satz 3.3 *Der geometrische Ort der Kernpunkte einer elliptischen Involution E_{K^1} ist eine in Bezug auf K^1 bi-involutorische* [8]) K^2, ([3], p. 87). der so genannte Kern von E_{K^1}.

4. Projektivität mit einer je nach den Punkten doppelten (fixen) Kette zweites Grades

Satz 4.1 *Wenn eine Projektivität π drei (verschiedene) Doppelpunkte hat, dann hat sie auch eine fixe Kette zweiten Grades.*

Transformieren wir Π in Π_t, so daß deren Doppelpunkte L, M, N, in die Punkte $0, 1, \infty$ geraten. In diesem Falle kann die Gleichung der Π_t nur

$$z' = a^{-1}za \tag{4.1}$$

sein. Nämlich in (4, 1) wegen des Doppelpunktes ∞ gilt $c=0$, wegen des Doppelpunktes 0, ist $b=0$, und wegen des Doppelpunktes 1, $d=a$, weiterhin kann a nicht reell sein.

Nach (4. 1) ist außer den Punkten $0, \infty, 1$, auch der Punkt a Doppelpunkt der Projektivität Π_t. Da a nicht reell ist, sind vier Punkte allgemeiner Lage der Kette $K^2(0, 1, \infty, a)$ doppelt, und so sind nach Satz 1, 5 alle Punkte der K^2 doppelt. — Bezeichnen wir diese Projektivität mit $\Pi_{K_f^2}$

Satz 4.2. *Die Projektivität Π, wenn sie keine Identität ist, kann nicht fünf oder mehr solche Doppelpunkte haben, welche nicht auf einer Kette zweiten Grades liegen.*

Nämlich wenn sie fünf solche Doppelpunkte hätte, die nicht auf einer K^2 liegen, dann bestimmten jene eine je nach den Punkten Doppelte Kette dritten Grades K^3. In diesem Falle ist in jedem Punkt P der q doppelt, denn führen wir durch den Punkt P $(P \notin K^3)$ eine solche Kette ersten Grades, welche die K^3 senkrecht schneidet. Nach dem projektiven Begriff der Orthogonalität sind diese senkrechten Ketten ersten Grades Doppelketten und so ist der Entsprechende des P entweder er selbst, oder aber das auf K^3 bezogene Spiegelbild des P. Letztere aber ist unmöglich, denn dann wäre von Antiinvolution zweiter Art die Rede.

Besichtigen wir näher die $\Pi_{K_f^2}$. Die K_f^2 bringen wir in Grundlage, dann wird (4.1) von der Form

$$z' = \mathfrak{k}^{-1}z\mathfrak{k} \tag{4.2}$$

sein, wo $\mathfrak{k}$ eine gewöhnliche komplexe Zahl ist. Weil z. B. j nach (4.2) auf der durch die Punkte $j, -j, k$ bestimmten Kette ersten Grades liegt, (es ist ähnlich wahr für allen P $(P \notin K_f^2)$ von q) deshalb nimmt ein beliebiges entsprechendes Punktpaar der $\Pi_{K_f^2}$ auf der in Bezug auf die fixe Kette zweiten Grades die bi-invalutorischen Kette Platz. Das (4, 2) können wir noch auch in der Form

$$z = (1+\alpha i)^{-1} z (1+\alpha i) \tag{4.3}$$

schreiben. Demnach gehört zu einer K_f^2 unendlich viel $\Pi_{K_f^2}$ und es gilt

[8]) Diese Benennung kommt daher, daß K_1 der Kern der elliptischen Involution auf K^2 ist.

Satz 4.3. *Die Projektivität $\Pi_{K_d^2}$ wird durch ihre Doppelkette und durch ihr auf eine Bezug auf diese Kette die bi-involutorisch gelegene Kette ersten Grades liegendes Entsprechenden Punktpaar eindeutig bestimmt.*

5. Allgemeine Projektivitäten der Geraden q. Äquivalente Punktreihen

Nach der Transformationsgleichung (1) bzw. (2) kann sowohl die Projektivität, wie die Antiprojektivität als eine Gruppe mit 15—15 Parametern angesehen werden. (Mit einer Koordinate der Koeffizienten a, b, c und d der Transformationsgleichungen können wir dividieren.)

Daraus folgt schon, daß hier der Grundsatz der gewöhnlichen projektiven Geometrie nicht gültig ist, die Transformationsgleichung (1) und (2) wird durch drei entsprechende Punktpaare *nicht eindeutig* bestimmt. Nämlich die Angabe von drei Punktpaaren macht nur die Bestimmung von 12 Parametern möglich.

Aus den Parameterzahlen folgt auch, daß wir nicht vier Punktpaare nach belieben aufnehmen können, denn das würde zu 16 Parameteren führen.

In Verbindung mit der Untersuchung der allgemeinen Projektivität der q wird unsere erste Aufgabe sein das Herstellen solcher Punktreihen, welche mit Π ineinander getragen werden können. Diese Punktreihen werden wir äquivalente Punktreihen nennen.

Zur Bezeichnung der äquivalenten Punktreihen verwenden wir das Zeichen: $\overline{\wedge}$

Definition. Für zwei Punktreihen gilt $ABCDE\ldots\overline{\wedge}A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$, wenn es eine solche Projektivität gibt, welche die Punkte der ersten Punktreihe der Reihe nach in die Punkte der anderen Punktreihe trägt.

Mit äquivalenten Punktreihen hat sich Bilo [4] beschäftigt. Wir werden folgende drei Sätze von Bilo ohne Beweis anführen:

Satz 5.1. *Zwei Punktreihen bestehend aus 4—4 Punkten allgemeiner Lage, sind*

$$ABCD\overline{\wedge}A_1B_1C_1D_1 \tag{5.1}$$

dann und nur dann, wenn die durch die Punkte D bzw. D_1 auf den Ketten $K^1(ABC)$ bzw. $K^1(A_1B_1C_1)$ bestimmten Involutionen $E_{K_D^1}$ bzw. $E_{K_1^1D_1}$ ineinander übergehen durch jene gewöhnliche Projektivität, welche zwischen K^1 und K_1^1 die drei Punktpaare (AA_1), (BB_1) und (CC_1) herstellen.

Auf Grund des Satzes kann die äquivalente Punktreihe (5.1) konstruiert werden. Die entsprechenden Punktpaare (AA_1), (BB_1), (C, C_1) und den Punkt D können wir nach Belieben aufnehmen. Im M_4 stellt der Punkt D auf der $K^1(ABC)$ eine Involution $E_{K_D^1}$ fest. Mit Hilfe der obigen entsprechenden Punktpaare bestimmen wir die projektive Entsprechende der $E_{K_D^1}$, die Involution $E_{K_{D_1}^1}$ auf der $K^1(A_1B_1C_1)$. Zum Punkte D_1 können wir einen beliebigen Punkt der die Kernpunkte der Involution $E_{K_{D_1}^1}$ enthaltenden K^2 wählen. (Figur 15.)

Die Konstruktion des entsprechenden Punktpaares (D, D_1) haben wir in dem Falle ausgeführt, bei welchem $A_1B_1C_1$ im K_1, A und B in K_2 sind, C aber ein Punkt

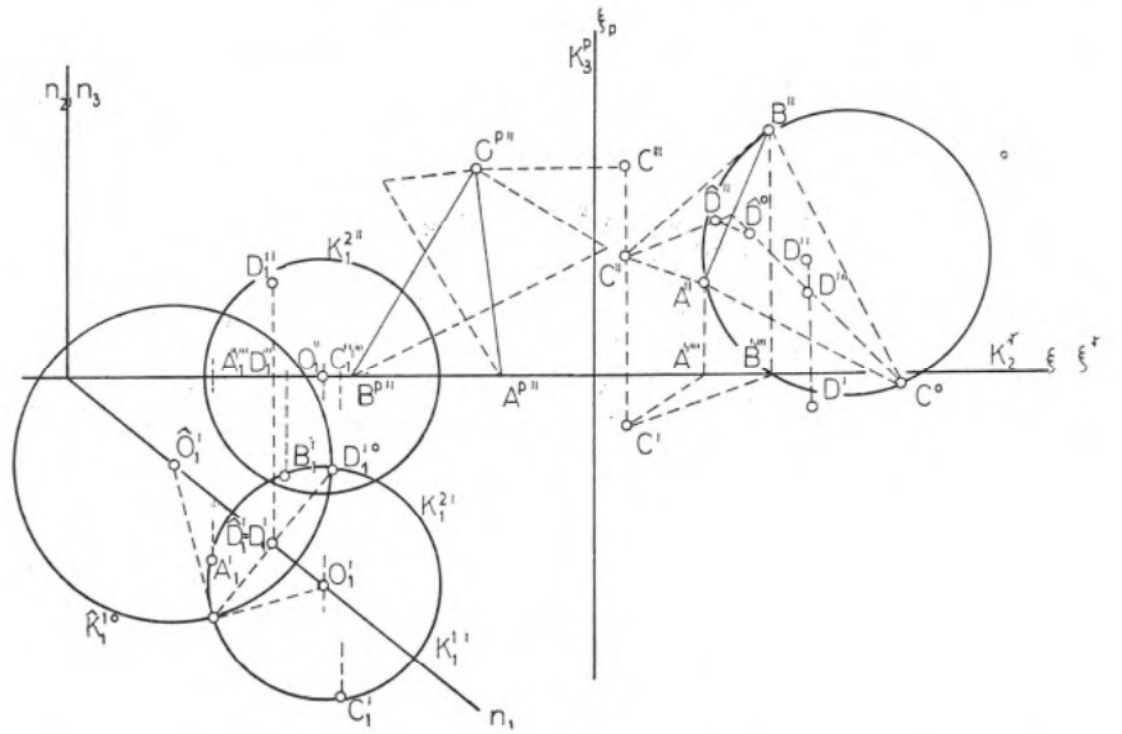

Fig. 15

allgemeiner Lage ist. (Eine solche Aufnahme dieser Punkte weicht nur insofern von der allgemeinsten Lage ab, daß der Punkt B nur in einer Hilfshyperebene (z. B. $\{S_{23}\}$) liegen kann, dort gilt aber das Mongesche Verfahren.) Zuerst bestimmen wir mit Hilfe eines Profilbildes die Länge der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

In deren Kenntnis kann die Umklappung K^{1^0} von K^1 hergestellt werden. Der im Innern der K_1^1 aufgenommene Punkt $\hat{D}_1$ bestimmt die Involution $E_{K^1_{\hat{D}_1}}$.[9] Die $E_{K^1_{\hat{D}_1}}$ tragen wir mit Hilfe der Punktpaare $(A''=A^0, A_1)$, $(B''=B^0, B_1)$, (C^0, C_1) in die auf K^{1^0} befindliche Involution $E_{K^{1^0}_{\hat{D}}}$ über, und deren Mittelpunkt sei der Punkt $\hat{D}^0$. (Die Zurückdrehung $\hat{D}$ des Punktes $\hat{D}^0$ ist Mittelpunkt der Involution $E_{K^1_{\hat{D}}}$.) Z. B.: Zum entsprechenden Punktpaare (D, D_1) können wir so kommen, daß wir durch K^1 bzw. K_1^1 als größte Kugelkreise eine Kugel K^2 bzw. K_1^2 führen. Wir können das Punktpaar (D, D_1) aus zwei-zwei solchen Punkten dieser Kugeln wählen, deren senkrechte Projektion auf die Ebene der K^1 bzw. K_1^1 der $\hat{D}$ bzw. $\hat{D}_1$ ist.

Die Hyperebene der K_1^2 ist die $\{S_{12}\}$ und D_1^0 ist die Umklappung des Punktes D_1 in K_1 um $|0_1 D_1|$. Wir haben zur Hyperebene der K^2 die $\{S_{12}^r\}$ gewählt, wo $\xi^r(K_2^r)$ jene Rotation bedeutet, womit wir die Ebene $[ABC]$ in die $\{S_{12}\}$ getragen haben. Unsere Figur zeigt die obige Konstruktion des D nicht, nur als Endresultat gibt sie deren drei Bilder.

---

[9]) Wir nahmen statt D den Punkt $\hat{D}$ nach Belieben auf, wo $\hat{D}$ der Mittelpunkt der Involution ist.

Zu einem anderen Punktpaar (D, D_1) kommen wir, wenn wir den Kern $\hat{K}^2$ bzw. $\hat{K}_1^2$ der Involutionen $E_{K_D^1}$ bzw. $E_{K_1^1 D_1}$ herstellen. Je ein entsprechendes Punktpaar gibt je ein Punkt der $\hat{K}^2$ bzw. $\hat{K}_1^2$.

Die Spurlinien der Hyperebene $\hat{K}_1^2$ sind n_1, n_2, n_3 und $\hat{K}_1^{1^0}$ ist der in K_1 gedreht eines ihrer größten Kugelkreise.

Satz 5.2. *Zwei Punktreihen bestehen aus 5—5 Punkten allgemeiner Lage; es gilt*

$$ABCDE \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$$

dann und nur dann, wenn

$$ABCD \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 \tag{5.2}$$

$$ABCE \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 E_1 \tag{5.3}$$

$$ABDE \overline{\wedge} A_1 B_1 D_1 E_1 \tag{5.4}$$

sind

Satz 5.3. *Wenn $ABCDE \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ist, weiterhin F, F_1 ein solches Punktpaar ist, für welches*

$$ABCF \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 F_1 \tag{5.5}$$

und

$$ADEF \overline{\wedge} A_1 D_1 E_1 F_1 \tag{5.6}$$

gilt, dann ist F, F_1 entsprechendes Punktpaar in der durch $ABCDE \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ bestimmten Projektivität bzw. Antiprojektivität.

6. Der Fixpunkt-Satz der Projektivität Π

Die algebraische Untersuchung der Doppelpunkte der

$$z' = (zc+d)^{-1} z(za+b), \quad \nabla \neq 0 \tag{6.1}$$

führt infolge der Nichtkommutativität der Quaternionen zu weit. Viel kürzer kommen wir zum Ziel und die geometrischen Beziehungen heben sich besser aus, wenn wir die Frage auf Grund des Satzes 1, 2^x in der mit der Q-Geometrie äquivalenten Geometrie untersuchen, und den folgenden Satz beweisen.

Satz 6.1. *Die wirklichen Homographien H einer Hyperkugel K^4 des fünfdimensionalen Raumes R_5 haben immer mindestens einen Doppelpunkt.*

Es ist bekannt, daß die Homographien einer Kugel des dreidimensionalen Raumes zu der Kollineation des dreidimensionalen projektiven Raumes ergänzt werden können, genau so können die Homographien einer Hyperkugel des R_5 zu Kollineationen des R_5 erweitert werden.

Die Kollineationen des R_5 geben die Transformationsgleichungen

$$\xi_i = \alpha_{i0}\xi_0 + \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \alpha_{i3}\xi_3 + \alpha_{i4}\xi_4 + \alpha_{i5}\xi_5, \tag{6.2}$$

wo $i=0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $|\alpha_{ik}| \neq 0$ ist, und deren charakteristische Gleichung ist sechsten Grades. Dann aber haben diese Kollineationen *mindestens eine* doppelte Gerade: diese ist entweder eine auf zwei reellen Doppelpunkten liegende Gerade, oder aber eine relle Gerade die auf ihren zwei konjugierten immaginären Doppelpunkten liegt. Bezeichnen wir mit K_5 jene Kollineation, welche die K^4 in sich selbst überträgt, und mit m ihre vorhandene reelle doppelte Gerade.

Hier kann die wechselseitige Lage von m und K^4 die folgende sein: die m a) berührt, b) schneidet in zwei verschiedenen Punkten, c) schneidet nicht und berührt nicht die K^4.

Weil K_5 die K^4 in sich selbst überträgt, deshalb gilt im Falle a): der Berührungspunkt M von m und K^4 ist Doppelpunkt der K_5 und zugleich auch der H; im Falle b) soll m die K^4 in den Punkten M und N schneiden. Dann sind zwei Fälle möglich: M und N sind entweder Doppelpunkte, oder vertauschbare in H. Sofern M und N vertauschbare Punktpaare sind, schreiben wir H in der Form der Quaternion

$$z' = (zc+d)^{-1}(za+b) \tag{6.2}$$

und wir bringen das vertauschbare Punktpaar M, N in die Punkte 0 und ∞; dann kann nach der Definition der Homographien Satz 1.2* die Gleichung (6.2) nur die Form

$$z' = c^{-1} z^{-1} b \tag{6.3}$$

haben. Ein vertauschbares Punktpaar (6, 3) ist auch das Punktpaar c^{-1}, b. Wenn $c^{-1} = \alpha b$ ist, dann ist von einer Involution die Rede und dieselbe hat einen Doppelpunkt. Wenn aber $c^{-1} \neq \alpha b$ ist, dann werden die Punkte $0, \infty, c^{-1}, b$ nicht auf einen Kreis liegen und die Kugel $K^2(0, \infty, c^{-1}, b)$ wird in H doppelt sein. Transformieren wir endlich die H so, daß die Doppelkugel K_d^2 in die spezielle Kugel $K_d^2(0, 1, \infty, i)$ gerate und das Punktpaar $(0, \infty)$ vertauschbar sei, dann wird die Gleichung der H die Form

$$z' = \mathfrak{t}^{-1} z^{-1} \mathfrak{l} \tag{6.4}$$

haben (wo $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{l}$ wirkliche komplexe Zahlen sind). (6, 4) bedeutet auf der K_d^2 eine solche Homographie, die äquivalent mit der Projektivgeometrie der komplexen Geraden ist und diese hat — wie bekannt — ein vertauschbares Punktpaar, deshalb auch einen Doppelpunkt, letzterer aber ist zugleich auch Doppelpunkt von K^4.

c) Sofern m die K^4 nicht schneidet, dann schneidet der auf K^4 bezogene Polarraum M^3 der m aus K^4 eine K^2 aus, welche in K_5 doppelt ist und sonach darauf eine Homographie festlegt. Auf Grund des Satzes 1, 5 ist diese Homographie äquivalent mit der Projektivgeometrie der komplexen Geraden und diese hat entweder einen Doppelpunkt oder ein vertauschbares Punktpaar. Wenn sie ein vertauschbares Punktpaar hat, dann ist der Fall b) auf sie anwendbar, so hat die H in jedem Falle einen Doppelpunkt und damit ist der Satz 6.1 bewiesen.

Infolge der Äquivalenz zwischen Q und H können wir behaupten den

Satz 6.1. *Die zur Q-Geometrie gehörenden Projektivitäten Π haben immer mindestens einen Fixpunkt.*

7. Klassifizierung der Projektivitäten

Auf Grund der Sätze 4.1, 4.2 und 6.1 sind nach den Doppelpunkten die folgenden Π möglich.

a) mit einem Doppelpunkt
b) mit zwei Doppelpunkten
c) mit einer fixen Kette zweiten Grades.

Das Vorhandensein der Π unter c) haben wir schon in 4. gesehen. Das Vorhandensein der Π unter a) und b) werden wir mit ihrer Herstellung beweisen.

a) *Parabolische Projektivität* Π_p

Definition. Parabolische Projektivität nennen wir die Projektivität, welche einen einzigen Doppelpunkt hat.

Durch Transformation können wir erreichen, daß die Koordinate des einzigen Doppelpunktes ∞ sei. Dann ist die Gleichung der Π_p

$$z' = z + a. \tag{7.1}$$

Nehmen wir die Darstellung von q im M_4, dann sehen wir, daß (7.1) eine Translation bedeutet.

Nehmen wir den Punkt $P(p)$ der q und sei $\Pi_p(P)=P_1$ und $\Pi_p^{-1}(P)=P_2$, dann sind nach (7.1) die Koordinaten des P_1 bzw. P_2 $p+a$ bzw. $p-a$, dann aber ist $(P_1P_2PM)=-1$, M ist der Doppelpunkt und so gilt der

Satz 7.1. *In der parabolischen Projektivität ist die durch den Doppelpunkt und durch ein entsprechendes Punktpaar gehende Kette eine Doppelkette* K_d^1.

Aus Translation folgt, daß die durch den Doppelpunkt M gehenden nichtdoppelten entsprechenden Ketten ersten Grades nur den Punkt M gemein haben, und ferner liegen in Π_p zwei Doppelketten ersten Grades auf einer Kette zweite Grades, und drei Doppelketten ersten Grades bestimmen, wenn sie nicht auf einer Kette zweiten Grades liegen, eine Kette dritten Grades.

Auf Grund des $(P_1P_2PM)=-1$ können wir auch den Doppelpunkt der Π_p konstruieren, es ist nur das harmonische Punktquadrupel herzustellen. Diesen Doppelpunkt kann man nach 5 auch mit Konstruktion bestimmen.

Auf Grund der gesagten können wir über eine Projektivität Π entscheiden, ob sie parabolisch ist oder nicht. Nämlich wenn wir das Punktquadrupel $(P_1P_2PM)=-1$ herstellen und M der Doppelpunkt der Π ist, dann ist von einer parabolischen Projektivität die Rede, im Gegenfall ist Π nicht parabolisch. Nämlich wenn wir annehmen würden, daß Π noch einen Doppelpunkt hat, so müsste derseble entweder auf der Doppelkette $K^1(P_1P_2PM)$ liegen, oder aber ihre zwei Doppelpunkte wären in Bezug auf diese symmetrisch, dies jedoch ist dem $(P_1P_2PM)=-1$ entgegengesetzt.

Aus (7, 1) folgt es daß Π_p durch ihren Doppelpunkt und durch ein entsprechendes Punktpaar von ihr eindeutig bestimmt wird.

b) *Projektivitäten mit zwei Doppelpunkten*

Sofern Π mindenstens zwei Doppelpunkte hat, können wir Π so transformieren, daß zwei ihrer Doppelpunkte in die Punkte 0 und ∞ geraten und dann wird die Gleihung der Π

$$z' = d^{-1}za \tag{7.2}$$

sein.

Vor der Behandlung der Projektivitäten der Form (7.2) werden wir auf der Geraden q die Drehung um den Punkt und die auf den Punkt bezogene Streckung deuten.

Definition. Unter der auf den Punkt 0 bezogenen *Streckung* der q veıstehen wir die projektive Transformation $z' = z\alpha$, wo α skalar ist.

Unter Drehung der q um den Punkt 0 verstehen wir jene projektive Abbildung, welche ein Punktpaar $(z, -z)$ in ein solches Punktpaar $(z', -z')$ überträgt, für welches $N(z) = N(z')$ ist.

Unter der auf 0 bezogenen *Drehstreckung* der q verstehen wir das aus dem Produkt einer Drehung und einer Streckung bestehende projektive Abbildung.

Nach obiger Definition bedeutet

$$z' = d^{-1}za, \quad \text{wenn} \quad N(z) = N(z') \tag{7.2}$$

Drehung,

$$z' = z\alpha, \tag{7.3}$$

Streckung, und

$$z' = d^{-1}za, \quad \text{wenn} \quad N(z) \neq N(z') \tag{7.4}$$

Drehstreckung bezüglich des Punktes 0. Aus der Definition folgt, daß in einer Drehstreckung die Drehung und die Streckung vertauschbar sind.

Aus der Deutung der Drehung, der Streckung und der Drehstreckung ergibt sich noch, daß in unserem Übertragungsverfahren in dem M_4 der Drehung die Drehung des zu M_4 gehörigen R_4 um den Punkt 0, der Streckung die Streckung des R_4 und der Drehstreckung die auf 0 bezogene Drehstreckung des R_4 entspricht.

Nach den Untersuchungen von COLE [10] (p. 209.) setz sich eine jede Drehung des R_4 um 0 aus zwei einfachen Drehungen (um eine Ebene) zusammen. Die Drehungen haben zwei doppelte Drehungsebenen, welche aufeınander senkrecht sind. Nehmen wir noch in Betracht, daß die auf 0 bezogene Streckung die Zahl der doppelten Elemente nicht ändert, weiterhin sehen wir von jener speziellen Drehstreckung *ab*, welches aus einer einzigen einfachen Drehung besteht. Dann können wir feststellen, daß — auf die Gerade q zurückkehrend — die allgemeine Drehstreckung nur zwei Doppelpunkte hat, und demnach ist gültig der

Satz 7.2. *Die Projektivität mit zwei Doppelpunkten hat zwei aufeinender vollkommen senkrechte Doppelketten zweiten Grades.*

c) *Zu der in einer einzigen einfachen Drehung bestehenden Π gehört die Projektivität mit einer fixen doppelten Kette zweiten Grades,* deren Untersuchung ſn 4. schon an die Reihe kam.

Definition. Die Transformierten der auf den Punkt 0 bezogenen Drehung, Streckung bzw. Drehstreckung nennen wir kurz Drehung, Streckung bzw. Drehstreckung.

8. Klassifizierung der Antiprojektivitäten auf Grund ihrer doppelten Elemente

Weil das Quadrat der nichtinvolutorischen Antiprojektivität $\overline{\Pi}$ eine Projektivität Π ist, können wir die Klassifizierung der $\overline{\Pi}$ aus derselben der Π ableiten. Dementsprechend sind folgende $\overline{\Pi}$ möglich

a) Antiprojektivität mit einem vertauschbaren Punktpaar,

b) Antiprojektivität mit einem Doppelpunkt,

c) Antiprojektivität mit zwei Doppelpunkten,

d) Antiprojektivität, deren eine Kette ersten Grades je nach den Punkten doppelt ist,

e) Antiprojektivität, deren eine Kette zweiten Grades doppelt und die Punkte derselben vertauschbar sind, die aber keine Doppelpunkte hat,

f) Antiprojektivität mit einer je nach den Punkten doppelten Kette zweiten Grades.

Das Vorhandensein dieser $\overline{\Pi}$ werden wir durch Angabe ihrer kanonischen Gleichung beweisen.

a) Die Antiprojektivität mit der Gleichung

$$z' = \mathfrak{t}_1 \bar{z}^{-1} \mathfrak{t}_2, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{t}_2^{-1} \tag{8.1}$$

hat das vertauschbare Punktpaar 0, ∞, weitere vertauschbare Punktpaare und Doppelpunkte hat sie nicht, weil das Quadrat der Antiprojektivität von (8.1) eine Projektivität mit zwei Doppelpunkten ist.

b) Parabolische Antiprojektivität $\overline{\Pi}_p$. Die $\overline{\Pi}_p$

$$z' = \bar{z} + a \tag{8.2}$$

hat als einzigen Doppelpunkt den Punkt ∞.

c) Die Doppelpunkte der Antiprojektivität

$$z' = \mathfrak{t}_1^{-1} \bar{z} \mathfrak{t}_2 \quad \text{wo} \quad \mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{t}_2^{-1} \quad \text{ist,} \tag{8.3}$$

sind die Punkte 0 und ∞. Mehr Doppelpunkte hat (8.3) nicht, weil sie aus dem Produkt einer Projektivität mit zwei Doppelpunkten und einer Spiegelung einer Kette ersten Grades, welche auf der einen doppelten Kette zweiten Grades der genannten Projektivität liegt, zusammengesetzt wird.

d) Die Antiprojektivität

$$z' = \mathfrak{t}^{-1} \bar{z} \mathfrak{t} \tag{8.4}$$

ist das Produkt einer Projektivität mit einer fixen Doppelkette zweiten Grades und der Spielung auf eine darauf liegende Kette ersten Grades.

e) Die Antiprojektivität

$$z' = -\mathfrak{t}^{-1} \bar{z}^{-1} \mathfrak{t} \tag{8.5}$$

ist das Produkt einer Projektivität mit einer fixer Doppelkette zweiten Grades (einer einfachen Drehung) und einer Antiinvolution A_e.

f) Die Antiprojektivität

$$z' = -\mathfrak{k}^{-1}\bar{z}\mathfrak{k} \tag{8.6}$$

kann aufgefaßt werden, als Produkt einer Projektivität mit einer fixen Doppelkette zweiten Grades (einer einfachen Drehung) und einer A_{II} deren Doppelkette dritten Grades durch diese — Kette zweiten Grades geht.

9. Bestimmung von Doppelpunkten im Falle Projektivitäten

a) Gewöhnliche Projektivität.

Die Konstruktion der entsprechenden Elemente ist mit Anwendung der Eigenschaften der Drehstreckung einfach im Falle der Projektivität Π.

$$z' = (\alpha+\beta i)\, z(\gamma+\delta i). \tag{9.1}$$

In diesem Falle setzt sich der Drehungsteil der im M entsprechenden Π aus der einfacher Drehung um die Ebene $[\xi_2\xi_3]$ durch den Winkel $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\gamma+\alpha\delta}{\alpha\gamma-\beta\delta}$ und aus der einfachen Drehung um die Ebene $[\xi_0\xi_2]$ durch den Winkel $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha\gamma+\beta\delta}$ zusammen,*) und das Maß der Streckung ist $\tau = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}$.

Im Falle 1, sei $\tau=1$, dann besteht die Π bloß aus Drehung. Die Figur 16. illustriert neben Anwendung des Profilbildes die Konstruktion der Entsprechenden des Punktes $P(\alpha_0+\alpha_2 j)$, $\Pi(P)=P_1$ und $\Pi^{-1}(P)=P_2$. Aus der Konstruktion folgt, daß die Punkte P_1, P_2 symmetrisch in bezug auf die Ebene $[\xi_0\xi_2]$ sind, daraus aber ergibt sich, daß jener $\tilde{P}$, wofür $(P\tilde{P}P_1P_2)=-1$ ist, gleichfalls in der Ebene $[\xi_0\xi_2]$ liegt und $N(P)=N(\tilde{P})$ ist. (Nämlich der Kreis $K^1(PP_1P_2)$ und der Punkt 0 bestimmen einen Drehungskegel.) Bestimmen wir ähnlicherweise den zum Punkte $R=\tilde{P}$ gehörenden Punkt $\tilde{R}$, welcher gleichfalls in der Ebene $[\xi_0\xi_2]$ liegt und $N(\tilde{R})= =N(P)$ ist. Demnach bestimmt P, $\tilde{P}$, $\tilde{R}$ einen Kreis K^1, welcher symmetrisch in Bezug auf die zwei Doppelpunkte $0, \infty$ der Π ist. (Im allgemeinen ist nach der Konstruktion, $P \neq R$ ausgenommen den Fall, bei welchem die Ebene der $K_1(P, P_1P_2)$ durch den Punkt 0 geht, dann aber sind die Punkte $(P\tilde{P})$ in Bezug auf die Doppelpunkte symmetrisch.)

2) Auch in dem Falle $\tau \neq 1$ können wir zu dem in Bezug auf die Doppelpunkte symmetrischen Kreis gelangen. Auch dann geschieht die Konstruktion der entsprechenden Punkte nach den vorangehenden, nur die Koordinatten der durch Drehung gewonnenen Punkte müssen wir noch um τ verlängern. Unsere Figur 16. zeigt auch die Konstruktion dieser Punkte ($\tau=2$ und die Bezeichnung dieser Punkte ist die folgende: $\Pi(P)=\hat{P}_1$, $\Pi^{-1}(P)=\hat{P}_2$).

Bevor wir an den Beweis der Herstellbarkeit des symmetrischen Kreises gehen, stellen wir folgende zwei Hilfssätze fest.

---

*) Die Winkel der Drehung wurden aus der Drehung $z=\alpha_1+j$ berechnet.

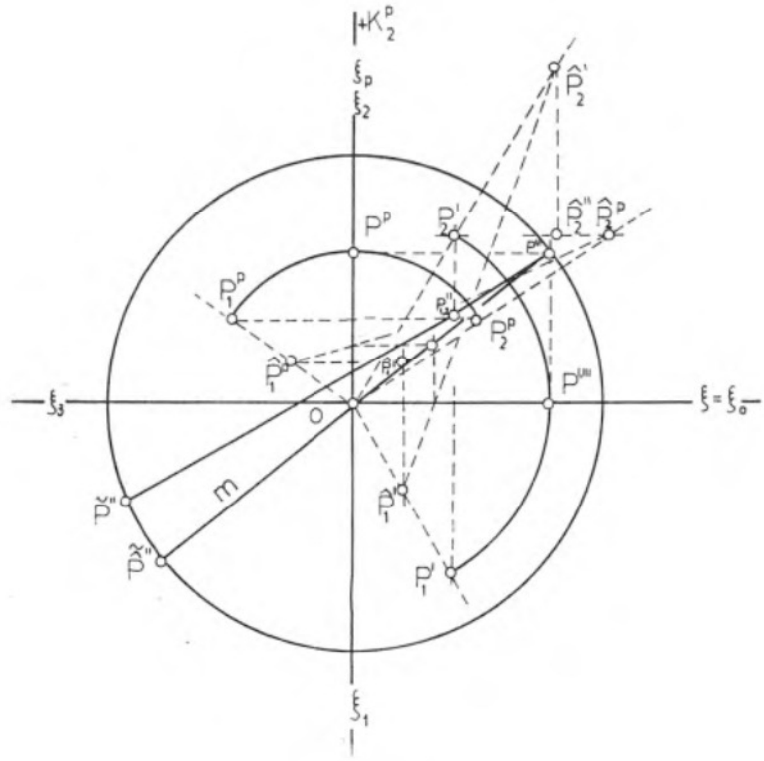

Fig. 16

Hilfssatz 1. *Wenn wir auf zwei verschiedene Seiten einer Strecke $\overline{KP}$ gleiche Winkel mit dem Scheitelpunkt K abmessen und auf den so gewonnenen Seiten der Winkel die Punkte P_1 bzw. P_2 nach $\overline{KP_1}=\tau\overline{KP}$ bzw. $\overline{KP_2}=\frac{\overline{KP}}{\tau}$ feststellen, dann ist die Strecke KP Halbsehne des die durch die Punkte PP_1P_2 gehenden Kreises und der Punkt desselben Kreises, wofür $(P\tilde{P}P_1P_2)=-1$ ist, liegt auf der Geraden $|KP|$.*

Es folgt schon aus dem Satz der auf den Kreis bezüglichen Sekanten, daß die Strecke $\overline{KP}$ Halbsehne des Kreises ist. Und wenn wir auf Grund von Figur 17, beachten, daß $(AA_1P_1P_2)=-1$ ist, so folgt schon, daß der Punkt $\tilde{P}$ auf der Geraden $|KP|$ liegt. Weiter auf Grund einfacher räumlicher Zusammenhänge ist gültig der

Hilfssatz 2. *Wenn wir einen Winkel und seine Winkelhalbierende so auf eine Ebene parallel projizieren, daß die Projektionsrichtung auf der durch die Winkelhalbierende Gerade gehende und auf die Ebene des Winkels senkrechte Ebene liegt, weiterhin auf die Projektion der Winkelhalbierenden senkrecht ist: dann wird diese Projektion auch das Bild des gegebenen Winkels halbieren.*

Kehren wir zu unserer Figur 16 zurück und leiten wir durch die Punkte $P_1\hat{P}_1\hat{P}_2$ einen Kreis; dieser soll die Ebene $[\xi_0\xi_2]$ in der Geraden m schneiden, und sei der Schnittpunkt des Kreises $K^1(P\hat{P}\hat{P}_2)$ und der Gerade m außer P der Punkt M. Stellen wir eine senkrechte von O aus auf m und sei deren Fußpunkt K. Dann folgt

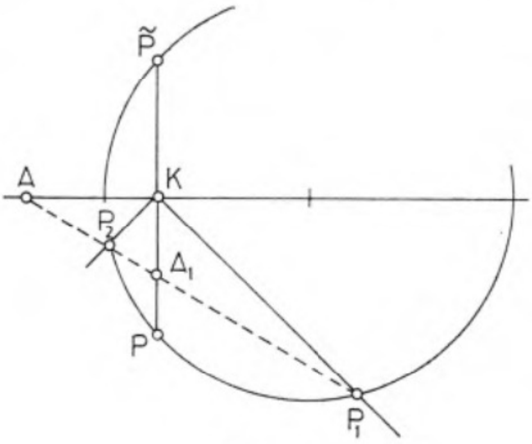

Fig. 17

schon aus den Hilfsätzen, daß m die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle(\hat{P}_1 K \hat{P}_2)$ und $(PM\hat{P}_1\hat{P}_2)=-1$ ist, d. h. $M=\tilde{P}$ und $N(P)=N(\tilde{P})$ besteht.

Auf Grund der obigen Untersuchungen gilt der

Satz 9.1 *Wenn wir in der gegebenen nicht parabolischen und nicht involutorischen Projektivität Π die zu einem Punkt P gehörenden Punkte $\Pi(P)=P_1$ und $\Pi^{-1}(P)=P_2$ herstellen und jeden Punkt bestimmen, wofür $(P\tilde{P}P_1P_2)=-1$ ist, dann wird das Punktpaar $(P\tilde{P})$ auf einer solchen Kette ersten Grades liegen, welche in Bezug auf die zwei Doppelpunkte Π symmetrisch ist, und diese Kette wird auf zwei Doppelketten zweiten Grades der Π senkrecht sein.*

Der Satz 9.1 macht die Bestimmung der zwei Doppelpunkte der Π möglich, mit dessen Hilfe nämlich können zwei solche Ketten ersten Grades der Π K_1^1 und K_2^1 hergestellt werden, in Bezug auf welche die zwei Doppelpunkte symmetrisch sind.

Bemerkung. Sofern wir im Laufe der Konstruktion von K_1^1 und K_2^1 zu zwei solchen Punktpaaren gelangen, für welche aus $\tilde{P}=R$ sich $\tilde{R}=P$ ergibt, so kann die Konstruktion der Doppelpunkte auf jene Aufgabe zurückgeführt werden, welche wir in Verbingung mit den Involutionen damals lösten, als wir die Doppelpunkte aus zwei entsprechenden Punktpaaren bestimmten ([15] p. 246). In diesem Falle ist das entsprechende Punktpaar $(P, \tilde{P})$.

Wenn die im vorigen Abschnitt erwähnten zwei Punktpaare nicht zu unserer Verfügung stehen, dann können wir ihre zwei Doppelpunkte so herstellen, daß wir jene Punkte bestimmen, welche in Bezug auf die Ketten K_1^1, K_2^1 symmetrisch sind.

Bei der Konstruktion der symmetrischen Punktpaare beachten wir, daß wenn M, N ein solcher Punktpaar ist, dann sind das auf K_2^1 bezogene Spiegelbild K_3^1 der K_1^1, und das auf K_1^1 bezogene Spiegelbild K_4^1 der K_2^1 symmetrisch. Dann wird $|MN|$ eine Transversale der Ebenen N_1, N_2, N_3, N_4 welche durch die Mittelpunkte der Kreise $K_1^1, K_2^1, K_3^1, K_4^1$ gehenden Normalebenen sind. Nach den Untersuchungen führt die Konstruktion zu der Festsetzung der Schnittpunkte einer V^3 Torsfläche dritten Grades mit einer Geraden ([12] 793). Solche Punkte gibt es drei und diese sind im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar[10]). (Man kann nur Näherungskonstruktion geben).

In Kenntnis der Geraden $|MN|$ geschieht die Konstruktion der Punkte M und N so, daß wir den Schnittpunkt C einer solchen Geraden mit der einen Ebene z. B. N_1 bestimmen, sodann die in den Drehungskegel mit dem Scheitelpunkt C und den Leitkreis K_1 gezeichnete Tangentenkugel herstellen, welche denselben in dem Kreise K_1 berührt. Die zwei Schnittpunkte dieser Kugel mit der außerwählten Geraden geben die Punkte M und N. (Von diesen Punkten sind nur zwei reell.)

In Kenntnis der Doppelpunkte können schon die aufeinander senkrechten Doppelketten zweiten Grades der Π konstruiert werden. Bringen wir durch Transformation die Doppelpunkte M, und N in die Punkte 0 und ∞. Dann müßen wir solche Ebenen konstruieren, welche sowohl auf die Ebene der K_1^1, wie auch auf die Ebene der K_2^1 senkrecht sind. Diese Konstruktion zeigt Fig. 2 aus [14].

b) Im Falle von *Antiprojektivitäten* können wir die Bestimmung der Doppelpunkte auf den Fall a) zurückführen, wiederum Gebrauch machend von der Tatsache, daß der Quadrat einer Antiprojektivität eine Projektivität ist.

Demnach werden wir die doppelten Elemente einer $\bar{\Pi}$ so konstruieren, daß wir die doppelten Elemente einer $\Pi=\bar{\Pi}^2$ herstellen und aus diesen die doppelten Elemente der $\bar{\Pi}$ herauswählen.

Literatur

[1] G. Ancochea, Le Théorème de von Staudt en géométrie projective quaternionienne. *J. Reine Angew. Math.* **184** (1942), 193—198.

[2] E. Cartan, Leçons sur la géométrie projective, *Paris*, 1931.

[3] J. Bilo, Onderzoekingen betreffende de meetkundige grondslagen van de projektieve quaternionenmeetkunde, *Brussel*, (1949).

[4] J. Bilo, Conditions for the equivalence of pointsets in quaternion projective geometry, *Simon Stevin* **28** (1951), 140—145.

[5] L. Gyarmathi, A négydimeziós lineáris tér metrikus feladatainak konstruktív megoldása a Maurin-féle leképzés alapján. Az *Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, (1952), 653—664.

[6] A. Kolmogoroff, Zur Begründung der projektiven Geometrie, *Ann. of Math. (2)* **33** (1932) 175—176.

[7] J. Maurin, Geometrie descriptive a quatre dimensions, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **225** (1947), 560—562.

[8] P. Lauri, Abbildung der Lie'schen Kugelgeometrie auf eine höhere komplexe Gerade, *Ann. Academiae Sci. Fenniciae (Suomalainen Tiedeakatemia) Ser. A. I. Math.-Phys.* **4** (1941), ebenda **16**, 21, 32.

[9] E. Study, Ein Seitenstück zur Theorie der linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen I, *Math. Z.* **18** (1923), 55—86. II. *ebenda* 201—229. — III. **21** (1924), 45—71, — IV. *ebenda*, 174—194.

[10] F. N. Cole, On Rotations in Space of Four Dimensions. *Amer. J. Math.* **12** (1890), 191—210.

[11] S. Wachs, Essai sur la géométrie projective quaternionienne. *Académie Royale de Belgique, Classe des sciences,* Tome XV (1936), *Fasc. 6*, Bruxelles.

[12] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III. 2, 2a, p. 784.

[13] L. Pontrjagin, Über stetige algebraische Körper. *Ann. of Math.* **33** (1932), 163—174.

[14] A. Gyarmathi—L. Gyarmathi, Über Konstruierbarkeit der eindeutig festgelegten Winkel der Raumelementen im Falle Mehrdimensionaler Räume, *Publ. Math. (Debrecen)* **23** (1976), 315—327.

[15] L. Gyarmathi, Die Konstruktionen in der projektiven Geometrie der Quaternionengeraden, *Publ. Math. (Debrecen)* **21** (1974), 233—248.

(Eingegangen am 30. März 1977.)

[10]) Die Nichtkonstruierbarkeit folgt auch aus dem sechsten Grad der charakteristischen Gleichung von (6, 2).