Ein Eindeutigkeitssatz für stetige Lösungen von Funktionalgleichungen

Von MANFRED KRÜPPEL Rostock

In dieser Arbeit wollen wir einen Eindeutigkeitssatz für die Funktionalgleichung

$$\varphi[f(x)] = g(x, \varphi(x)), \tag{1}$$

bei der $f(x)$ und $g(x, y)$ gegeben und $\varphi(x)$ die unbekannte Funktion ist, aufstellen (vgl. KUCZMA [3]).

Bevor wir zur Formulierung und zum Beweis des Satzes kommen, müßen wir einigen Grundbegriffe aus der Iterationstheorie vorausschicken.

Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion, die das kompakte Intervall $E=[a, b]$ in sich abbildet. Durch

$$f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind die natürlichen Iterierten von $f(x)$ erklärt, die ebenfalls stetig sind und E in sich abbilden. Für einen festen Punkt $x_0 \in E$ bezeichnet man die Folge $\{f^n(x_0)\}$ als die Iterationsfolge des Punktes x_0 und die Glieder dieser Folge als die Nachfolger von x_0. Ist x' ein Nachfolger von x_0, dann heißt umgekehrt x_0 ein Vorgänger von x'.

Gilt $f^\nu(\xi) \neq \xi$ für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$ und $f^k(\xi) = \xi$, so heißt ξ ein Fixpunkt k-ter Ordnung von $f(x)$.

Nach B. BARNA [1] nennen wir einen Punkt x_0 *singulär*, wenn seine Iterationsfolge nur aus endlich vielen verschiedenen Punkten besteht. Der Punkt x_0 ist genau dann singulär, wenn es zwei ganze Zahlen $\nu \geqq 0$ und $\mu \geqq 1$ gibt, so daß

$$f^\mu(f^\nu(x_0)) = f^\nu(x_0)$$

gilt, d. h., die singulären Punkte sind die Fixpunkte irgendeiner Ordnung und ihre Vorgänger.

Nun sind wir in der Lage, den folgenden Eindeutigkeitssatz zu beweisen.

Satz 1. *Liegen bei der stetigen Funktion $f(x)$ die singulären Punkte dicht in E und ist $g(x, y)$ partiell nach y differenzierbar und gilt $g_y(x, y) > 1$, dann hat die Funktionalgleichung* (1) *höchstens eine stetige Lösung $\varphi(x)$.*

BEWEIS. Wir wollen annehmen, daß die Gleichung (1) wenigstens eine stetige Lösung $\varphi_0(x)$ besitzt und werden zeigen: Ist $\varphi(x)$ ebenfalls eine stetige Lösung von (1), dann gilt auf einer dichten Menge $\varphi(x) = \varphi_0(x)$, woraus wegen der Stetigkeit $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ für alle x folgt. Den Beweis werden wir in mehreren Schritten führen.

1° Zunächst führen wir durch

$$g_1(x, y) := g(x, y)$$

$$g_{n+1}(x, y) := g[f^n(x), g_n(x, y)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{2}$$

die Funktionen $g_n(x, y)$ ein.

2° Durch vollständige Induktion beweisen wir, daß für alle natürlichen Zahlen n

$$\varphi[f^n(x)] = g_n[x, \varphi(x)] \tag{3}$$

gilt. Für $n=1$ ist (3) wegen (1) richtig.
Angenommen die Gleichung (3) sei für ein $n \geqq 1$ richtig, dann erhalten wir unter Beachtung von (2)

$$\varphi[f^{n+1}(x)] = \varphi\left[f((f^n(x))\right] = g\left[f^n(x), \varphi(f^n(x))\right] =$$
$$= g\left[f^n(x), g_n(x, \varphi(x))\right] = g_{n+1}[x, \varphi(x)]$$

womit (3) für alle natürlichen Zahlen bewiesen ist.

3° Als nächstes zeigen wir, daß für alle x, y

$$\frac{\partial}{\partial y} g_n(x, y) > 1 \tag{4}$$

gilt. Für $n=1$ ist (4) nach Voraussetzung erfüllt. Ist die Beziehung für ein $n \geqq 1$ gültig, dann erhalten wir nach (2) und Anwendung der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial y} g_{n+1}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g[f^n(x), g_n(x, y)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} g[f^n(x), z] \cdot \frac{\partial}{\partial y} g_n(x, y) > 1,$$

womit die Beziehung (4) für alle n bewiesen ist.

4° Es sei ξ ein Fixpunkt n-ter Ordnung von $f(x)$, d. h. es ist $f^n(\xi)=\xi$. Nach (3) erhalten wir

$$\varphi(\xi) = g_n(\xi, \varphi(\xi)). \tag{5}$$

Aus (4) folgt, daß die Ableitung der Funktion $G(y)=g_n(\xi, y)-y$ größer als 0 ist. Demzufolge besitzt die Funktion $G(y)$ höchstens eine Nullstelle, d. h. es gibt höchstens ein η, welches der Gleichung

$$\eta = g_n(\xi, \eta) \tag{6}$$

genügt. Da es nach Voraussetzung eine Lösung $\varphi_0(x)$ von (1) gibt, erkennen wir durch Vergleich von (5) und (6), daß $\varphi_0(\xi)=\eta$ ist und erhalten folglich

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi). \tag{7}$$

5° Es sei ζ ein unmittelbarer Vorgänger eines Punktes ξ, d. h. es ist $f(\zeta)=\xi$. Für ξ gelte die Gleichheit (7).

Wegen $g_y(x, y) > 1$ ist die Funktion $g(x, y)$ für jedes feste x bzgl. y streng monoton wachsend. Folglich existiert die Umkehrfunktion, so daß wir für (1) auch

$$\varphi(x) = h(x, \varphi(f(x))) \tag{8}$$

schreiben können. Setzen wir in (8) $x = \zeta$, so bekommen wir

$$\varphi(\zeta) = h(\zeta, \varphi(f(\zeta))) = h(\zeta, \varphi(\xi)) = h(\zeta, \varphi_0(\xi)),$$

woraus sich ergibt, daß $\varphi(\zeta)$ eindeutig bestimmt und somit $\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$ ist.

Hieraus können wir nun schließen, daß für jeden Vorgänger eines Fixpunktes n-ter Ordnung die Gleichheit $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ gilt, d. h. für alle singulären Punkte ist $\varphi(x) = \varphi_0(x)$. Da die Menge der singulären Punkte nach Voraussetzung dicht in E ist, folgt wegen der Stetigkeit von φ und φ_0 die Gleichheit $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ für alle x aus E, womit der Satz bewiesen ist.

Um den Eindeutigkeitssatz anwenden zu können, muß man nachweisen, daß bei der Funktion $f(x)$ die singulären Punkte dicht liegen. In [4], S. 80 wird hierfür das folgende hinreichende Kriterium bewiesen.

Satz 2. *Besitzt die stetige Funktion $f(x)$ nur endlich viele relative Extrempunkte und sind die Ableitungszahlen von $f(x)$ in allen Punkten aus E dem Betrag nach größer als 1, dann liegen die singulären Punkte dicht in E.*

Ein Beispiel hierfür wäre (vgl. auch [1], I, S. 36)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x \leqq 1/2 \\ 2-2x & 1/2 < x \leqq 1. \end{cases}$$

Dieses hinreichende Kriterium läßt sich jedoch nicht auf differenzierbare Funktionen anwenden, da wegen $f(E) \subseteqq E$ die Ableitung $f'(x)$ nicht in allen Punkten aus E nur größer als 1 oder nur kleiner als -1 sein kann.

Wir wollen am Beispiel des Tschebyschew-Polynoms $f(x) = 2x^2 - 1$ $(|x| \leqq 1)$ eine Methode vorführen, wie man bei einer differenzierbaren Funktion zeigen kann, daß die singulären Punkte in $E = [-1, 1]$ dicht liegen.

Wir werden zeigen, daß es einen Punkt x_0 in E gibt, so daß die Menge der Nachfolger $\{f^n(x_0)\}$ in E überall dicht ist. Gäbe es ein Intervall, welches nur aus nicht singulären Punkten besteht, dann würde es nach einem Satz aus [4], S. 79 auch ein Intervall I geben, dessen iterierte Intervalle $f^n(I)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ paarweise disjunkt liegen. Wegen der Dichtheit der Nachfolger $f^n(x_0)$ von x_0 ist dies aber nicht möglich.

Zum Nachweis der Existenz eines solchen Punktes x_0 gehen wir von der Funktionalgleichung

$$\varphi(2x) = f(\varphi(x)) \tag{9}$$

aus, von der $\varphi(x) = \cos 2\pi x$ eine stetige Lösung mit der Periode 1 ist. Aus (9) erhält man durch vollständige Induktion nach n

$$\varphi(2^n x) = f^n(\varphi(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wegen der Periodizität von $\varphi(x)=\cos 2\pi x$ gilt somit

$$\cos 2\pi\xi_n = f^n(\cos 2\pi\xi_0) \tag{10}$$

mit

$$\xi_n = 2^n\xi_0 - [2^n\xi_0], \tag{11}$$

wobei $[2^n\xi_0]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als $2^n\xi_0$ ist. Wir zeigen als nächstes, daß die Menge der Zahlen (11) mit dem Anfangsglied

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot 2^{-k^2} \tag{12}$$

im Intervall [0, 1] dicht ist. Die dyadische Darstellung der Zahl ξ_0 lautet

$$\xi_0 = 0,1|0\,1\,0|0\,0\,0\,1\,1|0\,0\,0\,0\,1\,0\,0|\ldots, \tag{13}$$

wobei die senkrechten Striche nur der optischen Orientierung dienen. Nach (11) erhalten wir die dyadische Darstellung von ξ_n, indem wir in (13) das Komma um n Stellen nach rechts verschieben und dann den Teil vor dem Komma durch 0 ersetzen. Aus (12) und der entsprechenden dyadischen Darstellung (13) erkennt man, daß alle Zahlen der Form $k2^{-n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots; k=0, 1, \ldots, 2^n-1)$ Häufungspunkte der Folge $\{\xi_n\}$ sind. Da diese Zahlen aber in [0, 1] dicht liegen und die Menge der Häufungspunkte abgeschlossen ist, ist folglich jeder Punkt aus [0, 1] Häufungspunkt der Folge $\{\xi_n\}$.

Aus (10) folgt nun unter Beachtung der Stetigkeit der Funktion $\varphi(x)=\cos 2\pi x$, daß die Menge der Zahlen $\{f^n(x_0)\}$ mit $x_0=\cos 2\pi\xi_0$ in E überall dicht ist. Damit ist gezeigt, daß bei $f(x)=2x^2-1$ die singulären Punkte in E dicht liegen.

In [5] und [6] findet man eine andere Methode, um bei einer differenzierbaren Funktion die Dichtheit der singulären Punkte nachzuweisen.

Wir wollen aus unserer Untersuchung noch eine Folgerung ziehen.

Satz 3. *Bei jedem Tschebyschew-Polynom liegen die singulären Punkte in* $[-1, 1]$ *dicht.*

Beweis. Die Tschebyschew-Polynome sind bekanntlich alle miteinander vertauschbar, also insbesondere mit $f(x)=2x^2-1$ (vgl. etwa M. Kuczma [3]). Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei von x verschiedene vertauschbare Polynome, dann ist nach E. Jacobsthal [2] ein Punkt x_0 genau dann singulär bzgl. $f(x)$, wenn x_0 bzgl. $g(x)$ singulär ist. Die Aussage des Satzes 3 ergibt sich nun einfach aus der Tatsache, daß bei $f(x)=2x^2-1$ die singulären Punkte in E dicht liegen.

Abschließend betrachten wir als Beispiel die Funktionalgleichung

$$\varphi(\cos 2t) = 4\varphi(\cos t) - 4\sin^4 t. \tag{14}$$

Mittels der Substitution $x=\cos t$ erhalten wir unter Berücksichtigung von $\cos 2t= =2\cos^2 t-1$ und $\sin^2 t=1-\cos^2 t$ die Gleichung

$$\varphi(2x^2-1) = 4\varphi(x) - 4(1-x^2)^2 \quad (|x| \leqq 1). \tag{15}$$

Wir haben oben bereits festgestellt, daß bei dem Polynom $f(x)=2x^2-1$ die singulären Punkte im Intervall $[-1, 1]$ dicht liegen. Für die Funktion $g(x, y)=$ $=4y-4(1-x^2)^2$ ist

$$g_y(x, y) = 4,$$

d. h. die Gleichung (15) erfüllt die Voraussetzungen unseres Eindeutigkeitssatzes. Wie man leicht bestätigt, ist $\varphi(x)=1-x^2$ eine stetige Lösung der Gleichung (15), und nach dem Eindeutigkeitssatz ist dies auch die einzige. Hieraus ergibt sich nun, daß $\varphi(\cos t)=\sin^2 t$ die einzige stetige Lösung der Gleichung (14) ist.

Literatur

[1] B. Barna, Über die Iteration reeller Funktionen I, II, III. *Publ. Math. (Debrecen)* **7**, (1960) 16—40; **13**, (1966); 169—172; **22** (1975), 269—278.
[2] E. Jacobsthal, Über vertauschbare Polynome, *Math. Z.* **63**, (1955), 243—276.
[3] M. Kuczma, Functional equations in a single variable, *Warszawa*, 1968.
[4] M. Krüppel, Beiträge zur Theorie der vertauschbaren Funktionen, *Math. Nachr.* **56** (1973), 73—100.
[5] — — Über nichtmonotone, vertauschbare Funktionen, (In Vorbereitung)
[6] — — Über die Verteilung der singulären Punkte bei Polynomen, *Wiss. Zeitschr. der PH Güstrow, Jahrgang 1977, Heft 1.*

(Eingegangen am 30. Juli 1976.)