# Diophantische Approximationen mit natürlichen Zahlen

Von ATTILA PETHŐ (Debrecen)

## 1. Einleitung

Bezeichne $R^n$ das $n$-dimensionale reelle euklidische Raum und $Z^n$ das Gitter der Punkte in $R^n$ mit ganzen Koordinaten. Ist $(x_1, \dots, x_n) = \underline{x} \in R^n$, dann setzen wir $|\underline{x}| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Wir schreiben $\underline{x} > \underline{0}$ ($\underline{x} < \underline{0}$), wenn alle Koordinaten von $x$ positiv (negativ) sind, und wir nennen diese Vektoren positiv (negativ).

Seien $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ linear unabhängige Linearformen mit reellen Koeffizienten und $\mathscr{L}(\underline{x}) = (L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x}))$. Nach dem Dirichletschen Approximationssatz (s. z. B. [1]) existieren eine Konstante $c > 0$ und unendlich viele $(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_r) \in Z^{n+r}$ mit $\underline{x} \neq \underline{0}$, welche der Ungleichung

$$(1) \qquad \max_{1 \leqq i \leqq r} (|L_i(\underline{x}) - y_i|) = |\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leqq c|\underline{x}|^{-(n/r)}$$

genügen. Der Einfachheit halber werde ich im Weiteren — wenn ich nicht anderes sage — unter einer Lösung eines Ungleichungsystems immer ein Element von $Z^{n+r}$ verstehen.

Die Lage ist viel komplizierter, wenn wir Linearformen mit natürlichen Zahlen approximieren wollen.

Einerseits hat N. OBRESKOV [2] bewiesen, daß eine Konstante $c_1 > 0$ und unendlich viele $(\underline{x}, \underline{y}) \in Z^{n+r}$ mit $\underline{x} > \underline{0}$ existieren, welche der Ungleichung

$$|\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leqq c_1 |\underline{x}|^{-(1/r)}$$

genügen. Später zeigte W. M. SCHMIDT [4] wenn $1, \alpha, \beta$ über $Q$ linear unabhängige reelle Zahlen sind, dann existieren für jede $\varepsilon > 0$ unendlich viele $x_1, x_2$ natürliche Zahlen mit

$$\|\alpha x_1 + \beta x_2\| < \varepsilon |\underline{x}|^{-\mu}$$

wo $\mu = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist, und $\|z\|$ den Abstand zwischen $z$ und der nächsten ganzen Zahl bezeichnet.

Andererseits bewies Schmidt in derselben Arbeit, daß über $Q$ linear unabhängige reelle Zahlen $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ existieren, für welche bei jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c(\varepsilon)$ existiert, s. d.

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| > c(\varepsilon) |\underline{x}|^{-2-\varepsilon}$$

gilt für alle $\underline{0} < \underline{x} \in Z^n$.

In dieser Arbeit verallgemeinere ich ein Lemma von Schmidt auf den mehrdimensionalen Fall. Als Anwendung beweise ich unter anderem, daß $\mathscr{L}(\underline{x})$ mit natürlichen Zahlen nur dann sehr schlecht approximierbar ist, wenn es mit ganzen Zahlen sehr gut approximierbar ist.

Zur Formulierung der Sätze benötigen wir noch einige Bezeichnungen. Seien $M_1(\underline{x}), \ldots, M_n(\underline{x})$ über $R$ linear unabhängige Linearformen mit reellen Koeffizienten und $\mathfrak{M}(x)=(M_1(\underline{x}), \ldots, M_n(\underline{x}))$. Die Menge der Punkte $\underline{x}$ von $R^n$, welche dem Ungleichungsystem

$$|M_i(\underline{x})| < |M_n(\underline{x})| \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

genügen, werden wir *eckiges Bereich* nennen und mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß in jedem eckigen Bereich unendlich viele Elemente von $Z^n$ liegen.

**Satz 1.** *Sei $w^*<\infty$ die obere Grenze der Zahlen $w\geqq 0$, für welche das Ungleichungsystem*

$$|\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leqq |\underline{x}|^{-(n/r)(1+w)} \tag{3}$$

*unendlich viele Lösungen $\underline{x}\neq\underline{0}$ besitzt. Sei weiter $\eta^*$ die untere Grenze der Zahlen $\eta$, für welche das Ungleichungsystem*

$$|\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leqq |\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)} \tag{4}$$

*unendlich viele Lösungen $\underline{x}\in\mathfrak{M}\cap Z^n$ besitzt. Dann ist*

$$\eta^* \leqq \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*}.$$

Da $1+nw^*>0$ gilt, ist die Funktion $f(w^*)=\dfrac{(n-1)w^*}{1+nw^*}$ streng monoton wachsend. So besteht

$$\eta^* \leqq f(w^*) \leqq \lim_{w^*\to\infty} \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*} = \frac{n-1}{n}$$

für alle $w^*<\infty$. Also ist $\eta^*$ nicht größer als $(n-1)/n$ und $\dfrac{n}{r}(1-\eta^*)>\dfrac{1}{r}$.

Ich werde in Lemma 1 ein eckiges Bereich angeben, worin nur positive oder negative Vektoren liegen. Als Spezialfall folgt aus Satz 1 der Satz von Obreskov für alle Linearformen, welche in endlicher Ordnung approximierbar sind.

Ein System der Linearformen nenne ich, wie gewöhnlich, ein *Roth System* wenn für dieses die, in Satz 1 definierte Zahl $w^*=0$ ist.

Das System der Linearformen $L_1(\underline{x}), \ldots, L_r(\underline{x})$ nenne ich *schlecht approximierbar* wenn eine solche Konstante $B>0$ existiert, daß das Ungleichungsystem

$$|\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| \leqq B|\underline{x}|^{-(n/r)} \tag{5}$$

keine Lösung $\underline{x}\neq\underline{0}$ besitzt.

**Satz 2.** *Sei $\mathfrak{M}$ ein eckiges Bereich und $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein Roth System, dann besitzt für jede $\varepsilon, \eta > 0$*

$$|\mathscr{L}(\underline{x}) - \underline{y}| < \varepsilon |\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)} \tag{6}$$

*unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M} \cap Z^n$.*

**Satz 3.** *Sei $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein schlecht approximierbares System und habe (5) mit $B = B_0$ keine Lösungen. Dann besitzt (5) für*

$$B = P = \max\,(2^{1/r}, 2^{n(n^3+1)/r}\, B_0^{-n+1}$$

*unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > \underline{0}$.*

Aus dem Beweis folgt, daß Satz 3 auch für alle eckigen Bereiche gilt.

Ein wichtiger Spezialfall der Sätze 2 und 3 ist: wenn $r=1$ und die Koeffizienten der Linearform $L(\underline{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + x_{n+1}$ über $Q$ linear unabhängige algebraische Zahlen sind. Wie W. M. Schmidt [3] gezeigt hatte, ist eine derartige Linearform ein Roth System. Wenn sogar $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu einem Körper vom Grad $n+1$ gehören, dann ist $L(\underline{x})$ schlecht approximierbar [1]. In Lemma 1 werde ich ein eckiges Bereich angeben, welches nur positive und negative Vektoren enthält. Auf dieses spezielle Bereich die obigen Sätze anwendend folgen die nächsten beiden Folgerungen aus Satz 2 bzw. 3.

*Folgerung 1. Seien $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ über $Q$ linear unabhängige reelle algebraische Zahlen, dann besitzt für jede $\varepsilon, \eta > 0$*

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| < \varepsilon |\underline{x}|^{-n+\eta}$$

*unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > \underline{0}$.*

*Folgerung 2. Sei $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis eines Zahlkörpers vom Grad $n+1$. Es existiert eine Konstante $P_1 > 0$, für welche*

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| < P_1 |\underline{x}|^{-n}$$

*unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} > \underline{0}$ besitzt.*

## 2. Lemmata

Zum Beweis der Sätze brauchen wir einige Lemmata.

**Lemma 1.** *Sei $n \geqq 2$; $\underline{x} \in R^n$ und*

$$N_i(\underline{x}) = x_1 + \dots + x_i - x_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1) \tag{7}$$
$$N_n(\underline{x}) = x_1 + x_2.$$

*Bezeichne $\mathfrak{N}$ das durch die $N_i(\underline{x})$ bestimmte eckige Bereich. Alle Elemente von $\mathfrak{N}$ sind entweder negativ oder positiv.*

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß $N_1(\underline{x}), \dots, N_n(\underline{x})$ über $R$ linear unabhängig sind, so daß $\mathfrak{N}$ tatsächlich ein eckiges Bereich ist.

Das Lemma werden wir mit vollständiger Induktion beweisen. Setzen wir zunächst $n=2$. Dann ist nach der Definition

$$|x_1-x_2| < |x_1+x_2|.$$

Es gilt also $x_1x_2>0$, deswegen haben $x_1$ und $x_2$ gleiche Vorzeichen und keine der beiden ist 0.

Nehmen wir nun an, daß die Behauptung für $n-1$ wahr ist. Setzen wir in (2) statt $M_i(\underline{x})$ überall $N_i(\underline{x})$, so bekommen wir die Definitionsungleichungen von $\mathfrak{N}$. Wegen der Konstruktion der $N_i(\underline{x})$ folgt aus den ersten $n-2$ Ungleichungen und aus der Induktionsvoraussetzung, daß $x_1, \ldots, x_{n-1}$ gleiche Vorzeichen haben und alle $\neq 0$ sind.

Die letzte Ungleichung ist

$$|x_1+\ldots+x_{n-1}-x_n| < |x_1+x_2|.$$

Hätte $x_n$ anderes Vorzeichen, als die anderen, oder wäre $x_n=0$, dann wäre

$$|x_1+\ldots+x_{n-1}-x_n| \geqq |x_1+\ldots+x_{n-1}| \geqq |x_1+x_2|,$$

ein Widerspruch. So muß das Vorzeichen von $x_n$ mit dem von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ übereinstimmen und das Lemma ist bewiesen.

Seien $\mathscr{L}(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}(\underline{x})$ wie früher. Bilden wir aus den Koeffizienten von $M_1(\underline{x}), \ldots, M_n(\underline{x})$ eine Determinante, wie gewöhnlich. Also in ihrer $j$-ten Reihe stehen der Reihe nach die Koeffizienten von $M_j(\underline{x})$. Den, von 0 verschiedenen, absoluten Betrag dieser Determinante werden wir mit $D$ bezeichnen.

$M_1(\underline{x}), \ldots, M_n(\underline{x})$ sind über $R$ linear unabhängig, deshalb gibt es eine Konstante $d$, so daß

$$|\underline{x}| \leqq d|\mathfrak{M}(\underline{x})| \tag{8}$$

für alle $\underline{x}\in R^n$ erfüllt ist.

**Lemma 2.** *Seien $\mathscr{L}(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}(\underline{x})$ wie früher, $w^*$ wie in Satz 1, endlich $w>w^*$. Das Ungleichungsystem*

$$|\mathscr{L}(\underline{x})-\underline{y}| < \varepsilon|\underline{x}|^{-(n/r)(1-\eta)} \tag{9}$$

*besitzt für $\eta=\dfrac{(n-1)w}{1+nw}>0$ und für jedes $\varepsilon>0$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x}\in\mathfrak{M}\cap Z^n$.*

Beweis. Seien $D, d$ die obigen Konstanten. Es existiert eine weitere Konstante $(K\varepsilon, w)=K>0$ welche der Bedingung

$$D^{\frac{1}{r}} K(d^n K^{-r})^{\frac{n(1+w)}{r(1+nw)}} < \varepsilon \tag{10}$$

genügt, wo $\varepsilon, \eta$ die im Lemma gegebenen Konstanten sind.

Nehmen wir an, daß die Anzahl der Lösungen von (9) endlich ist. Dann gibt es eine $N_0$ so, daß für alle $N>N_0$, $\underline{x}\in\mathfrak{M}$, $(\underline{x}, \underline{y})\in Z^{n+r}$ die Ungleichungen

$$|\mathscr{L}(\underline{x})-\underline{y}| \geqq \varepsilon N^{-(n/r)(1-\eta)}$$

$$|\underline{x}| \leqq N$$

gelten.

Seien $T$ eine beliebige reelle Zahl und $\Pi(T)$ die Menge derjenigen Elemente von $R^{n+r}$, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} (11) \qquad & |L_i(\underline{x})-y_i| < D^{1/r} K T^{-(n/r)(1+w)} \quad (i=1,\dots,r) \\ & |M_i(\underline{x})| \leqq d^{-1} T \quad (i=1,\dots,n-1) \\ & |M_n(\underline{x})| \leqq d^{n-1} K^{-r} T^{1+nw} \end{aligned}$$

genügen. Man kann sehr leicht nachprüfen, daß der absolute Betrag der Determinante dieses Systems $D$ ist. Infolge des Minkowskischen Linearformensatzes enthält $\Pi(T)$ für alle $T$ einen von $\underline{0}$ verschiedenen ganzen Vektor.

Wenn $T$ groß genug ist, dann ist $|\mathscr{L}(\underline{x})-\underline{y}|$ klein und außerdem

$$d^{-1}T \leqq d^{n-1}K^{-r}T^{1+nw}.$$

Nach (8) muß

$$|\underline{x}| \leqq d d^{n-1} K^{-r} T^{1+nw} = N$$

gelten. Somit gilt

$$|\mathscr{L}(\underline{x})-\underline{y}| < D^{1/r} K (d^n K^{-r})^{\frac{n}{r}\frac{1+w}{1+nw}} N^{-\frac{n}{r}\frac{1+w}{1+nw}} < \varepsilon N^{-\frac{n}{r}(1-\eta)}.$$

Sei nun $T$ so groß, daß auch noch $N > N_0$ erfüllt sei. So muß $\underline{x}$ infolge der indirekten Voraussetzung außer $\mathfrak{M}$ liegen. Es gilt also $|M_j(\underline{x})| \geqq |M_n(\underline{x})|$ für diese $\underline{x}$ mit irgendeinem Index $1 \leqq j \leqq n-1$. Nun folgt nochmals aus (8) und (11), daß

$$(12) \qquad \begin{aligned} & |\mathscr{L}(\underline{x})-\underline{y}| < D^{\frac{1}{r}} K T^{-\frac{n}{r}(1+w)} \\ & |\underline{x}| \leqq T \end{aligned}$$

für alle genug große $T$ mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt.

Es gibt weiter ein $w'$ mit $w > w' > w^*$ und mit

$$D^{\frac{1}{r}} K < T^{\frac{n}{r}(w-w')}.$$

Infolge (12) besitzt (3) mit dieser $w'$ unendlich viele Lösungen $\underline{x} \neq \underline{0}$. So muß $w' \leqq w^*$ sein, was ein Widerspruch ist. Die Voraussetzung also daß nur endlich viele Lösungen von (9) im $\mathfrak{M}$ liegen, war falsch. Somit ist Lemma 2 bewiesen.

Sei jetzt $L_1(\underline{x}), \dots, L_r(\underline{x})$ ein schlecht approximierbares System. $\mathfrak{M}$, $D$ und $d$ seien wie in Lemma 2, ferner sei $A \leqq d^{n/r}$ sowie

$$P \geqq D^{\frac{1}{r}} A^{-n} d^{\frac{n^2}{r}}.$$

**Lemma 3.** *Seien $\mathscr{L}(\underline{x})$, $\mathfrak{M}$ und $P$ wie oben. Nehmen wir an, daß* (5) *für $B=P$ nur endlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$ besitzt. Dann hat* (5) *für $B = D^{1/r} A$ unendlich viele nichttriviale Lösungen.*

Beweis. Dieses Lemma kann man mit demselben Gedankengang beweisen als Lemma 2, deshalb lassen wir den Beweis weg.

## 3. Beweis der Sätze

BEWEIS VON SATZ 1. Da $\eta > \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*} \geqq 0$ ist, gibt es eine $w>0$ mit $\eta = \frac{(n-1)w}{1+nw}$. Die Funktion $f(u) = \frac{(n-1)u}{1+nu}$ ist für $u \geqq 0$ streng monoton wachsend, so muß $w > w^*$ sein.

Nach Lemma 2 besitzt (9) für dieses $\eta$ und für jede $\varepsilon > 0$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$. Demzufolge gilt $\eta^* \leqq \eta$ für alle $\eta = f(w) > f(w^*)$. So gilt

$$\eta^* \leqq \inf_{w > w^*} f(w) = \frac{(n-1)w^*}{1+nw^*}$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 2. Nach der Voraussetzung bilden die Linearformen $L_1(\underline{x}), \ldots, L_r(\underline{x})$ ein Roth System, d. h. für diese ist $w^* = 0$. Seien $\varepsilon, \eta > 0$ beliebige relle Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\eta < (n-1)/n$ annehmen. Wenn dies nicht gilt, dann wählen wir ein kleineres $\eta$ die der Bedingung genügt. Wenn der Satz für dieses kleineren Wert wahr ist, dann gilt er selbstverständlich auch für einen größeren Wert.

Setzen wir $w = \frac{\eta}{n-1-n\eta}$. Diese ist wegen der Wahl von $\eta$ positiv. Wenden wir nun Lemma 2 auf $L_1(\underline{x}), \ldots, L_r(\underline{x})$ und $\mathfrak{M}$ mit dem obigen $\varepsilon$ an. Da $w > w^* = 0$ gilt, besitzt (6) unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{M}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 3. Nach der Voraussetzung besitzt (5) mit $B = B_0$ und mit der Linearformen $L_1(\underline{x}), \ldots, L_r(\underline{x})$ keine Lösungen. Sei $D$ der absolute Betrag der Determinante von $N_1(\underline{x}), \ldots, N_n(\underline{x})$. $D=2$ kann man mit einfacher Rechnung nachprüfen. Aus (7) kann man die $x_i$ mit $N_i(\underline{x})$ folgenderweise ausdrücken.

$$x_1 = \frac{N_1(\underline{x}) + N_n(\underline{x})}{2}, \quad x_2 = \frac{N_n(\underline{x}) - N_1(\underline{x})}{2}$$

$$x_i = 2x_{i-1} + N_{i-2}(\underline{x}) - N_{i-1}(\underline{x}) \quad (i = 3, \ldots, n)$$

Daraus folgt

$$|x_i| \leqq 2^{n-1} |\mathfrak{N}(\underline{x})| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

für alle $\underline{x} \in R^n$.

Setzen wir $d = 2^{n-1}$, $A \leqq \min\left(d^{\frac{n}{r}}, 2^{-\frac{1}{r}} B_0\right)$ und $P \geqq 2^{1/r} A^{-n+1} d^{n^2/r}$. Hätte (5) für dieses $P$ nur endlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{N}$, dann würde (5) für $B = 2^{\frac{1}{r}} A$ nach Lemma 3 unendlich viele nichttriviale Lösungen besitzen. Es gilt aber $B = 2^{\frac{1}{r}} A \leqq B_0$, was der Wahl von $B_0$ widerspricht. So muß (5) für $B = P$ unendlich viele Lösungen mit $\underline{x} \in \mathfrak{N}$ besitzen.

$\mathfrak{N}$ ist ein zu $\underline{0}$ symmetrisches Bereich. Wenn $\underline{x}$ mit irgendeinem $\underline{y}$ (5) genügt, dann ist auch $(-\underline{x}, -\underline{y})$ eine Lösung von (5). Dies vervollständigt den Beweis von Satz 3.

## Literatur

[1] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, *Berlin*, 1936.
[2] Н. Обрешков, О диофантовых приближениях линейных форм для положительных значений переменных, *Докл. Акад. Наук. С.С.С.Р.*, **73** (1950), 21—24.
[3] W. M. Schmidt, Linear forms with algebraic coefficients. I. *J. Number Theory* **3** (1971), 253—277.
[4] W. M. Schmidt, Two questions in Diophantine approximation, *Monatsh. Math.* **82** (1976), 237—245.

*(Eingegangen am 5. May 1977.)*