Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt III.

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Herrn Professor BÉLA BARNA zum 70. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung. In der Arbeit werden die Verschärfungen, die Fehlerabschätzungen, die Konvergenzfaktoren und einige numerische Beispiele für die in [25] beschriebenen, quadratisch konvergenten Verfahren der Berührungskegelschnitte zur Lösung nichtlinearer Gleichungen angegeben. In einem Intervall $[a, b]$ sind die Verfahren in gewissem Sinne stets konvergent, ohne die Gültigkeit von $f(a) \cdot f(b) \leqq 0$ vorauszusetzen, und ohne intervallarithmetische Hilfsmittel zu brauchen.

Abstract. The present paper gives the sharpenings, the errors, the asymptotic error constants and several numerical examples of the second order iteration methods of tangential conic sections for solving nonlinear equations described in [25]. In a certain sense the procedures are always convergent in $[a, b]$ without using intervalarithmetics and without assuming $f(a) \cdot f(b) \leqq 0$.

Резюме. В работе даются усиления теорем касающихся итерационных методов касательных конических сечений [25] для решения нелинейных уравнений и находятся оценки ошибок и асимптотические константы ошибок. Применение методов иллюстрируется конкретными примерами. Эти процессы оптимальны в смысле [27] и порядок их сходимости два. Эти методы всегда сходятся в промежутке $[a, b]$ в смысле определяемом в работе, и определение даётся таким образом, что нет нужды в применении интервальной арифметики и в принятии предположения $f(a) \cdot f(b) \leqq 0$.

Einleitende Bemerkungen

Die stationären und sich auf einen Punkt stützenden Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

mit der *Iterationsfunktion* F zur Lösung $f(x)=0$ haben die Eigenschaft (21) (s. [25]). Im Falle $\mathrm{Eff}=1$ wird die Iteration (22) (bzw. ihre Iterationsfunktion F) *optimal* genannt [27]. Ist (22) von der Ordnung p, so wird der Grenzwert

$$C = \lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p}, \quad (x_n \to \alpha)$$

als *Konvergenzfaktor* (oder asymptotische Fehlerkonstante) von (22) genannt. Unter den Iterationsverfahren (22) hat die Newton—Raphson'sche (kurz NR) Iterationsmethode mit der Iterationsfunktion

$$F_{NR}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

eine große Bedeutung. Diese quadratische und optimale Iteration wurde in mehreren Richtungen erweitert, verallgemeinert und modifiziert (z. B. [1, 2, 7, 9, 10, 13, 15—20, 22—24, 27, 28]). Die wohl bekannte „modifizierte Newton-Methode" steht vermöge ihres Wesens den Untersuchungen dieser Arbeit sehr nahe [22, 23, 27].

Existiere eine reelle Konstante $M_1>0$ mit $|f'(x)|\leqq M_1$, $x\in I=[a,b]$, dann konvergiert die von $x_0\in I$ $(f(x_0)\neq 0)$ ausgehende und monoton abnehmende Iterationsfolge

$$x_{n+1}=x_n-\frac{|f(x_n)|}{M_1},\quad n=0,1,\ldots$$

gegen die links von x_0 nächstliegende Nullstelle $\alpha\in I$ von f, falls die Funktion f mindestens eine Nullstelle in $[a, x_0]$ hat, und die Iterationsfolge verläßt die Strecke I im entgegengesetzten Falle. (Für die Iteration

$$x_{n+1}=x_n+\frac{|f(x_n)|}{M_1},\quad n=0,1,\ldots$$

kann eine ähnliche Behauptung in $[x_0, b]$ ausgesagt werden.) Das Verfahren ist in I stets (d. h. für beliebiges $x_0\in I$) konvergent. Der „Preis" für diese vorteilhafte Eigenschaft bei der Modifikation der NR-Methode ist *das Abnehmen der Konvergenzordnung* $(p=1)$.

In den letzteren 10—12 Jahren wurden zahlreiche Iterationsverfahren erarbeitet, die immer konvergent sind, z. B. [1—5, 13, 18—21]. Bei diesen Methoden wird am meisten die Intervallarithmetik als Hilfsmittel gebraucht. In vielen Fällen wird die Relation

$$f(a)\cdot f(b)\leqq 0 \tag{23}$$

vorausgesetzt. In dieser Arbeit werden auch *stets konvergente Iterationsverfahren* angegeben, die keine Intervallarithmetik benutzen, und bei denen keine Relation von der Gestalt (23) vorausgesetzt wird. Die Ergebnisse in dem Abschnitt 2 können zum Teil als Verschärfungen von [25] betrachtet werden. Außer den hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz beschäftigen wir uns mit den Fehlerabschätzungen und Konvergenzfaktoren, mit der Konvergenzordnung und mit der Informationseffektivität der stets konvergenten Iterationsverfahren der Berührungskegelschnitte. Die Verfahren werden auch an einigen numerischen Beispielen demonstriert.

Wir werden einige Bezeichnungen und Definitionen brauchen. Für die Fehlerabschätzungen werden die Bezeichnungen

$$e_n=\alpha-x_n \quad\text{und}\quad d_n=x_{n+1}-x_n$$

gebraucht. Die Bedingungen (2) werden folgenderweise aufgeschrieben.

(24) $\begin{cases}\text{Die Funktion } f\colon [a,b]=I\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ ist in } I \text{ zweimal differenzierbar,}\\ \text{und die Relationen } |f''(x)|\leqq M_2\neq 0,\end{cases}$

$$|f(x)|\leqq M, \tag{24.0}$$

$$|f'(x)|\leqq M_1\neq 0 \tag{24.1}$$

sind in I erfüllt.

Definition. Die mit der Funktion f verbundene Iterationsfunktion $F(x; r)$ und auch das entsprechende Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = F(x_n; r), \quad n = 0, 1, \dots \tag{25}$$

wird in I *stets konvergent* genannt, falls die aus dem Wert $x_0 \in I$, $f(x_0) \neq 0$ ausgehende und mit Hilfe (25) erhaltene Iterationsfolge $\{x_n\}$

1° monoton ist, und

2° gegen die rechts (bzw. links) von x_0 nächstliegende Nullstelle $\alpha \in I$ von f konvergiert, vorausgesetzt, daß der Wert des „Richtungsparameters" r im ganzen Laufe der Iteration auf konsequente Weise $+1$ (bzw. -1) gewählt wird;

3° wenn es keine Nullstelle $\alpha \in [x_0, b]$ (bzw. $\alpha \in [a, x_0)$) von f gibt, dann verläßt $\{x_n\}$ die Strecke I. Die Familie von Iterationsfunktionen mit diesen Eigenschaften wird mit $A(f, I)$ bezeichnet (A: class of *a*lways convergent iteration functions).

Mit Hilfe dieser Definition kann die Behauptung über das modifizierte NR-Verfahren folgendermaßen aufgeschrieben werden. Es gilt

$$F(x; r) = x + r \cdot \frac{|f(x)|}{M_1} \in A(f, I),$$

falls die Ungleichung $|f'(x)| \leqq M_1$ mit einer Konstante $M_1 > 0$ in I erfüllt ist.

Die Methoden der Berührungskegelschnitte

Die Methode der Berührungshyperbeln (TH) [1])

Das auf der Hyperbel $y = \pm c \cdot \sqrt{1+x^2}$, $c > 0$ basierte TH-Iterationsverfahren wird im Abschnitt 1 von [25] geschrieben. Der Satz 1 kann auf folgende Weise formuliert werden.

Satz 6. *Aus den Bedingungen* (24), (24.1) *und*

$$c^2 = 2M_1^2 + \frac{16}{3} M_2^2$$

folgt die Relation

$$F_{TH}(x; r) \in A(f, I),$$

wobei

$$F_{TH}(x; r) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} + r \cdot \sqrt{\left[\frac{|f(x)|}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}}\right]^2 - 1}$$

die Iterationsfunktion der Methode der Berührungshyperbeln ist.

[1]) Method of *t*angential *h*yperbolas

Die Methode der Berührungsparabeln (TP) [2])

Die mit den Parabeln $y=\pm c\cdot x^2, c>0$ verbundene TP-Methode beruht auf dem Lemma 2 [25]. Das Lemma kann aber nicht nur für $c=M_2$ und (2), sondern auch für $c=\frac{1}{2}M_2$ und (24) bewiesen werden. Aus den Bedingungen folgt nämlich die Existenz eines Wertes $\xi\in(x_0, x)$ mit

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

Deshalb kann die Differenz $D(x)=f(x)-p(x)$ mit Hilfe der Berührungsparabel (7) in der Form

$$D(x) = \left[\frac{1}{2}f''(\xi)+c\cdot\operatorname{sign}\left(f(x_0)\right)\right](x-x_0)^2$$

aufgeschrieben werden. Im Falle $c=\frac{1}{2}M_2$ ist der Wert von $D(x)$ nicht negativ (bzw. nicht positiv), falls $f(x_0)>0$ (bzw. $f(x_0)<0$) ist. Auf Grund von dieser Modifikation des Lemmas 2 kann schon eine Verschärfung des Satzes 2 ausgesagt werden, wie folgt.

Satz 7. *Gilt* (24), *so ist*

$$F_{TP}(x;r) = x+\operatorname{sign}\left(f(x_0)\right)\cdot\frac{f'(x)}{M_2}+r\cdot\sqrt{\frac{2|f(x)|}{M_2}+\left[\frac{f'(x)}{M_2}\right]^2}\in A(f, I).$$

Die Methode der Berührungsellipsen (TE) [3])

Das mit den Ellipsen $y=\pm c\cdot\sqrt{1-x^2}$, $c>0$, $|x|\leqq 1$ verknüpfte TE-Verfahren beruht auf dem Lemma 3 [25], das ein bißchen auch verschärft werden kann. Es ist nämlich überflüssig, im Lemma die Relation $c\geqq\frac{11}{5}M_1$ zu verlangen, weil die linke Seite von (11) immer nicht-negativ ist. Das folgt aus der Relation $M\leqq c$, d. h. aus der Tatsache, daß die Richtung der Verschiebung der Ellipse (im Fall $f(x_0)>0$) immer nicht-positiv ist:

$$f(x_0)-\frac{c^2}{\sqrt{c^2+f'^2(x_0)}}\leqq 0.$$

Die Verschärfung des Satzes 3 sieht also folgendermaßen aus.

[2]) Method of *t*angential *p*arabolas

[3]) Method of *t*angential *e*llipses

Satz 8. *Aus den Beziehungen* (24), (24.0) *und* $c=\max\{M, 2M_2\}$ *folgt die Relation*

$$F_{TE}(x;r) = x+\operatorname{sign}(f(x_0))\cdot\frac{f'(x)}{\sqrt{c^2+f'^2(x)}}+r\cdot\sqrt{1-\left[\frac{|f(x)|}{c}-\frac{c}{\sqrt{c^2+f'^2(x)}}\right]^2}\in A(f,I).$$

Bemerkung. Bei jeder Methode kann der Wert von c auch größer gewählt werden. Je größer der Wert von c ist, um so langsamer ist natürlich die Konvergenz des Verfahrens.

Die Fehlerschranken, Konvergenzordnungen, Informationseffektivitäten und Konvergenzfaktoren der Verfahren der Berührungskegelschnitte

Es seien

$$L_i \overset{\text{def}}{=} \frac{M_i}{m_1} \quad (i=1,2),$$

wobei m_1 eine reelle Konstante mit

$$0 < m_1 \leqq |f'(x)|, \quad x\in[x_0,\alpha]\subseteq I \tag{26}$$

ist. Für die TH-Methode gilt der

Satz 9. *Setzen wir voraus, daß es eine Konstante* m_1 *mit* (26) *gibt und die Bedingungen des Satzes* 6 *erfüllt sind, ferner daß die entsprechende Nullstelle* $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ *von* f *in* I *einfach ist. Dann kann der Fehler* e_{n+1} *des Näherungswertes* x_{n+1} *mit Hilfe* e_n *bzw.* d_n *folgendermaßen geschätzt werden:*

1° $|e_{n+1}| \leqq (N+L_2)\cdot|e_n|^2$,

2° $|e_{n+1}| \leqq NL_2|d_n|^3+(N+L_1L_2)\cdot|d_n|^2, \quad n=0,1,\dots$

wobei $N=N_H \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sqrt{c^2-m_1^2}}{2m_1}$ *ist.*

Beweis.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Es seien z. B. } f(x_0)>0 \text{ und } x_0<\alpha. \text{ Da } \alpha \text{ einfach}\\ \text{ist, gilt auch die Relation } f'(x)<0,\ x\in[x_0,\alpha].\\ \text{Setzen wir voraus, daß } f(x_n)\neq 0,\ n=0,1,\dots \text{ sind.}\end{array}\right. \tag{27}$$

(Gibt es irgendein n mit $f(x_n)=0$, so ist die Behauptung wegen $x_{n+1}=x_n=\alpha$ eine Trivialität.)

Es sei n eine beliebige, aber fixe natürliche Zahl. Die Nullstelle $x_{n+1}(>x_n)$ der zur Funktionskurve von f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ angeschmiegten Berührungshyperbel h kann mit Hilfe (3) aus der Gleichung

$$h(x_{n+1})=0 \tag{28}$$

bestimmt werden. Mit einer Umordnung von (28) erhalten wir

$$f(x_n) = c\cdot\left[\sqrt{1+(d_n+R)^2}-\sqrt{1+R^2}\right], \tag{29}$$

wobei

$$R=\frac{|g'|}{\sqrt{1-g'^2}}, \quad g'=\frac{f'(x_n)}{c}$$

sind. Andererseits gilt

$$e_{n+1}=e_n-d_n=-\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}-d_n, \tag{30}$$

da

$$0\neq f(\alpha)-f(x_n)=f'(\xi)\cdot e_n, \quad \xi\in(x_n,\alpha) \tag{31}$$

ist. Unter Berücksichtigung von (27), (29), (30) und der Ungleichung

$$\sqrt{1+(d_n+R)^2}+\sqrt{1+R^2}\geqq 2\sqrt{1+R^2}=\frac{2}{\sqrt{1-g'^2}}$$

kann der Wert von e_{n+1} auf solche Weise abgeschätzt werden:

$$0<e_{n+1}=\frac{-c}{f'(\xi)}\cdot\left[\sqrt{1+(d_n+R)^2}-\sqrt{1+R^2}\right]-d_n=$$

$$=\frac{c(d_n^2+2Rd_n)}{|f'(\xi)|\cdot\left[\sqrt{1+(d_n+R)^2}+\sqrt{1+R^2}\right]}-d_n\leqq\frac{\sqrt{c^2-f'^2(x_n)}}{2m_1}\cdot d_n^2+$$

$$+\left(\left|\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\right|-1\right)\cdot d_n\leqq Nd_n^2+\frac{f''(\eta)\cdot(\xi-x_n)}{|f'(\xi)|}\cdot d_n, \quad \eta\in(x_n,\xi).$$

Daraus folgt die Behauptung 1°, da

$$|d_n|\leqq|e_n| \quad \text{und} \quad |\xi-x_n|<|e_n| \tag{32}$$

gelten. Anderseits können wir mit der Anwendung des obigen Gedankenganges aufschreiben, daß

$$\xi-x_n<\frac{\sqrt{c^2-f'^2(x_n)}}{2m_1}\cdot d_n^2+\left|\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\right|\cdot d_n,$$

woraus sich die Ungleichung

$$\xi-x_n<Nd_n^2+L_1 d_n$$

ergibt. Deshalb kann die Behauptung 2° des Satzes bewiesen werden:

$$|e_{n+1}|\leqq Nd_n^2+\frac{M_2}{m_1}(Nd_n^2+L_1\cdot|d_n|)\cdot|d_n|.$$

Stimmt die Konvexität von f und h in (x_0,α) überein, d. h.

$$f(x_0)\cdot f''(x)\leqq 0, \quad x\in(x_0,\alpha), \tag{33}$$

so ist

$$\frac{f''(\eta)\cdot(\xi-x_n)}{|f'(\xi)|}\cdot d_n\leqq 0,$$

daraus folgt

$$|e_{n+1}| \leqq N|d_n|^2 \leqq N|e_n|^2.$$

In den anderen drei Fällen kann der Beweis ganz ähnlich durchgeführt werden.

Jetzt beweisen wir eine Behauptung über die Fehlerabschätzungen der TP-Methode.

Satz 10. *Es gebe eine Konstante m_1 mit (26), die Bedingungen des Satzes 7 seien erfüllt und die entsprechende Nullstelle $\alpha = \lim x_n (\in I)$ von f sei einfach. Dann gelten die Fehlerabschätzungen*

$$1^\circ \quad |e_{n+1}| \leqq \frac{3}{2} L_2 \cdot |e_n|^2$$

und

$$2^\circ \quad |e_{n+1}| \leqq \frac{1}{2} L_2^2 \cdot |d_n|^3 + L_2\left(L_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot |d_n|^2,$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Beweis. Wie oben, nehmen wir (27) an, schreiben wir ferner die Gleichung

$$p(x_{n+1}) = 0 \tag{34}$$

mit der Berührungsparabel (7) auf. Aus (34) ergibt sich die Gleichheit

$$f(x_n) = cd_n^2 - f'(x_n)\, d_n, \tag{35}$$

mit deren Hilfe (30) folgendermaßen geschätzt werden kann:

$$e_{n+1} \leqq \frac{cd_n^2 - f'(x_n)\, d_n}{-f'(\xi)} - d_n \leqq$$

$$\leqq \frac{c}{m_1} d_n^2 + \frac{f''(\eta)(\xi - x_n)}{|f'(\xi)|} \cdot d_n, \quad \xi \in (x_n, \alpha), \quad \eta \in (x_n, \xi).$$

Deshalb ist

$$|e_{n+1}| \leqq \frac{c}{m_1} d_n^2 + \frac{M_2}{m_1} (\xi - x_n) |d_n|,$$

und aus (32) erhält man die Behauptung 1°.

Anderseits folgen aus (31) und (35) die Ungleichungen

$$(0 <) \xi - x_n < e_n = \frac{cd_n^2 + |f'(x_n)|\, d_n}{|f'(\xi)|} \leqq \frac{1}{m_1} (cd_n^2 + M_1 d_n).$$

Aus den erhaltenen Relationen kann die Abschätzung 2° aufgeschrieben werden. (Im Falle (33) gelten die Relationen

$$|e_{n+1}| \leqq \frac{1}{2} L_2 d_n^2 \leqq \frac{1}{2} L_2 e_n^2.)$$

In den restlichen drei Fällen können die Behauptungen ähnlich gezeigt werden.

Es sind die Fehlerabschätzungen des *TE*-Verfahrens enthalten in dem

Satz 11. *Wenn es eine Konstante* m_1 *mit* (26) *gibt, und die Bedingungen des Satzes* 8 *erfüllt sind, außerdem* $c \geqq 2$ *ist und die Nullstelle* $\alpha = \lim x_n$ *von* f *in* I *einfach ist, dann gelten die Relationen*

$$1^\circ \quad |e_{n+1}| \leqq (N+L_2)\,|e_n|^2,$$

$$2^\circ \quad |e_{n+1}| \leqq NL_2\,|d_n|^3 + (N+2L_1L_2)\cdot|d_n|^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

mit $N = N_E \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sqrt{c^2+M_1^2}}{m_1}$.

Beweis. Wie in den obigen zwei Beweisen, auch jetzt setzen wir (27) voraus, ferner erhalten wir aus (10) den Wert

$$f(x_n) = c\left[\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-(d_n+R)^2}\right],$$

wobei $R = |g'|(1+g'^2)^{-\frac{1}{2}} < 1$ und $g' = \dfrac{f'(x_n)}{c}$ ist. Der Wert von e_{n+1} kann auf folgende Weise abgeschätzt werden:

$$e_{n+1} = \frac{c}{|f'(\xi)|}\cdot\left(\sqrt{1-R^2} - \sqrt{1-(d_n+R)^2}\right) - d_n =$$

$$= \frac{c}{|f'(\xi)|}\cdot\frac{d_n^2+2Rd_n}{\sqrt{1-R^2}+\sqrt{1-(d_n+R)^2}} - d_n \leqq \frac{cd_n^2}{m_1\sqrt{1-R^2}} +$$

$$+\left(\frac{2R}{|f'(\xi)|\cdot\sqrt{1-R^2}} - 1\right)d_n = \frac{\sqrt{c^2+f'^2(x_n)}}{m_1}\cdot d_n^2 + \left(\frac{2|g'|}{|f'(\xi)|} - 1\right)d_n, \quad \xi\in(x_n, \alpha).$$

Das letzte Glied ist nicht größer als

$$\left(\left|\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)}\right| - 1\right)d_n = \frac{f''(\eta)(\xi-x_n)\,d_n}{|f'(\xi)|} \leqq L_2(\xi-x_n)\,d_n, \quad \eta\in(x_n, \xi).$$

Hieraus folgt auf Grund von (32) die Behauptung 1°.
Andererseits ist der Wert von $\xi - x_n$ kleiner als

$$e_n \leqq \frac{c}{m_1}\cdot\frac{d_n^2+2Rd_n}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{\sqrt{c^2+f'^2(x_n)}}{m_1}\,d_n^2 + \frac{2|f'(x_n)|}{m_1}\,d_n \leqq Nd_n^2 + 2L_1 d_n.$$

Hieraus folgt 2°. (Ist (33) erfüllt, so ist $|e_{n+1}| \leqq N\cdot|d_n|^2$.)
In den anderen drei Fällen kann man die Behauptungen ähnlich beweisen. Es gilt der

Satz 12. *Die Methoden der Berührungskegelschnitte sind quadratisch konvergent und optimal.*

Beweis. In den Sätzen 9, 10 und 11 haben wir gezeigt, daß die Fehlerabschätzungen der Verfahren der Berührungskegelschnitte von der Gestalt $|e_{n+1}| \leqq \varrho\cdot e_n^2$, $\varrho < \infty$ sind. Deshalb ist die Konvergenzordnung der Methoden nicht kleiner als zwei: $p \geqq 2$. Anderseits ist $\mathrm{Eff} \leqq 1$, so erhält man, daß $p = 2$ und $\mathrm{Eff} = 1$, qu.e.d.

Die asymptotischen Fehlerkonstanten unserer Methoden können mit Hilfe der folgenden Behauptung bestimmt werden.

Satz 13. *Die Konvergenzfaktoren der TP-, TH-, bzw. TE-Methoden sind von der Gestalt*

$$C = \frac{\lambda + \operatorname{sign}(f(x_0)) \cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|},$$

wo die Werte von λ

$$\lambda_{TP} = M_2,$$

$$\lambda_{TH} = c^{-2}(c^2 - f'^2(\alpha))^{3/2}, \quad c^2 = 2M_1^2 + \frac{16}{3} M_2^2$$

bzw.

$$\lambda_{TE} = c^{-2}(c^2 + f'^2(\alpha))^{3/2}, \quad c = \max(M, 2M_2, 2)$$

sind.

Beweis. Es ist bekannt ([27], Seite 20), daß der Konvergenzfaktor einer beliebigen Iteration (22) von der Ordnung p durch $C = \frac{1}{p!} |F^{(p)}(\alpha)|$ ausgedrückt werden kann. Der Wert von C unserer Verfahren ist auf Grund des Satzes 12 mit $\frac{1}{2}|F''(\alpha)|$ gleich. Jetzt führen wir die Bezeichnung $s = \operatorname{sign}(f(x_0))$ ein. Im Beweis wenden wir die Relation $|f'(\alpha)| = -r \cdot s \cdot f'(\alpha)$ an.

ad 1° Die Iterationsfunktion F_{TP} hat die Derivierte

$$F'_{TP}(x) = 1 + s \cdot g''(x) + r(s + g''(x))g'(x)[2|g(x)| + g'^2(x)]^{-\frac{1}{2}},$$

wobei $g(x) = \frac{f(x)}{M_2}$ ist. So gilt

$$F''_{TP}(\alpha) = s \cdot g'''(\alpha) + \frac{r}{g'^2(\alpha)} \cdot \Big[\big(g''^2(\alpha) + g'(\alpha)g'''(\alpha) + s \cdot g''(\alpha)\big) \cdot |g'(\alpha)| -$$

$$- g'(\alpha)(s + g''(\alpha))\big(s \cdot g'(\alpha) + g''(\alpha)g'(\alpha)\big) \cdot \frac{1}{|g'(\alpha)|}\Big] = \frac{1 + s \cdot g''(\alpha)}{s \cdot g'(\alpha)}.$$

Daraus folgt die Relation $C_{TP} = \frac{M_2 + s \cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|}$.

ad 2° Die Iterationsfunktion der TH-Methode kann in der Form

$$F_{TH}(x) = x + s \cdot \frac{g'(x)}{H(x)} + r \cdot G(x)$$

aufgeschrieben werden, wobei $G(x) = \left(\left[|g(x)| + \frac{1}{H(x)}\right]^2 - 1\right)^{1/2}$, $H(x) = [1 - g'^2(x)]^{1/2}$

und $g(x)=\frac{f(x)}{c}$ ist. Nun bilden wir die Derivierten

$$F'_{TH}(x) = 1+\frac{s}{H^2}(g''H-g'H')+rG',$$

$$F''_{TH}(x) = s\cdot H^{-3}[H(g'''H-g'H'')-2H'(g''H-g'H')]+rG'',$$

wo

$$G'(x) = \frac{1}{G}\left(|g|+\frac{1}{H}\right)\left(s\cdot g'-\frac{H'}{H^2}\right)$$

und

$$G''(\alpha) = \frac{r\cdot s}{g'}\left[H^3+s\cdot g''-\frac{g'g'''}{H^3}-\frac{3g'^2g''^2}{H^5}\right]\bigg|_{x=\alpha}$$

ist. Hieraus erhalten wir

$$s\cdot F''_{TH}(\alpha) = \frac{1}{H^2}\left[g'''H+\frac{g'^2g'''}{H}+\frac{3g'g''^2}{H^3}\right]\bigg|_{x=\alpha}+$$

$$+\frac{1}{g'}\left[H^3+s\cdot g''-\frac{g'g'''}{H^3}-\frac{3g'^2g''^2}{H^5}\right]\bigg|_{x=\alpha} = \frac{s\cdot g''+H^3}{g'}\bigg|_{x=\alpha},$$

so hat der Konvergenzfaktor die Gestalt

$$C_{TH} = \frac{|s\cdot g''(\alpha)+H^3(\alpha)|}{2|g'(\alpha)|} = \frac{c^{-2}\cdot[c^2-f'^2(\alpha)]^{3/2}+s\cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|}.$$

ad 3° Auf gleiche Weise kann der Konvergenzfaktor des TE-Verfahrens erhalten werden:

$$C_{TE} = \frac{c^{-2}\cdot[c^2+f'^2(\alpha)]^{3/2}+s\cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|}.$$

Bemerkungen.

1. Der Konvergenzfaktor der NR-Methode ist von der Gestalt

$$C_{NR} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}.$$

2. Es ist klar, daß die Relationen $C_{TP}<C_{TH}$, $C_{TP}<C_{TE}$ für eine und dieselbe Nullstelle α von f erfüllt sind. Diese Verhältnisse charakterisieren die Konvergenzgeschwindigkeiten der Verfahren, darüber hinaus haben sich auch in den Fehlerabschätzungen gespiegelt, da $L_2<N_H<N_E$ ist. Es soll ferner erwähnt werden, daß der neue Iterationswert x_{n+1} (und auch die Konstante c) bei der TP-Methode mehr einfach berechnet wird als bei den TH- bzw. TE-Verfahren. Aus diesen Überlegungen und den numerischen Beispielen (Tabelle 1) *scheine die TP-Methode unter den Verfahren der Berührungskegelschnitte das beste zu sein.*

3. Die NR- und TP-Methoden haben die Eigenschaft miteinander gemein,

daß die entsprechende (lineare bzw. quadratische) Approximationskurve die Funktion f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ in erster Ordnung berührt. Mit Hilfe des folgenden Satzes von TRAUB ([27], S. 33) ist es möglich, einen neueren Zusammenhang zwischen den beiden Verfahren anzugeben.

Die Iterationsfunktionen F und Φ seien von der Ordnung p, und die entsprechenden Iterationsfolgen streben gegen die einfache Nullstelle α von f. Dann existiert eine Funktion V mit $|V(\alpha)|<\infty$ und

$$F(x) = \Phi(x)+V(x)\cdot f^p(x). \tag{36}$$

In unserem Fall ist $p=2$, $F(x)=F_{TP}(x)$ und $\Phi(x)=F_{NR}(x)$. Aus (36) kann man $V(x)$ unmittelbar ausdrücken. Mit zweifacher Anwendung des Satzes von L'Hospital ergibt sich

$$|V(\alpha)| = \frac{M_2}{4\cdot|f'^3(\alpha)|}.$$

Für jedes Paar aus F_{TH}, F_{TP}, F_{TE} und F_{NR} kann eine ähnliche Verknüpfung angegeben werden.

4. Die bekannte Methode der „tangierenden Parabeln" (oder Tschebyschew-Verfahren) mit der Iterationsfunktion

$$F(x) = x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{2f'^3(x)} \tag{37}$$

kann als eine Methode von E. SCHRÖDER [24] für $p=3$ aufgefaßt werden. Die Iterationsfunktion

$$\tilde{F}(x) = x-\frac{2f(x)f'(x)}{2f'^2(x)-f(x)f''(x)} \tag{38}$$

von E. HALLEY [12] ist auch von dritter Ordnung. Sie kann als eine rationale Approximation von (37) betrachtet werden ([27], S. 88—92). Das Verfahren wurde durch G. S. SALECHOW als die Methode der „tangierenden Hyperbeln" genannt [26]. In der Tat hat die die Funktionskurve f im Punkt $(x_n, f(x_n))$ in zweiter Ordnung tangierende Approximationshyperbel $y=\dfrac{x+A}{Bx+C}$ die Nullstelle $\tilde{F}(x_n)$. Beide Iterationsverfahren sind nicht immer konvergent. Dagegen sind unsere Methoden der Berührungsparabeln und der Berührungshyperbeln *nur quadratisch* ($p=2$), *aber stets konvergent.*

5. In seiner Monographie hat sich J. F. TRAUB mit den durch die Interpolation erzeugten Iterationsfunktionen beschäftigt ([27], S. 60—77). Es seien $x_n, x_{n-1}, \ldots, \ldots, x_{n-m}$ die Näherungswerte der Nullstelle α von f und $P_{m,s}(x)$ ein Polynom G-ten Grades mit

$$P_{m,s}^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k),$$

$$k = n, n-1, \ldots, n-m;\quad j = 0, 1, \ldots, s-1;$$

$$G = s(m+1)-1.$$

Eine geeignete Nullstelle von $P_{m,s}(x)$ wird als ein neuer Näherungswert x_{n+1} von α ausgewählt. (In den Fällen $P_{0,2}$ und $P_{1,1}$ erhält man z. B. die NR-Methode bzw. die „Regula falsi.“) Bei den Iterationen von der Gestalt (22) ist $m=0$. Die Monotonie und Konvergenz solcher Iterationen behauptet der

Satz 14. *Es sei* $J=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-\alpha|\leqq\varrho\}$, *wobei* $\varrho>0$ *ist. Es sei ferner* $x_0\in J$ *und* $s(>1)$ *eine beliebige, aber feste ganze Zahl. Setzen wir voraus, daß die Funktion* $f^{(s)}$ *in* J *stetig ist,*

$$f'(x)\cdot f^{(s)}(x)\neq 0,\quad x\in J$$

gilt und

$$f(x_0)\cdot f^{(s)}(x_0)>0\quad (s\ \textit{gerade})$$

bzw.

$$f'(x_0)\cdot f^{(s)}(x_0)<0\quad (s\ \textit{ungerade})$$

ist. $P_{0,s}$ *sei ein Interpolationspolynom von* f *mit*

$$P_{0,s}^{(j)}(x_n)=f^{(j)}(x_n),\quad j=0,1,\dots,s-1.$$

Dann existiert genau eine Nullstelle $x_{n+1}\in[x_n,\alpha]$ *von* $P_{0,s}$. *Die Iterationsfolge* $\{x_n\}$ *ist monoton und strebt gegen* α [27].

Im Falle $s=2$ stimmen die Bedingungen des Satzes 14 mit den bekannten Fourier'schen Bedingungen [11] überein. Der Fall $s=3$ ist für uns besonders interessant, weil es sich um die von A. Cauchy [6] bzw. S. Hitotumatu [14] untersuchte Iterationsfunktion

$$F(x)=x-\frac{f'}{f''}\pm\sqrt{\left(\frac{f'}{f''}\right)^2-\frac{2f}{f''}}=x-\frac{2f}{f'+\sqrt{f'^2-2ff''}}\tag{39}$$

mit $p=3$ handelt, die aus der die Kurve von f im Punkt $(x_n,f(x_n))$ in zweiter Ordnung tangierenden Parabel $P_{0,3}(x)=Ax^2+Bx+C$ hergeleitet wird. Auf Grund vom Satz 14 ist die Iterationsfolge monoton, und sie strebt gegen α, falls f''' in J stetig ist, und die Relation

$$f'(x)\cdot f'''(x)<0\tag{40}$$

in J erfüllt ist ([27], S. 93—94).

Man kann feststellen, daß F_{TP} der Iterationsfunktion (39) ähnlich ist. Unser monotones und stets konvergentes TP-Verfahren braucht aber weder die Existenz von f''' noch die Funktionswerte von $f''(x_n)$, die Gültigkeit von (40) oder die Information über die Existenz von α in I. Es braucht nur eine obere Schranke M_2 von $|f''(x)|$ in I. Die Konvergenzordnung der TP-Methode ist aber nur $p=2$. (Vgl. mit dem Zusammenhang zwischen den Newton'schen bzw. den modifizierten Newton'schen Methoden.)

Es gibt keinen engen Zusammenhang zwischen den stets konvergenten TH-, TE-Verfahren, und den durch J. F. Traub untersuchten, monotonen, konvergenten Iterationsverfahren, da unsere Approximationsfunktionen bei den TH- und TE-Methoden keine Polynome sind.

Es kann die allgemeinere Frage untersucht werden, ob es im Falle $|f^{(p)}(x)| \leqq M_p$, $x \in I$ für eine beliebige ganze Zahl $p \geqq 3$ eine stets konvergente Iterationsmethode von der Ordnung p angegeben werden kann.

6. Die Iterationen (37), (38) und (39) können aus den Näherungen

$$0 = f(\alpha) \approx f(x_n) + f'(x_n) \cdot e_n + \frac{1}{2} f''(x_n) \cdot e_n^2,$$

$$d_n \approx e_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

einheitlich eingeführt werden (siehe z. B. [15] und [27]).

7. In [8] befinden sich die Untersuchungen der aus der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hergeleiteten und stets konvergenten Iterationsfunktion

$$F(x; r) = x + \operatorname{sign}\left(f(x_0)\right) \frac{a^2 f'(x)}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x)}} + r \cdot a \sqrt{1 - \left[\frac{|f(x)|}{b} - \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 f'^2(x)}}\right]^2}$$

von zweiter Ordnung. Das Verfahren kann als eine Verallgemeinerung der TE-Methode aufgefaßt werden.

8. Der Grundgedanke der Verfahren der Berührungskegelschnitte gibt die Idee, die Approximationskegelschnitte auch zur Bestimmung der Maxima und Minima von f anzuwenden. Es kann nämlich leicht bewiesen werden, daß die Maximum- (bzw. Minimum-) Stelle des die Funktionskurve f im Punkt $\left(x_0, f(x_0)\right)$ berührenden Kegelschnittes (3), (7) bzw. (10) im Segment $[x_0, x^*]$ liegt, wobei x^* die von x_0 in der Richtung des Zu- (bzw. Ab-)nehmens von f nächstliegende Extremumstelle von f ist, falls $x_0 \in I$ und $f'(x_0) \neq 0$ gelten. Deshalb kann die Extremumstelle des Berührungskegelschnittes als eine neuere Näherung x_1 von x^* gewählt werden. Wenn man die Prozedure mit dem Punkt $\left(x_1, f(x_1)\right)$ wiederholt, erhält man den Näherungswert x_2, u. s. w. Im Falle der Berührungshyperbeln, -parabeln und -ellipsen siehen die Iterationsfunktionen, wie folgt, aus:

$$x + r \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}},$$

$$x + r \cdot \frac{f'(x)}{2c}$$

bzw.

$$x + r \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 + f'^2(x)}}.$$

Die zweite Formel stimmt mit der stets konvergenten Modifikation der NR-Methode zur Lösung von $f'(x) = 0$ überein. Es können auch die erste und dritte Formeln als die Varianten der obigen Methode betrachtet, weil die Nenner der Korrektionsglieder nicht kleiner als M_2 sind.

Numerische Beispiele

Endlich betrachten wir die numerischen Beispiele für die TP-, TH-, TE- und NR-Verfahren zur Lösung von fünf nichtlinearen Gleichungen mit der Genauigkeit $\varepsilon={}_{10}-6$. (Unter Zeichen der Methode werden die Iterierten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $|x_i-\alpha|\geqq\varepsilon,\ i<n$ und $|x_n-\alpha|<\varepsilon$ aufgeschrieben.)

Tabelle 1

(Zur Lösung von den Gleichungen mit der verlangten Genauigkeit brauchen die TP, TH, TE bzw. NR Methoden insgesamt 11, 17, 18 bzw. 18 Iterationsschritte.)

I. $f(x)=2^x-5x+2,\ x\in[0,1];\ \alpha=0.732\,244\,255\,5\pm{}_{10}-10$
$M=3,\ M_1=4.31,\ M_2=0.961;\ x_0=1$

TP	TH	TE	NR ($x_0=0$)
0.732 771 02	*0.7*51 564 86	*0.*817 196 49	*0.*696 564 32
0.732 244 26	*0.732* 367 29	*0.7*42 463 75	*0.732* 115 35
	0.732 244 26	*0.732* 406 35	*0.732 244 25*
		0.732 244 30	

II. $f(x)=e^x-x^2+1,\ x\in[-2,0];\ \alpha=-1.147\,757\,632\,2\pm{}_{10}-10$
$M=2.865,\ M_1=4.136,\ M_2=1.865;\ x_0=0$

TP	TH	TE	NR ($x_0=-2$)
$-$*1.*023 382 26	$-$0.667 912 73	$-$0.644 021 23	$-$*1.*307 271 47
$-$*1.147* 142 00	$-$*1.*032 853 36	$-$*1.*005 570 28	$-$*1.1*55 317 85
$-$*1.147 757 6*2	$-$*1.1*38 681 14	$-$*1.1*31 591 17	$-$*1.147* 775 96
	$-$*1.147* 692 09	$-$*1.147* 508 74	$-$*1.147 757 63*
	$-$*1.147 757 63*	$-$*1.147 757* 57	

III. $f(x)=\sin x-0.5x,\ x\in[1.5,3];\ \alpha=1.895\,494\,267\,0\pm{}_{10}-10$
$M=1.36,\ M_1=1.5,\ M_2=1;\ x_0=1.5$

TP	TH	TE	NR ($x_0=3$)
1.894 907 40	*1.*791 548 93	*1.*810 444 38	2.087 995 41
1.895 494 26	*1.*885 432 72	*1.*889 586 30	*1.*912 229 26
	1.895 381 23	*1.895* 461 11	*1.895* 652 63
	1.895 494 25	*1.895 494 27*	*1.895 494* 28

IV. $f(x)=e^x+10x-2,\ x\in[0,1];\ \alpha=0.090\,525\,101\,3\pm{}_{10}-10$
$M=10.72,\ M_1=12.72,\ M_2=2.72;\ x_0=0$

TP	TH	TE	NR ($x_0=1$)
*0.0*89 909 65	*0.0*87 448 89	*0.0*80 328 72	*0.*157 253 95
0.090 525 07	*0.090 5*21 22	*0.090* 382 50	*0.090* 753 25
	0.090 525 10	*0.090 525* 07	*0.090 525 10*

V. $f(x)=x^3-3x^2-x+9,\ x\in[-2,-1.5];\ \alpha=-1.525\,102\,254\,9\pm{}_{10}-10$
$M=9,\ M_1=23,\ M_2=18;\ x_0=-1.5$

TP	TH	TE	NR ($x_0=-2$)
$-1.525\,041\,12$	$-1.524\,480\,85$	$-1.524\,489\,69$	$-1.608\,695\,65$
$-1.525\,102\,25$	$-1.525\,101\,86$	$-1.525\,101\,87$	$-1.528\,398\,05$
			$-1.525\,107\,68$
			$-1.525\,102\,25$

Literaturverzeichnis

[1] G. ALEFELD, Eine Modifikation des Newtonverfahrens zur Bestimmung der reellen Nullstellen einer reellen Funktion, *Z. Angew. Math. Mech.* **50** (1970), T32—T33.

[2] G. ALEFELD, Stets konvergente Verfahren höherer Ordnung zur Berechnung von reellen Nullstellen, *Computing* **13** (1974), 55—65.

[3] W. BARTH, Nullstellenbestimmung mit der Intervallrechnung, *Computing* **8** (1971), 320—328.

[4] R. P. BRENT, An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function, *Computer J.* **14** (1971), 422—425.

[5] J. C. P. BUS—T. J. DEKKER, Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function, *ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 1, No. 4* (1975), 330—345.

[6] A. CAUCHY, Leçons sur le calcul différentiel. Sur la determination approximative des racines d'une équation algebrique ou transcendante. *Oeuvres Complètes* II.*T.4*, 573—609.

[7] L. COLLATZ, Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer Verlag, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1964.

[8] M. DEUTSCH—Z. SZABÓ, Érintő ellipszisekkel generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációkról, *Mat. Lapok* **24** (1973), 397—408.

[9] L. EULER, Institutiones Calculi Differentialis II. Cap. IX. — *Opera Omnia Ser. I. Vol. X,* 422—455.

[10] G. FABER, Über die Newtonsche Näherungsformel, *J. Reine Angew. Math.* **138** (1910), 1—21.

[11] J. B. J. FOURIER, Analyse des équations détérminées, *Paris* 1831.

[12] E. HALLEY, A new and general method of finding the roots of equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **18** *Ser A* (1694), 136.

[13] J. HERZBERGER, Bemerkungen zu einem Verfahren von R. E. Moore, *Z. Angew. Math. Mech.* **53** (1973), 356—358.

[14] S. HITOTUMATU, A method of successive approximation based on the expansion of second order, *Math. Japon.* **7** (1962), 31—50.

[15] B. JANKÓ, Rezolvarea ecuatiilor operationale neliniare in spatii Banach, *Ed. Acad. Rep. Soc. Romania, Bucuresti* 1969.

[16] Л. В. Канторович, О методе Ньютона для Функциональных уравнений, *Докл. Акад. Наук СССР* **59** (1948), 1237-1240.

[17] Л. В. Канторович, О методе Ньютона, *Труды Мат. Инст. им В. А. Стеклова* **28** (1949), 104-144.

[18] R. KRAWCZYK, Einschließung von Nullstellen mit Hilfe einer Intervallarithmetik, *Computing* **5** (1970), 356—370.

[19] R. KRAWCZYK, Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken. *Computing* **4** (1969), 187—201.

[20] R. E. MOORE, Interval analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs *N. J.* 1966.

[21] K. NICKEL, Die vollautomatische Berechnung einer einfachen Nullstelle von $F(t)=0$ einschließlich einer Fehlerabschätzung, *Computing* **2** (1967), 232—245.

[22] A. M. OSTROWSKI, Über eine Modifikation des Newtonschen Näherungsverfahrens, *Труды Тбилисского Мат. Инст. (АН СССР, Груз. Филиал)* **2** (1937) 241-250

[23] A. M. OSTROWSKI, Solution of equations and systems of equations, Acad. Press, *New York—London*, 1960.

[24] E. SCHRÖDER, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Ann.* **2** (1870), 317—365.

[25] Z. SZABÓ, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I—II, *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233; **21** (1974), 285—293.

[26] Г. С. *Салехов*, О сходимости процесса касательных гипербол, *Докл. Акад. Наук СССР* **82** (1952), 525-528.

[27] J. F. TRAUB, Iterative methods for the solution of equations, Prentice Hall, Englewood Cliffs *N. J.* 1964.

[28] A. ZAJTA, Az iteratív közelítő módszerekről I—III, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **6** (1956), 467—489; **8** (1958), 457—472; **9** (1959), 347—363.

ADRESSE DES AUTORS:
ZOLTÁN SZABÓ
MATHEM. INST. UNIV. KOSSUTH
4010 DEBRECEN, UNGARN

(Eingegangen am 17. November 1975.)