О двусторонних приближениях решений некоторых дифференциальных и операторных уравнений

Й. ХЕГЕДЫШ (Szeged)

Многие задачи теории дифференциальных уравнений эквивалентны отысканию неподвижной точки некоторого оператора A: например, начальные или краевые задачи эквивалентны отысканию неподвижной точки некоторого интегрального оператора A с ядром $G(x, t)$. Начальным задачам и некоторым специальным краевым задачам соответствуют такие ядра G, которые вместе со своими производными по x неотрицательны (или все неположительны), а потому соответствующий оператор A является монотонным (изотонным) оператором или легко сводится к монотонному случаю (см. напр. [6], [7]), что позволяет построить как угодно близкие двусторонние проближения для решения задачи (и его производных): см. напр. [1], [4], [6], [7].

Изложенный в настоящей работе метод дает двусторонние приближения для решения и его производных вышеупомянутых (начальных и специальных краевых) задач, для решения и его производных общей краевой задачи для нелинейного уравнения n-го порядка с однородными краевыми условиями, и для решения операторных уравнений в полуупорядоченном метрическом множестве, при условии сжатости соответствующих операторов A. Наш метод усиливает результаты работ [2], [5].

Мы будем рассматривать уравнение

$$y = Ay \tag{1}$$

в частично упорядоченном, полном метрическом множестве M, где заданный оператор A сжато отображает M в M, т. е.

$$Ah \in M, \quad \varrho(Ah, Ag) \leqq \Theta \varrho(h, g)$$
$$(\forall h, g \in M; \ \Theta = \text{const.}, \ 0 < \Theta < 1).$$

Расстояние мы обозначаем буквой ϱ, а порядок знаком $\leqq$.

Мы предпологаем, что метрика и упорядочение согласованы, в том смысле, что

$$[h \leqq g \leqq l] \Rightarrow \varrho(h, g), \quad \varrho(g, l) \leqq \varrho(h, l) \quad (\forall h, g, l \in M),$$

более того, предпологаем, что члены монотонных, сходящихся (по метрике) последовательностей $\{h_p\}\nearrow$, $\{g_p\}\searrow$ сравнимы со своими пределами h, g (очевидно $h_p \leqq h$, $g \leqq g_p$).

В дальнейшем мы будем считать, что M есть подмножество линейного векторного пространства V, и пусть для любых $h, g \in M$

$$\frac{1}{2}(h+g) \in M \text{ *)}.$$

$$\alpha_n h+(1-\alpha_n)g \xrightarrow{\varrho} \alpha h+(1-\alpha)g \quad (0 \leqq \alpha_n \leqq 1).$$

Пусть

$$M' = \left\{\alpha(h-g) | h, g \in M;\ \alpha = \frac{1}{2},\ 1\right\} \quad (h-h = 0 \in M')$$

и

$$\hat{M} = \{h \pm q \,|\, h \in M,\ q \in M'\} \quad (V \supseteqq \hat{M} \supseteqq M).$$

Пусть в $2M'$ введена метрика ϱ' и упорядочение $\leqq'$ с помощью нульевого элемента, со свойством согласованности, и свойством справнимости монотонных сходящихся (по ϱ') последовательностей со своими пределами; и пусть ϱ и ϱ', $\leqq$ и $\leqq'$ эквивалентны, т. е.

$$a \leqq b \Leftrightarrow a-b \leqq' 0; \quad \varrho(a, b) = \varrho'(a-b, 0) = \|a-b\| \quad (\forall a, b \in M).$$

Упорядочение между элементами $h \in M$ и $a+q \in \hat{M}$ вводим по формуле

$$h \lesseqqgtr a+q \Leftrightarrow h-a \lesseqqgtr' q,$$

а для $a_1+q_1, a_2+q_2 \in \hat{M}$ порядок определяется формулой

$$a_1+q_1 \lesseqqgtr a_2+q_2 \Leftrightarrow a_1-a_2 \lesseqqgtr' q_2-q_1.$$

Пусть наконец M обладает свойством

$$[h_1 \leqq g,\ g \leqq h_2\ (h_1, h_2 \in M;\ g \in \hat{M})] \Rightarrow g \in M. \tag{2}$$

Вернемся к уравнению (1). При наших условиях существует единственное решение этой задачи (в дальнейшем всюду будем обозначать его через y). Пусть B есть оператор: $M \times M \to 2M'$, причем

$$\|B(h, g)\| \leqq \Theta \|h-g\| \quad (0 < \Theta < 1,\ \Theta = \text{const}),$$

и пусть B не возрастает по h, а по g пусть неубывает. Введем операторы $F(h, g)$, $\Phi(h, g)$ по формулам:

$$F(h, g) = \frac{1}{2}(Ah+Ag)+\frac{1}{2}B(h, g),$$

$$\Phi(h, g) = \frac{1}{2}(Ah+Ag)-\frac{1}{2}B(h, g)$$

$$(F, \Phi\colon\ M \times M \to \hat{M}).$$

*) Это условие можно было бы более коротким условием — о выпуклости M — заменить, если из $\alpha_n \to \alpha$ следовало бы

Пусть F не возрастает по h и не убывает по g; а Φ неубывает по h и не возрастает по g.

Мы будем говорить, что последовательности $\{a_p\}$, $\{b_p\}$ обладают свойством (A) в M, если все $a_p, b_p \in M$, кроме того для них и решения y задачи (1) имеет место

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq y \leqq \ldots \leqq b_2 \leqq b_1, \\ a_p, b_p \xrightarrow{\varrho} y \quad (p \to \infty). \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если существуют такие элементы* $z_1, w_1 \in M$, *для которых*

(i) $z_2 = F(z_1, w_1)$ *и* $w_2 = \Phi(z_1, w_1)$ *принадлежат* M,

(ii) $z_2 \leqq z_1$, $w_1 \leqq w_2$,

(iii) $F(z_2, w_2) \leqq z_1$, $w_1 \leqq \Phi(z_2, w_2)$,

тогда подпоследовательности $\{w_{2l-1}\}$, $\{z_{2l-1}\}$; $\{z_{2l}\}$, $\{w_{2l}\}$ $(l=1, 2, \ldots)$ *последовательностей* $\{z_p\}$, $\{w_p\}$, *построенных по закону*

$$\text{(3)} \qquad z_{p+1} = F(z_p, w_p), \quad w_{p+1} = \Phi(z_p, w_p) \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

обладают свойством (A) *в* M.

Доказательство. 1. Покажем, что все z_p, w_p принадлежат M. По предположению $z_1, z_2, w_1, w_2 \in M$, а поскольку

$$z_2 \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_2$$

то, в силу монотонности F и Φ получаем:

$$\text{(4)} \qquad z_2 \leqq z_3, \quad w_3 \leqq w_2,$$

а эти неравенства, поскольку в силу условия (iii)

$$\text{(5)} \qquad z_3 \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_3 \quad (z_3, w_3 \in \hat{M}),$$

дают

$$\text{(6)} \qquad z_2 \leqq z_3 \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_3 \leqq w_2.$$

Из (6) в силу свойства (2) получаем, что $z_3, w_3 \in M$.

Приближения z_4, w_4 мы теперь можем вычислить по закону (3). Учитывая монотонность F, Φ, из неравенств

$$\text{(7)} \qquad z_2 \leqq z_3, \quad w_3 \leqq w_2$$

получаем, что

$$\text{(8)} \qquad z_4 \leqq z_3, \quad w_3 \leqq w_4,$$

аналогично из неравенств

$$(9) \qquad z_3 \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_3$$

вытекает в силу монотонности F и Φ, что

$$(10) \qquad z_2 \leqq z_4, \quad w_4 \leqq w_2.$$

Неравенства (8) и (10) вместе дают

$$(11) \qquad z_2 \leqq z_4 \leqq z_3, \quad w_3 \leqq w_4 \leqq w_2 \quad (z_4, w_4 \in \hat{M}).$$

В силу свойства (2) отсюда заключаем, что $z_4, w_4 \in M$.

Совершенно так же можно (по индукции) показать, что все $z_p, w_p \in M$ $(p=1, 2, \ldots)$ и что справедливы неравенства типа (6), (11) при $l=1, 2, \ldots$

$$(12) \qquad \begin{cases} z_{2l} \leqq z_{2l+2} \leqq z_{2l+1}, & z_{2l} \leqq z_{2l+1} \leqq z_{2l-1}, \\ w_{2l+1} \leqq w_{2l+2} \leqq w_{2l}, & w_{2l-1} \leqq w_{2l+1} \leqq w_{2l}, \end{cases}$$

из которых вытекает, что

$$(13) \qquad w_{2l-1}\nearrow, \; z_{2l-1}\searrow; \quad z_{2l}\nearrow, \; w_{2l}\searrow \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

2. Покажем, что последовательности в (13) фундаментальны. Очевидно, что

$$(14) \qquad \|z_{p+1}-w_{p+1}\| = \|B(z_p, w_p)\| \leqq \Theta \|z_p-w_p\| \leqq \Theta^p \|z_1-w_1\| \to 0 \quad (p \to \infty)$$

и что при любых l, k натуральных

$$(14) \qquad \|z_{p+1}-w_{p+1}\| = \|B(z_p, w_p)\| \leqq \Theta \|z_p-w_p\| \leqq \Theta^p \|z_1-w_1\| \to 0 \quad (p \to \infty)$$

и что при любых l, k натуральных

(15)

Покажем справедливость отношений (15) например для элементов с четным индексом (второе соотношение, для нечетных индексов совершенно так же доказывается). Заметим, что

$$z_{2k}-w_{2k} = B(z_{2k-1}, w_{2k-1}),$$

откуда, поскольку

$$z_{2k-1}\searrow, \; w_{2k-1}\nearrow$$

и B невозрастает по первому аргументу, а по второму не убывает, получаем, что

$$z_{2k}-w_{2k}\nearrow, \quad \text{т. е.} \quad z_{2k}-w_{2k} \leqq' z_{2(k+1)}-w_{2(k+1)} \leqq' \ldots,$$

а по (14)

$$z_{2k}-w_{2k} \overset{\|\,\|}{\to} 0 \quad (k \to \infty).$$

Из последних двух соотношений получаем, что

$$z_{2k}-w_{2k} \leqq' 0, \quad \text{т. е.} \quad z_{2k} \leqq w_{2k},$$

а отсюда, поскольку $\{z_{2k}\}\nearrow$, вытекает, что

$$z_{2l} \leqq z_{2k} \leqq w_{2k} \quad (l \leqq k).$$

В случае $l>k$ можем воспользоваться тем, что $\{w_{2k}\}\searrow$, и значит

$$z_{2l} \leqq w_{2l} \leqq w_{2k}.$$

Формулы (15) доказаны.

Докажем теперь, что последовательность $\{z_{2k}\}$ фундаментальна (для остальных трех подпоследовательностей (13) совершенно так же можно это показать).

Последовательность $\{z_{2k}\}$ не убывает, поэтому в силу (15), (14) и согласованности упорядочения и метрики при любых m и n $(m>n)$ имеем:

$$z_{2n} \leqq z_{2m} \leqq w_{2n}, \quad \|z_{2m}-z_{2n}\| \leqq \|w_{2n}-z_{2n}\| \leqq \Theta^{2n-1}\|z_1-w_1\|,$$

откуда вытекает фундаментальность $\{z_{2k}\}$.

3. Покажем, что последовательности (13) сходятся к решению y задачи (1). В силу полноты M существуют пределы (по норме)

$$\lim_{k\to\infty} z_{2k} = h, \quad \lim_{k\to\infty} w_{2k} = g \quad (h,\, g\in M),$$

причем $h=g$, поскольку

$$\|h-g\| \leqq \|h-z_{2k}\|+\|z_{2k}-w_{2k}\|+\|w_{2k}-g\| \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Аналогично можно показать, что

$$z_{2l-1},\ w_{2l-1} \xrightarrow{\|\ \|} \tilde{h}\in M.$$

Покажем, что $h=\tilde{h}$. Для этого перейдем к пределу при $p\to\infty$ в формуле

$$z_{p+1} = F(z_p, w_p)$$

сначала по p четным, а потом по p нечетным. Оператор A сжатие, потому он непрерывен (относительно метрики), далее $\|B(z_p, w_p)\|\to 0$ $(p\to\infty)$, поэтому после упомянутых предельных переходов получаем

$$\tilde{h} = Ah, \quad h = A\tilde{h},$$

откуда

$$\varrho(\tilde{h}, h) = \varrho(Ah, A\tilde{h}) \leqq \Theta\varrho(\tilde{h}, h) \quad (0<\Theta<1,\ \Theta = \mathrm{const}),$$

т. е. $\tilde{h}=h=y$, что и требовалось доказать. Доказанная теорема имеет много применений (см. об этом [7]).

II.

Рассмотрим краевую задачу

$$\text{(16)}\qquad \begin{cases} y^{(n)}(x) = f[y] \equiv f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) & (0\leqq x\leqq 1,\ n\geqq 2), \\ L_i y = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\big(a_{ik}y^{(k)}(0)+b_{ik}y^{(k)}(1)\big) = 0 & (i=0, \ldots, n-1) \end{cases}$$

с заданной непрерывной непрерывно дифференцируемойп о $u_0, \ldots, u_{n-1}$ функцией

$$f(x, u_0, \ldots, u_{n-1})\colon [0, 1]\times R\times\ldots\times R \to R, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| \leqq N \quad (i=0, \ldots, n-1)$$

и с такими постоянными a_{ik}, b_{ik}, чтобы задача

$$y^{(n)}(x) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1;\ n \geqq 2), \quad L_i y = 0 \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

имела лишь тривиальное решение $y \equiv 0$.

Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$y = y(x) = Ay = \int_0^1 G(x, t) f[y(t)]\, dt$$

(где G есть функция Грина) в линейном пространстве M, $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих краевым условиям. Введем упорядочение и метрику в M по формулам:

$$(17) \qquad \begin{cases} z \leqq w \Leftrightarrow z^{(i)}(x) \leqq w^{(i)}(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1;\ i = 0, \dots, n-1), \\ \varrho(z, w) = \|z - w\| = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \max\limits_{[0,1]} |z^{(i)}(x) - w^{(i)}(x)|. \end{cases}$$

Предположим, что выполнено условие

$$(18) \qquad N \sum_{i=0}^{n-1} \max_{[0,1]} \int_0^1 \left| \frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i} \right| dt = \Theta < 1,$$

которое обеспечивает, что A сжато отображает M в M. В конце работы мы покажем, что для задачи (16) существует функция $\tilde{G}(x, t)$ $(0 \leqq x, t \leqq 1)$, $(n-2)$-раза непрерывно дуфференцируемая по x в каждом из секторов $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$, $0 \leqq t \leqq 1$; причем в точках линий $x = x_j$ $(j = 0, \dots, m)$ существуют только односторонние производные порядка $i = 0, \dots, n-1$, где

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m = 1$$

некоторые числа $\left(\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}}{\partial x^{n-1}}\right.$ непрерывна в каждом из секторов $x_j \leqq x \leqq x_{j+1}$, $t \geqq x$ соотв. $x \geqq t$, но в точках линии $x = t$ одностронние производные $\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}}{\partial x^{n-1}}$ не обязательно совпадают; а односторонние производные $\frac{\partial^i \tilde{G}}{\partial x^i}$ $(i \leqq n-2)$ в точках линии $x = x_j$ могут не совпадать). Для построенной нами функции $\tilde{G}$ выполняются неравенства

$$(19) \qquad N \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in \widetilde{[0,1]}} \int_0^1 \left| \frac{\partial^i \tilde{G}(x, t)}{\partial x^i} \right| dt = \Theta_1 < 1 \quad \left(\widetilde{[0, 1]} = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{m} x_j \right),$$

$$(20) \qquad \frac{\partial^i \tilde{G}(x, t)}{\partial x^i} \leqq - \left| \frac{\partial^i G(x, t)}{\partial x^i} \right| \quad (i = 0, \dots, n-1;\ x \neq x_0, \dots, x_m).$$

Подчеркиваем, что в задаче (16) мы не требуем знакопостоянности ни самой функции G, ни ее производных.

Введем теперь и линейное пространство Z функций $(n-1)$-раз непрерывно дифференцируемых на множестве $\bigcup_{j=0}^{m-1}[x_j+0, x_{j+1}-0]$ (в самих точках x_j мы требуем существование односторонних производных порядка $i=0, \dots, n-1$). Введем упорядочение и метрику в Z по формулам:

$$z \leqq w \Leftrightarrow \begin{cases} z^{(i)}(x) \leqq w^{(i)}(x) \quad (x \in \bigcup_{j=0}^{m-1}(x_j, x_{j+1})), \\ z^{(i)}(x_j+0) \leqq w^{(i)}(x_j+0), \\ z^{(i)}(x_{j+1}-0) \leqq w^{(i)}(x_{j+1}-0), \\ (i=0, \dots, n-1;\ j=0, \dots, m-1), \end{cases} \tag{21}$$

$$\varrho(z, w) = \|z-w\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in \widetilde{[0,1]}} |z^{(i)}(x) - w^{(i)}(x)|. \tag{22}$$

Очевидно, что $Z \supset M$ и что Z полно относительно метрики, более того метрика и упорядочение согласованы, члены монотонных сходящихся последовательностей сравнимы со своими пределами.

Пусть в дальнейшем $\tilde{A}$ (расширение оператора A на Z) и $\tilde{B}$ обозначают следующие операторы, переводящие Z, соотв. $Z \times Z$ в Z:

$$\begin{cases} \tilde{A}z = \int_0^1 G(x,t) f[z(t)]\,dt = \sum_{i=1}^{s-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x,t) f[z(t)]\,dt + \int_{x_s}^{x} G(x,t) f[z(t)]\,dt + \\ + \int_x^{x_{s+1}} G(x,t) f[z(t)]\,dt + \sum_{i=s+1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x,t) f[z(t)]\,dt, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \tilde{B}(z,w) = N \int_0^1 \tilde{G}(x,t) \Delta_{z,w}(t)\,dt = N \Big\{ \sum_{i=0}^{s-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{G}(x,t) \Delta_{z,w}(t)\,dt + \\ + \int_{x_s}^{x} \tilde{G}(x,t) \Delta_{z,w}(t)\,dt + \int_x^{x_{s+1}} \tilde{G}(x,t) \Delta_{z,w}(t)\,dt + \sum_{i=s+1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{G}(x,t) \Delta_{z,w}(t)\,dt \Big\}, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Delta_{z,w}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} [z^{(i)}(t) - w^{(i)}(t)].$$

Отметим, что $\tilde{B}$ не возрастает по z и не убывает по w. Очевидно, что операторы F и Φ определенные на $Z \times Z$, действующие по формулам:

$$F(z,w) = \frac{1}{2}(\tilde{A}z + \tilde{A}w) + \frac{1}{2}\tilde{B}(z,w), \tag{25}$$

$$\Phi(z,w) = \frac{1}{2}(\tilde{A}z + \tilde{A}w) - \frac{1}{2}\tilde{B}(z,w), \tag{26}$$

переводят $Z\times Z$ в Z. Легко показать, используя формулы (20), что F не возрастает по z и не убывает по w, а Φ не убывает по z и не возрастает по w.

Используя неравенство (19), нетрудно убедиться в том, что оператор $\tilde{A}$ сжато отображает Z в Z, поэтому уравнение $\tilde{A}z=z$ в пространстве Z имеет единственное решение $z=z(x)$. Однако сужение метрики, введенной в Z, на M совпадает с исходной метрикой M а $\tilde{A}|_M=A$ сжато отображает (относительно этой исходной метрики) M в M, и поэтому функция $z=z(x)$ совпадает с единственным решением $y=y(x)$ задачи (16). Справедлива следующая

Теорема 2. *Если существуют такие функции $z_1, w_1\in Z$, для которых*

$$\text{(i)} \qquad z_2 = F(z_1, w_1) \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_2 = \Phi(z_1, w_1),$$

$$\text{(ii)} \qquad z_3 = F(z_2, w_2) \leqq z_1, \quad w_1 \leqq w_3 = \Phi(z_2, w_2)\ ^{*)},$$

тогда подпоследовательности $\{w_{2l-1}\}$, $\{z_{2l-1}\}$; $\{z_{2l}\}$, $\{w_{1l}\}$ ($l=1, 2, \ldots$) последовательностей $\{z_p\}$, $\{w_p\}$, построенных по закону

$$z_{p+1} = F(z_p, w_p), \quad w_{p+1} = \Phi(z_p, w_p) \quad (p = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

обладают свойством (A) в пространстве Z (таким образом и односторонние производные $z_p^{(i)}(x_j\pm 0)$, $w_p^{(i)}(x_j\pm 0)$ ($i=0, \ldots, n-1; j=0, \ldots, m$) сходятся к одному и тому же пределу, именно к $y^{(i)}(x_j)$).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, используя монотонность F и Φ, легко доказать неравенства

$$\begin{cases} z_{2l} \leqq z_{2l+2} \leqq z_{2l+1}, & z_{2l} \leqq z_{2l+1} \leqq z_{2l-1}, \\ w_{2l+1} \leqq w_{2l+2} \leqq w_{2l}, & w_{2l-1} \leqq w_{2l+1} \leqq w_{2l}, \end{cases} \tag{28}$$

при $l=1, 2, \ldots$; из которых вытекает, что

$$w_{2l-1}\nearrow, \ z_{2l-1}\searrow; \ z_{2l}\nearrow, \ w_{2l}\searrow \quad (l = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Эти монотонные последовательности функций ограничены, значит сходятся к некоторому элементу Z, но поскольку

$$\|z_{2l-1}-w_{2l-1}\|, \quad \|z_{2l}-w_{2l}\| \to 0 \quad (l \to \infty),$$

можно утвержать, что

$$\lim_{l\to\infty} z_{2l-1} = \lim_{l\to\infty} w_{2l-1} = \tilde{y}; \quad \lim_{l\to\infty} z_{2l} = \lim_{l\to\infty} w_{2l} = \tilde{\tilde{y}}.$$

Перейдем теперь к пределу при $p\to\infty$ в формулах (27), сначала по p четным, потом по p нечетным. Учитывая непрерывность $\tilde{A}$, вытекающую из того, что $\tilde{A}$ сжатие, получаем

$$\tilde{\tilde{y}} = \tilde{A}\tilde{y}, \quad \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{\tilde{y}},$$

откуда

$$\varrho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) = \varrho(\tilde{A}\tilde{\tilde{y}}, \tilde{A}\tilde{y}) \leqq \Theta\varrho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) \quad (0 < \Theta < 1),$$

---

*) Можно показать, что если левая часть в условии сжатости (18) меньше чем $\frac{1}{2}$, то функции z_1, w_1, удовлетворяющие (одновременно) условиям (i), (ii) существуют.

значит

$$\tilde{y} = \tilde{\tilde{y}}, \quad \tilde{y} = A\tilde{y}.$$

Итак, предельная функция $\tilde{y}$ является элементом пространства M, т. е. $\tilde{y}$ совпадает с решением y задачи (16). Теорема доказана.

Теперь можем сформулировать обобщение теорем 1 и 2.

Вернемся к уравнению (1). Предположим, что имеется полное метрическое, частично упорядоченное множество $\tilde{M} \supset M$, с метрикой $\tilde{\varrho}$ и, упорядочением $\tilde{\leqq}$ ($\tilde{\varrho}$ и $\tilde{\leqq}$ обладают всеми свойствами ϱ и $\leqq$), обладающее всеми свойствами M; кроме того, пусть $\tilde{\varrho}$ и $\tilde{\leqq}$ являются продолжением ϱ и $\leqq$, т. е. для любых $h, g \in M$

$$\varrho(h, g) = \tilde{\varrho}(h, g); \quad h \leqq g \Leftrightarrow h \mathrel{\tilde{\leqq}} g.$$

Допустим, что оператор A имеет продолжение $\tilde{A}$, сжато отображающее (относительно $\tilde{\varrho}$) $\tilde{M}$ в $\tilde{M}$. Пусть имеется у нас оператор $\tilde{B}$: $\tilde{M} \times \tilde{M} \to 2\tilde{M}'$ (см. разд. I), причем для любых двух $\tilde{h}, \tilde{g} \in \tilde{M}$

$$\|\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}\|^{\sim} = \tilde{\varrho}(\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}), 0) \leqq \Theta_1 \|\tilde{h} - \tilde{g}\|^{\sim} \quad (0 < \Theta_1 < 1),$$

$\tilde{B}$ не возрастает по первому и не убывает по второму аргументу. Введем операторы

$$\tilde{F}(\tilde{h}, \tilde{g}) = \frac{1}{2}(\tilde{A}\tilde{h} + \tilde{A}\tilde{g}) + \frac{1}{2}\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}),$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{h}, \tilde{g}) = \frac{1}{2}(\tilde{A}\tilde{h} + \tilde{A}\tilde{g}) - \frac{1}{2}\tilde{B}(\tilde{h}, \tilde{g}).$$

Пусть $\tilde{F}$ не возрастает по $\tilde{h}$ и не убывает по $\tilde{g}$, а $\tilde{\Phi}$ наоборот.

Задача (1) при наших условиях имеет единственное решение $\tilde{y} \in \tilde{M}$ (в самом деле $\tilde{y} \in M$). Двусторонние приближения (относительно $\tilde{\leqq}$) к $\tilde{y}$ мы будем строить, исходя из некоторых $\tilde{z}_1, \tilde{w}_1 \in \tilde{M}$ по формуле:

$$\tilde{z}_{p+1} = \tilde{F}(\tilde{z}_p, \tilde{w}_p), \quad \tilde{w}_{p+1} = \tilde{\Phi}(\tilde{z}_p, \tilde{w}_p) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

При этих условиях имеет место:

Теорема 3. *Если существуют такие элементы $\tilde{z}_1, \tilde{w}_1 \in \tilde{M}$, для которых выполняются условия* (i), (ii), (iii) *теоремы* 1 *в* $\tilde{M}$, *то подпоследовательности* $\{w_{2l-1}\}$, $\{z_{2l-1}\}$; $\{z_{2l}\}$, $\{w_{2l}\}$ *обладают свойством* (A) *в* $\tilde{M}$.

Доказательство почти совпадает с доказательством теоремы 2 имеются лищь следующе различия. В этом случае надо обеспечить отдельным условием, чтобы все $\tilde{z}_p$, $\tilde{w}_p$ принадлежали $\tilde{M}$ (это как раз условия (i), (iii) и (2)), кроме того, для доказательства фундаментальности $\{z_p\}$, $\{w_p\}$ надо провести рассуждения части 2. доказательства теоремы 1.

Теорема 3. может быть применена к общей задаче (16) с правой частью $f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, определенной лишь в конечном брусе $[0, 1] \times [-K, K] \times \ldots \ldots \times [-K, K]$ $(K > 0)$.

О построении функции $\tilde{G}$.

Предположим, что нам надо решить задачу (16) при условиях, описанных в начале части II. работы. В конкретной ситуации у нас имеется фиксированная функция f, удовлетворяющая условию (18). Возьмем теперь число $\frac{1}{2}(1-\Theta)$. Мы построим такую функцию $\tilde{G}$ с требуемой гладкостью, для которой выполняются неравенства

$$-\left|\frac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i}\right|-\varepsilon \leqq \frac{\partial^i \tilde{G}(x,t)}{\partial x^i} \leqq -\left|\frac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i}\right| \quad (i=0, \dots, n-2),$$

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{G}(x,t)}{\partial x^{n-1}} = -\left|\frac{\partial^{n-1} G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|,$$

а значит и условие (19) выполняется, если

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{2}(1-\Theta)\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Функция Грина задачи $y^{(n)}=f$, $L_i y=0$ $(i=0, \dots, n-1)$ соответствующая задаче (16), есть

$$G(x,t)=\begin{cases} A_{n-1}(t)x^{n-1}+\dots+A_0(t) & x \leqq t, \\ B_{n-1}(t)x^{n-1}+\dots+B_0(t) & x \geqq t. \end{cases}$$

Введем теперь вспомогательные функции $z_*(x,t)$ и $z^*(x,t)$, определенные для значений (x,t) из нижнего соотв. верхнего треугольников ($x \geqq t$, соотв. $x \leqq t$) квадрата $0 \leqq x$, $t \leqq 1$, исходя из точки (x_0, t):

$$z_*(x,t),\ z^*(x,t) =$$

$$= -\left|\left.\frac{\partial^{n-1} G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{(x_0,t)}\right|\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\left|\left.\frac{\partial^i G(x,t)}{\partial x^i}\right|_{(x_0,t)}\right|\right],$$

или более подробно:

$$z_*(x,t) = -|B_{n-1}(t)|(x-x_0)^{n-1}- \tag{30}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\left|\sum_{j=i}^{n-1} B_j(t)x_0^{j-i}\cdot j(j-1)\dots(j-i+1)\right|\right] \quad (x>x_0),$$

$$z^*(x,t) = -|A_{n-1}(t)|(x-x_0)^{n-1}- \tag{31}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\left|\sum_{j=i}^{n-1} A_j(t)x_0^{j-i}\cdot j(j-1)\dots(j-i+1)\right|\right] \quad (x<x_0).$$

Вычислим теперь производные порядка k $(0 \leqq k \leqq n-2)$ по x от функций z_* и z^*. Они являются полиномами относительно $(x-x_0)$ с коэффициентами, не превосходящими по модулю некоторого числа $K>0$, с постоянным членом

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,t)}\right| = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon}{2}-\left|\sum\limits_{j=k}^{n-1} B_j(t)x_0^{j-k}\cdot j(j-1)\dots(j-k+1)\right| & x_0\geqq t,\\ -\dfrac{\varepsilon}{2}-\left|\sum\limits_{j=k}^{n-1} A_j(t)x_0^{j-k}\cdot j(j-1)\dots(j-k+1)\right| & x_0\leqq t.\end{cases}$$

Поэтому если мы строим $z_*(x,t)$ и $z^*(x,t)$ для точек линии $t=\text{const.}$ вправо соотв. и влево от точки (x_0,x_0), то из известных свойств функции Грина G вытекает, что все производные k-го порядка $(0\leqq k\leqq n-2)$ от z_* и z^* по x в точке (x_0,x_0) совпадают, они равны только что выписанному постоянному члену при $t=x_0$, и поэтому и неравенство

$$-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|-\varepsilon<\frac{\partial^k z_*(x,t)}{\partial x^k},\ \frac{\partial^k z^*(x,t)}{\partial z^k}<-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|\quad(0\leqq k\leqq n-2)$$

обеспечено в точке (x_0,x_0). Поскольку k-ая производная от z_*, z^* в точке (x_0,x_0) есть

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,x_0)}\right|,$$

то в силу равномерной непрерывности $\left|\dfrac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|$ $(0\leqq k\leqq n-2)$ по (x,t) и того, что коэффициенты полинома для k-ой производной от z_* и z^* по модулю не превосходят некоторого числа $K>0$, неравенство

$$-\varepsilon-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|\leqq\frac{\partial^k z_*(x,t)}{\partial x^k},\ \frac{\partial^k z^*(x,t)}{\partial x^k}\leqq-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|\quad(0\leqq k\leqq n-2)$$

сохраняется и при всех тех значениях x (при строении z_* и z^* для точек линии $t=\text{const.}$, исходя из точки (x_0,x_0)), для которых

$$|x-x_0|<\delta_1,$$

где $\delta_1>0$ некоторая универсальная постоянная для всех только что упомянутых (в скобках) строений.

Аналогичные рассуждения показывают, что при строении z_* по формуле (30) для точек линии $t=\text{const.}$, лежащих направо от точки (x_0,t); соотв. при строении z^* по формуле (31) для точек линии $t=\text{const.}$, лежащих налево от точки (x_0,t) неравенства

$$-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|-\varepsilon<\frac{\partial^k z_*(x,t)}{\partial x^k},\ \frac{\partial^k z^*(x,t)}{\partial z^k}<-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\right|\quad(0\leqq k\leqq n-2)$$

сохраняются при всех x, для которых $|x-x_0|<\delta_2$, где $\delta_2>0$ универсальная постоянная для всех этих строений, поскольку

$$\frac{\partial^k z_*(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,t)}=-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,t)}\right|-\frac{\varepsilon}{2}\quad(x_0>t),$$

$$\frac{\partial^k z^*(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,t)}=-\left|\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}\bigg|_{(x_0,t)}\right|-\frac{\varepsilon}{2}\quad(x_0<t).$$

Из формул (30), (31) сразу видно, что

$$\frac{\partial^{n-1} z_*(x, t)}{\partial x^{n-1}} = -(n-1)!\,|B_{n-1}(t)| = -\left|\frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}}\right| \quad (x \geqq t),$$

$$\frac{\partial^{n-1} z^*(x, t)}{\partial x^{n-1}} = -(n-1)!\,|A_{n-1}(t)| = -\left|\frac{\partial^{n-1} G(x, t)}{\partial x^{n-1}}\right| \quad (x \leqq t).$$

Возьмем теперь число $\delta > 0$ $(\delta < \delta_1, \delta_2)$ и проведем конечное число прямых $x = x_i$ $(i = 0, \dots, m;\ x_0 = 0,\ x_m = 1)$ в квадрате $0 \leqq x,\ t \leqq 1$ так, чтобы $x_{i+1} - x_i \leqq \delta$ выполнялось для всех $i = 0, \dots, m-1$. Требуемую функцию $\tilde{G}(x, t)$ теперь уже легко построить отдельно в каждом из секторов $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ по следующему правилу. Данный сектор разбиваем на нижний и верхний прямоугольники $(t \leqq x_i$, соотв. $t \geqq x_{i+1})$ и квадрат $x_i \leqq x,\ t \leqq x_{i+1}$, состоящий из нижнего и верхнего подтреугольника. В нижнем прямоугольнике $\tilde{G}(x, t)$ определяем формулой (30), исходя из точек отрезка $x = x_i$ $(t \leqq x_i)$ направо, а в верхнем прямоугольнике формулой (31), исходя из точек отрезка $x = x_{i+1}$ $(t \geqq x_{i+1})$ налево. Далее, в нижнем подтреугольнике $\tilde{G}$ определяем формулой (30), а в верхнем подтреугольнике формулой (31).

Отметим, что во многих случаях (например при $n=2$) можно построить функцию $\tilde{G}$ более простого вида, чем вышеописанная. Для задачи в [5], например, можно взять $\tilde{G} = G$ при $x \leqq t$, а в треугольнике $x \geqq t$ в полосах $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ ширины $\delta \leqq \varepsilon = \frac{1-\Theta}{2} \cdot \frac{1}{N+1}$ прямолинейные образующие поверхности $z = G(x, t)$ нужно направить под противоположным углом наклона из точек $(x_0, t, G(x_0, t))$ $(x_0 \geqq t)$.

Приведенные методы применимы и для решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и решения задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также для решения некоторых функционально-дифференциальных уравнений.

Литература

[1] W. Walter, Differential- und Integral-Ungleichungen, Springer—Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg—New York 1964.

[2] A. Averna, Studio con un procedimento di quasilinearizzatione del problema:
$$\begin{cases} u^{(\mathrm{IV})} = f(x, u, u', u'', u'''), \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u(a) = u'(a) = 0, \end{cases}$$
Matematiche (Catania), **24** (1969), 66—91.

[3] V. Lakshmikantham—S. Leela, Differential and integral inequalities, Volume 1, 2; Academic Press *New York—London*, 1962.

[4] Т. Аманкулов, Приближенное решение систем интегро-дифференциальных уравнений с помощью мажорантно-минорантных функций; *Изв. вузов, матем.*, **40** (70): 1968, 6—12.

[5] Ю. И. Ковач—Л. И. Савченко, Решение одной краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго подядка, Укранский Математический Журнал, **20**: 1 (1968), 34—44.

[6] Ю. И. Ковач—J. Hegedűs, Об одном двустороннем итерационном методе решения краевой задачи с запаздыванием; *Acta Sci. Math.*, **36** (1974), 69—89.

[7] J. Hegedűs, On a two-sided iterative method, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **15** Differential Equations, *Keszthely* (Hungary) 1975, 277—290.

(Поступила: 17. IX. 1975)