Multiplications infra-distributives sur un groupe

Par MIRELA STEFĂNESCU (Jaşi)

On définit et on étudie la notion de multiplication infra-distributive à gauche sur un groupe G. On établit aussi la liaison entre ces multiplications et les multiplications distributives à gauche et les multiplications «faiblement» distributives [8]. On étudie l'équivalence des multiplications infra-distributives à gauche, obtenant des résultats qui généralisent ceux de WILLIAMS [10] et CLAY [4]. On donne des exemples de multiplications infra-distributives à gauche sur un groupe G qui sont éxprimées par l'opération groupale. L'ensemble des multiplications infra-distributives à gauche sur G est muni-quand il est possible-d'une structure de groupe, en retrouvant ainsi des résultats concernant les multiplications distributives à gauche [3] ou bilatéralement [7].

§.1. Notations, définitions, exemples

Nous désignons par $G=(G, +)$ un groupe, par End G (Aut G) l'ensemble de ses endomorphismes (resp. automorphismes), par Map (A, B) l'ensemble des fonctions de A dans B (A et B sont deux ensembles).

Soit $A=(A, +, .)$ un anneau (presque-anneau distributif avec les produits de ses éléments dans le centre de $(A, +)$). Alors *l'anneau faible* [5, 6] *(le presque-anneau faible* [8]*)* associé à A est la structure algébrique $(A, +, \circ)$, où l'opération binaire «$\circ$» est définie par: $x\circ y=x\cdot y+x+y$, $\forall x, y\in A$, pour le premier type, et par $x\circ y=x\cdot y+\varphi(x)+\psi(y)$, $\forall x, y\in A$, avec $\varphi_1(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$, $\psi_1(x)=\psi(x)-\psi(0)$, $\forall x\in A$, des endomorphismes de $(A, +)$, pour le second type.

Definition 1.1. Nous appellons une fonction μ: $G\times G\to G$ *multiplication infra-distributive à gauche* (m.i.-d.g.), si on a:

$$\mu(x, y+z) = \mu(x, y)-\mu(x, 0)+\mu(x, z), \quad \forall x, y, z\in G. \tag{1.1}$$

Si μ est associative, alors nous appellons $(G, +, \mu)$ un *infra-presque anneau à gauche.* Si $\mu(x, 0)=0$, $\forall x\in G$, alors μ este appellée *distributive à gauche* (m.d.g) ([3]).

Nous désignons l'ensemble des m.d.g. sur G par $\mathrm{Mult}_g\, G$, et celui des m.i.-d.g. par $\mathrm{Mult}_i\, G$.

Alors $\mathrm{Mult}_g\, G\subseteq \mathrm{Mult}_i\, G$. Il y a, évidemment, des éléments de $\mathrm{Mult}_i\, G$ qui ne sont pas en $\mathrm{Mult}_g\, G$. Ainsi, les multiplications d'anneau (presque anneau) faible sur l'anneau $(A, +, \cdot)$ sont m.i.-d.g. avec $\mu(x, 0)=x$ (le premier type) et $\mu(x, 0)=$ $=\varphi(x)+\psi(0)$ (le second type), $\forall x\in A$, sans être m.d.g. Il y a des multiplications qui sont à la fois m.i.-d.g. et distributives à droite, c'est-à-dire $\mu(x+y, z)=$

$=\mu(x,z)+\mu(y,z)$, $\forall x, y, z\in G$. Par exemple, si G est un groupe métabélien, la multiplication $\mu(x,y)=[x,y]+x$, $\forall x, y\in G$, où $[x,y]:=-x-y+x+y$, est de ce type. Enfin, si V est un espace vectorial sur un corps commutatif, l'ensemble des transformations affines de V est un presque anneau à droite [2], mais sa multiplication (la composition des transformations) est i.-d.g. par rapport à l'addition (ponctuelle), comme nous avons remarqué. Ce type de multiplications nous a inspiré une autre Note [8].

Quelques multiplications bilatéralement distributives et associatives sur G sont les suivantes:

(a) $\mu_1(x,y)=x,\quad \mu_2(x,y)=y,\quad \mu_3(x,y)=y+x,\quad \mu_4(x,y)=x+a+y,\quad \forall x, y\in G$

(a étant un élément fixé de G). Nous remarquons que μ_3 et μ_4 sont des opérations groupales. De plus, si $\mu\in \mathrm{Mult}_i\, G$, alors μ est i.-d.g. sur μ_4. On peut ainsi construire une suite de multiplications qui sont à la fois des opérations groupales, i.-d.g. sur les autres et admettent μ comme m.i.-d.g.

(b) $$\mu_5(x,y)=-x,\quad \mu_6(x,y)=-x+y,\quad \mu_7(x,y)=y-x,\quad \mu_8(x,y)=-x+y+x,\quad \forall x, y\in G,$$

sont i.-d.g., sans être, en général, associatives.

Nous avons des exemples de multiplications qui sont i.-d. g. seulement quand G satisfait des conditions spéciales:

(c) $$\mu_9(x,y)=x+y+[x,y],\quad \mu_{10}(x,y)=y+[x,y]+x,\quad \mu_{11}(x,y)= \\ =y+[-x,-y]+x,\quad \forall x, y\in G,$$

sont des m.i.-d.g. si et seulement si les éléments de G satisfont à la condition:

(1.2) $$[x,y]+[z,x]=[z,x]+[x,y],\quad \forall x, y, z\in G.$$

Chaque groupe métabélien satisfait à (1.2), mais il y a des groupes par exemple ceux nilpotents de troisième ordre, qui satisfont à (1.2), sans être métabéliens.

Si on donne la multiplication:

(d) $$\mu_{12}(x,y)=f(x)+g(y),\quad \forall x, y\in G,\quad f, g\in \mathrm{Map}\,(G,G),$$

alors $\mu_{12}\in \mathrm{Mult}_i\, G$ si et seulement si g satisfait à la condition:

(1.3) $$g(y+z)=g(y)-g(0)+g(z),\quad \forall x, y\in G.$$

Definition 1.2. Une fonction $g\in \mathrm{Map}\,(G,G)$ est appellée *infra-additive*, si elle satisfait à la condition (1.3). Nous désignons l'ensemble des fonctions infra-additives sur G par $A(G)$ et ses éléments sont obtenus comme la somme ponctuelle d'un endomorphisme de G et d'une fonction constante sur G. $A(G)$ est un groupe par rapport à la somme ponctuelle si et seulement si G est abélien. Dans ce cas, $(A(G), +, \circ)$ est un infra-presque anneau à gauche et un presque anneau à droite.

Si $f\in \mathrm{Map}\,(G,G)$, $g\in \mathrm{End}\, G$, alors la multiplication:

(e) $$\mu_{13}(x,y)=[f(x), g(y)],\quad \forall x, y\in G,$$

est i.-d.g. (de plus, elle est une m.d.g.), si et seulement si les images $f(G)$ et $g(G)$ sont contenues dans un sous-groupe métabélien de G.

La «deviation de la linéarité» d'une fonction $f \in \mathrm{Map}(G, G)$, avec la propriété $f(0)=0$, définit une multiplication:

(f) $$\mu_{14}(x, y) = f(x+y)-f(y)-f(x), \quad \forall x, y \in G,$$

qui este m.i.-d.g. si et seulement si $g_x \in A(G)$, $\forall x \in G$, où $g_x(y)=f(x+y)-f(y)$, $\forall y \in G$.

Soit $(I, +)$ un sous-groupe de G, qui est un infra-presque anneau à gauche par rapport à $+$ et μ. Si $f \in \mathrm{Hom}(G, I)$ a les propriétés: $f \circ f = f$ et la restriction de f à I est un endomorphisme de l'infra-presque anneau I, alors la multiplication définie par:

(1.4) $$\tilde{\mu}(x, y) = \mu(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in G,$$

est i.-d.g. et associative sur G.

Definition 1.3. Si $(G, +, \cdot)$ est un presque anneau à gauche et $(G, +, *)$ est un infra-presque anneau à gauche, alors nous appellons $(G, +, *)$ un *infra-presque anneau de Dickson associé au presque anneau* $(G, +, \cdot)$, s'il existe un homomorphisme de demigroupes: $\Phi\colon (G, *) \to (\mathrm{Si}(G), \circ)$ (où $\mathrm{Si}(G) = A(G, +) \cap \mathrm{End}(G, \cdot)$, $\Phi(x) = \Phi_x$, $\forall x \in G$, et «$\circ$» est la composition des fonctions), tel qu'on ait:

(1.5) $$x * y = x \cdot \Phi_x(y), \quad \forall x, y \in G.$$

L'égalité (1.5) et l'associativité de «$*$» impliquent:

(1.6) $$x \cdot \Phi_x(y) \cdot \Phi_{x \cdot \Phi_x(y)}(z) = x \cdot \Phi_x(y) \cdot (\Phi_x \circ \Phi_y)(z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

Cette condition est satisfaite si Φ satisfait à la condition suffisante:

(1.7) $$\Phi_x \circ \Phi_y = \Phi_{x \cdot \Phi_x(y)}, \quad \forall x, y \in G,$$

ou, ce qui est la même chose, le diagramme:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\Phi \times \Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathrm{Si}(G) \times \mathrm{Si}(G) \arrow[d, "\circ"] \\ G \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Si}(G) \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\Psi(x, y) = (\sigma_x \circ \Phi_x)(y) = x \cdot \Phi_x(y)$, $\forall x, y \in G$, $\sigma_x(y) = x \cdot y$, $\forall x, y \in G$.

§.2. Propriétés de l'ensemble $\mathrm{Mult}_i\, g$

Une m.i.-d.g. $\mu\colon G \times G \to G$ a les propriétés:

(2.1) $$\mu(x, -z) = \mu(x, 0) - \mu(x, z) + \mu(x, 0), \quad \forall x, z \in G,$$

(2.2) $$\mu\left(x, \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\mu(x, y_j) - \mu(x, 0)\right) + \mu(x, y_n), \quad \forall x, y_j \in G,$$

$j=1, 2, \ldots, n$, qu'on peut démontrer en calculant $\mu(x, 0)=\mu(x, z-z)$ et, respectivement, en utilisant (1.1) et l'induction par rapport à n. Par l'addition de $-\mu(x, 0)$ à droite, la relation (1.1) devient:

$$\mu(x, y+z)-\mu(x, 0) = [\mu(x, y)-\mu(x, 0)]+[\mu(x, z)-\mu(x, 0)], \tag{2.3}$$

pour x, y, z arbitraires en G, ce qui nous suggère les notations:

$$v_x(y) = \mu(x, y)-\mu(x, 0), \quad \forall y\in G, \quad \forall x\in G, \tag{2.4}$$

$$\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)-\mu(x, 0), \quad \forall x, y\in G, \tag{2.5}$$

$$\eta(x) = \mu(x, 0), \quad \forall x\in G. \tag{2.6}$$

On voit que $v_x\in \operatorname{End} G$, donc on peut définir $v\in \operatorname{Map}(G, \operatorname{End} G)$ par $v(x)=v_x$, $\forall x\in G$. On voit aussi que $\bar{\mu}\in \operatorname{Mult}_g G$, tandis que $\eta\in \operatorname{Map}(G, G)$. Par exemple, pour la multiplication d'anneau faible ou de presque anneau faible sur $(A, +, \cdot)$, les images de la fonction v sont: $v_x(y)=x\cdot y+y$, respectivement: $v_x(y)=x\cdot y+ +(x+y-x)$ (premier type) et $v_x(y)=x\cdot y+\psi_1(y)$, respectivement $v_x(y)=x\cdot y+ +\varphi(x)+\psi_1(y)-\varphi(x)$ (2^{nd} type).

Quand $\mu\in \operatorname{Mult}_i G$ est à la fois une multiplication distributive à droite, alors la fonction η, donnée par (2.6), a les propriétés suivantes:

$$\mu(\eta(x), z) = \eta(x), \quad \forall x, z\in G, \tag{2.7}$$

$$\mu(z, \eta(x)) = \eta(\mu(z, x)), \quad \forall x, z\in G, \tag{2.8}$$

$$\eta\in \operatorname{End} G, \quad \eta\circ\eta = \eta, \tag{2.9}$$

$$\eta(\bar{\mu}(x, y)) = \bar{\mu}(x, \eta(y)), \quad \bar{\mu}(\eta(x), y) = 0, \quad \forall x, y\in G, \tag{2.10}$$

c'est-à-dire η est un endomorphisme de G (comme un G-groupe à gauche) et l'image de η est invariante, élément à élément, à la multiplication à droite avec des éléments de G.

Considérons maintenant $\mu_1, \mu_2\in \operatorname{Mult}_i G$. Leur somme ponctuelle est aussi un élément de $\operatorname{Mult}_i G$ si et seulement si on a $(\forall x, y, z\in G)$:

$$\begin{aligned} &[\mu_2(x, y)-\mu_2(x, 0)]+[-\mu_1(x, 0)+\mu_1(x, z)] = \\ &= [-\mu_1(x, 0)+\mu_1(x, z)]+[\mu_2(x, y)-\mu_2(x, 0)]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour que $\mu_1+\mu_2\in \operatorname{Mult}_i G$, il faut et il suffit que les sousgroupes engedrés par $P_j=\{\mu_j(x, y)/x, y\in G\}$, $j=1, 2$, en G, soient permutables élément à élément. La condition (2.11) est vérifiée par deux multiplications quelconques de l'ensemble $M_H=\{\mu/\mu\in \operatorname{Mult}_i G, \mu(x, y)\in H, \forall x, y\in G\}$, avec H un sous-groupe abélien de G (par exemple, son centre). De plus, cet ensemble est un groupe. Quand G est abélien, alors $\operatorname{Mult}_i G$ est aussi un groupe (abélien), comme on peut le vérifier. Si $\operatorname{Mult}_i G$ est un groupe, alors G est abélien. En effet, vu que $\mu+\mu\in \operatorname{Mult}_i G$, $\forall \mu\in \operatorname{Mult}_i G$, on prend $\mu(x, y)=y$, $\forall x, y\in G$, et on trouve $y+z=z+y$, $\forall y, z\in G$. Dans ce cas, $\operatorname{Mult}_g G$ est aussi un groupe [3] qui est un sous-groupe de $\operatorname{Mult}_i G$ et les ensembles $\operatorname{Map}(G, G)$, $\operatorname{End} G$, $\operatorname{Map}(G, \operatorname{End} G)$ sont des groupes. Ces quelques considérations nous conduisent à la suivante:

Proposition 2.1. (i) *Il existe une bijection* Φ: $\mathrm{Mult}_i\, G \to \mathrm{Map}\,(G, \mathrm{End}\, G) \times \times \mathrm{Map}\,(G, G)$ *où* $\Phi(\mu) = (\nu, \eta)$, $\forall \mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$, *les fonctions* ν *et* η *étant définies par* (2.4) *et* (2.6). (ii) *Il existe une bijection* Ψ: $\mathrm{Mult}_i\, G \to \mathrm{Mult}_g\, G \times \mathrm{Map}\,(G, G)$, *où* $\Psi(\mu) = (\bar{\mu}, \eta)$, $\forall \mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$, $\bar{\mu}$ *et* η *étant définies par* (2.5) *et* (2.6). (iii) *Les bijections ci-dessus sont des isomorphismes, quand* G *est abélien.*

Considérons $(\nu, \eta) \in \mathrm{Map}\,(G, \mathrm{End}\, G) \times \mathrm{Map}\,(G, G)$ et $(\bar{\mu}, \eta_1) \in \mathrm{Mult}_g\, G \times \mathrm{Map}\,(G, G)$. Les multiplications μ et μ_1, définies par $\mu(x, y) = \nu_x(y) + \eta(x)$, où $\nu_x = \nu(x)$, $\forall x, y \in G$ et $\mu_1(x, y) = \bar{\mu}(x, y) + \eta(x)$, $\forall x, y \in G$, sont i.-d.g. Nous avons: $\Phi(\mu) = (\nu, \eta)$ et $\Psi(\mu_1) = (\bar{\mu}, \eta_1)$, donc les applications Φ et Ψ sont surjectives. On peut voir qu'elles sont aussi injectives et, dans le cas G abélien, elles sont des homomorphismes des groupes considérés. Quand G est abélien, la restriction de Φ à $\mathrm{Mult}_g\, G$ est l'isomorphisme du Théorème 1.1 de Clay [3].

Quelques fonctions sur $\mathrm{Mult}_i\, G$ sont utiles dans l'étude du transfert des propriétés de G à $\mathrm{Mult}_i\, G$. La manière de leur construction est indiquée dans la:

Proposition 2.2. (i) *Soient les groupes* G, G', *les homomorphismes* f: $G \to G'$, h: $G' \to G$ *et* $g \in \mathrm{Map}\,(G, G)$. *On a une application* Λ: $\mathrm{Mult}_i\, G \to \mathrm{Mult}_i\, G$ *définie par* $\Lambda(\mu)(x', y') = f(\mu(g(x'), h(y')))$, $\forall \mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$, $\forall x', y' \in G'$. *Si* $\mu \in \mathrm{Mult}_g\, G$, *alors* $\Lambda(\mu) \in \mathrm{Mult}_g\, G'$. (ii) *Si* f *est un isomorphisme et* $h = g = f^{-1}$, *alors* Λ *est bijective.* (iii) *Pour* G, G' *abéliens, les applications de* (i) *et* (ii) *sont des isomorphismes de groupes.*

Dans la démonstration, on utilise l'additivité de f et h (pour (i)), la bijectivité de f (pour (ii)) et la distributivité de la composition d'un homomorphisme par rapport à l'addition des fonctions (cf. Zassenhaus [11], p. 72). On peut trouver une proposition analogue pour $\mathrm{Mult}_g\, G$ et $\mathrm{Mult}_g\, G'$, en utilisant la restriction de Λ à $\mathrm{Mult}_g\, G$. On obtient des conséquences utiles de ce théorème, si on prend $G' = G$ et des applications particulières pour f, g, h, par exemple: $g = I$ (l'application identique sur G), $f = g = I$; $h = g = I$. En particulier, si G est abélien et la fonction $f_n \in \mathrm{Map}\,(G, G)$ (où $f_n(x) = nx$, $\forall x \in G$) est un automorphisme de G, alors la fonction F_n: $\mathrm{Mult}_i\, G \to \mathrm{Mult}_i\, G$ définie par $F_n(\mu) = n\mu$, $\forall \mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$, est un automorphisme (ici n est un entier positif).

Dans ce qui suit, on considère G abélien. On peut utiliser la Proposition 2.1 pour trouver la structure du groupe $\mathrm{Mult}_i\, G$ dans certains cas où on connait la structure de $\mathrm{End}\, G$, par exemple quand G est une somme directe — complète ou pas — de groupes cycliques finis du même ordre ou infinis (on obtient ainsi des résultats qui généralisent ceux de L. Fuchs [7] et R. J. Clay [3]).

Il y a beaucoup de propriétés qui sont également vraies pour G, $\mathrm{Mult}_g\, G$ (voir [3]) et $\mathrm{Mult}_i\, G$. On a, par exemple, en utilisant les conséquences de la Proposition 2.2: 1. Si G est borné par n (naturel), c'e.-à-d. $nx = 0$, $\forall x \in G$, alors $\mathrm{Mult}_i\, G$ est borné par n et réciproquement. 2. Si $G[n] = \{x / x \in G, nx = 0\} = \{0\}$, alors $(\mathrm{Mult}_i\, G)[n] = \{0\}$. 3. Si G est sans torsion, alors $\mathrm{Mult}_i\, G$ est sans torsion. 4. Si $nG = G$ et $G[n] = \{0\}$, alors on a la même chose pour $\mathrm{Mult}_i\, G$.

§.3. Équivalence des multiplications infra-distributives

La Proposition 2.2 nous permet d'introduire une relation d'équivalence sur $\mathrm{Mult}_i\, G$:

$$(3.1) \qquad \mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow (G, +, \mu_1) \cong (G, +, \mu_2)$$

(comme infra-presque anneaux), où $\mu_1, \mu_2 \in \mathrm{Mult}_i\, G$ sont associatives.

Soit μ de $\mathrm{Mult}_i\, G$. La fonction $f_x, x \in G$, définie par:

$$f_x(y) = \mu(x, y), \quad \forall y \in G, \tag{3.2}$$

est un élément de $A(G)$. Si μ est associative, alors on a:

$$f_x \circ f_y = f_{f_x(y)}, \quad \forall x, y \in G. \tag{3.3}$$

Réciproquement, si $f \in \mathrm{Map}\,(G, A(G)), f(x) = f_x, \ \forall x \in G$, avec la propriété (3.3), alors $\mu: G \times G \to G$, définie par $\mu(x, y) = f_x(y), \ \forall x, y \in G$, est une m.i.-d.g. associative sur G.

On a donc la:

Proposition 3.1. *L'ensemble des multiplications i.-d.g. associatives sur G et l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Map}\,(G, A(G))$ qui satisfont* (3.3) *se correspondent bijectivement.*

En utilisant cette proposition, nous pouvons donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux m.i.-d.g. associatives sur G soient équivalentes.

Proposition 3.2. *Soit $\mu, \mu' \in \mathrm{Mult}_i\, G$, associatives, et f, f' les fonctions de* $\mathrm{Map}\,(G, A(G))$ *associées à μ, μ' par* (3.2). *La condition nècessaire et suffisante pour que $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$ soit un isomorphisme des infra-presque anneaux* $(G, +, \mu)$, $(G, +, \mu')$, *donc $\mu \sim \mu'$, est que f, φ et f' vérifient l'égalité:*

$$f_x = \varphi^{-1} \circ f'_{\varphi(x)} \circ \varphi, \quad \forall x \in G. \tag{3.4}$$

En vérité, $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$ est un isomorphisme d'infra-presque anneaux si et seulement si $\varphi(\mu(x, y)) = \mu'(\varphi(x), \varphi(y)), \ \forall x, y \in G$, c'est-à-dire $\varphi(f_x(y)) = f'_{\varphi(x)}(\varphi(y)) = (f'_{\varphi(x)} \circ \varphi)(y), \ \forall x, y \in G$, donc l'égalité (3.4).

Quand G est abélien et $A(G)$ est remplacé par End G, on obtient le théorème utilisé par J. R. Clay [4] pour déterminer l'ensemble des presque-anneaux à gauche nonisomorphes sur un groupe fini d'ordre inférieur à 9.

Quand G est un espace vectoriel à gauche sur un corps noncommutatif D, en ajoutant une condition supplémentaire concernant la multiplication avec les scalaires de D, on obtient les résultats de Williams [10].

§.4. D'autres propriétés de transfert

Maintenant nous étudions les conditions du transfert des propriétés de $\mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$ à $\bar{\mu} \in \mathrm{Mult}_g\, G$, associée à μ par (2.5) (l'associativité et la distributivité à droite).

Proposition 4.1. *Si $\mu \in \mathrm{Mult}_i\, G$ est associative et distributive à droite, alors $\bar{\mu}$, donnée par* (2.5), *est m.d.g. associative. Elle est aussi distributive à droite, si et seulement si on a:*

$$\bar{\mu}(y, z) + \mu(x, 0) = \mu(x, 0) + \bar{\mu}(y, z), \quad \forall x, y, z \in G. \tag{4.1}$$

On vérifie immédiatement l'associativité de $\bar{\mu}$:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(\bar{\mu}(x, y), z) &= \mu(\mu(x, y)-\mu(x, 0), z)-\mu(\mu(x, y)-\mu(x, 0), 0) = \\ &= \mu(\mu(x, y), z)-\mu(\mu(x, 0), z)+\mu(\mu(x, 0), 0)-\mu(\mu(x, y), 0) = \\ &= \mu(x, \mu(y, z))-\mu(x, 0)+[\mu(x, 0)-\mu(x, \mu(y, 0))+\mu(x, 0)]- \\ &-\mu(x, 0) = \mu(x, \mu(y, z)-\mu(y, 0))-\mu(x, 0) = \bar{\mu}(x, \bar{\mu}(y, z)),\end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in G$. $\bar{\mu}$ est distributive à droite, si et seulement si on a, successivement: $\bar{\mu}(x+y, z)=\bar{\mu}(x, z)+\bar{\mu}(y, z)$, $\mu(x+y, z)-\mu(x+y, 0)=\mu(x, z)-\mu(x, 0)+\mu(y, z)-$ $-\mu(y, 0)$, donc (4.1).

Si G est abélien, la condition (4.1) est toujours remplie et, dans les hypothèses de la Proposition 4.1, $(G, +, \bar{\mu})$ est un anneau.

Quand on fait cette construction pour $A(V)$, où V est un espace vectoriel à dimension finie, on obtient la représentation donnée par D. W. Blackett [2]. Si $f=l_f+c_f$, $g=l_g+c_g$ sont des éléments arbitraires de $A(V)$, où $l_f, l_g \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ et $c_f, c_g \in T_c(V)$, on a: $\bar{\mu}(f, g)=l_f \circ l_g+l_f \circ c_g$.

On a le résultat plus général:

Proposition 4.2. (i) *Si $(G, +, \mu)$ est un infra-presque anneau à gauche, alors $\bar{\mu}$, donnée par* (2.5), *est associative si et seulement si on a la relation:*

$$\bar{\mu}(\bar{\mu}(x, y), z) = \bar{\mu}(\mu(x, y), z), \quad \forall x, y, z \in G. \tag{4.2}$$

(ii) *Si $(G, +, \mu)$ est un infra-presque anneau bilatère et $\mu(0,0)=0$ alors* (4.2) *est èquivalente à la condition:*

$$\mu(x, \mu(0, y)) = \mu(0, y)+\mu(x, 0), \quad \forall x, y \in G. \tag{4.3}$$

De plus, $\bar{\mu}$ est infra-distributive à droite, si et seulement si on a:

$$\begin{aligned}&\mu(x, 0)+[-\mu(0, z)+\mu(y, z)-\mu(y, 0)]+\mu(0, 0) = \\ &= \mu(0, 0)+[-\mu(0, z)+\mu(y, z)-\mu(y, 0)]+\mu(x, 0), \quad \forall x, y, z \in G.\end{aligned} \tag{4.4}$$

On fait la preuve, en vérifiant toutes les affirmations. En général, les conditions de ce théorème ne sont pas satisfaites par les m.i.-d.g. Ainsi, $\mu_4(x, y)=x+a+y$, $\forall x, y \in G$, est une multiplication bilatéralement infra-distributive, mais elle satisfait à (4.3) seulement quand G est abélien. Dans ce cas, $\bar{\mu}_4(x, y)=y$, $\forall x, y \in G$, donc $\bar{\mu}_4$ est la multiplication triviale de Z-anneau à gauche (voir [1]).

Proposition 4.3. *Soit $(G, +, \bar{\mu})$ un presque anneau distributif, η une fonction sur G, μ une multiplication donnée par $\mu(x, y)=\bar{\mu}(x, y)+\eta(x)$, $\forall x, y \in G$. Si η satisfait à* (2.9) *et* (2.10), *μ et $\bar{\mu}$ satisfont à* (4.1), *alors μ est une m.i.-d.g., distributive à droite et associative.*

On peut vérifier directement toutes les affirmations de la proposition précédente.

Nous voyons ainsi que l'étude des m.i.-d.g. associatives ne se réduit pas à l'étude des m.d.g. associatives que dans des cas spéciaux.

Tandis que $\bar{\mu}$ a les mêmes identités à gauche que μ, l'affirmation réciproque n'est pas vraie que pour les identités distributives à gauche par rapport à μ. Une autre remarque: dans $\mathrm{Mult}_l\, G$ il y a beaucoup de multiplications associatives tout à fait banales. Un exemple: si $G=G_1\cup G_2$, où G_1, G_2 sont des parties disjointes nonvides de G, alors la multiplication donnée par:

$$\mu(x, y)=\begin{cases} x, & \forall x\in G_1, \quad \forall y\in G, \\ y, & \forall x\in G_2, \quad \forall y\in G, \end{cases} \tag{4.5}$$

est i.-d.g. et associative, les éléments de G_2 sont distributifs à gauche. Mais la multiplication asociée:

$$\bar{\mu}(x, y)=\begin{cases} 0, & \forall x\in G_1, \quad \forall y\in G, \\ y, & \forall x\in G_2, \quad \forall y\in G, \end{cases} \tag{4.6}$$

n'est pas associative.

Bibliographie

[1] G. Berman, Silverman, R. J., Near rings, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 23—34.

[2] D. W. Blackett, The near-ring of affine transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 517—519.

[3] J. R. Clay, The group of left distributive multiplications on an abelian group, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968), 221—227.

[4] J. R. Clay, The near-rings on groups of low order, *Math. Z.* **104** (1968), 364—371.

[5] Al. Climescu, Anneaux faibles, *Bul. Inst. Politehn. Iaşi*, **7** (11), (1961), 1—6.

[6] Al. Climescu, A new class of weak rings (Romanian), *idem*, **10** (14) (1964), 1—4.

[7] L. Fuchs, Abelian groups, *Budapest*, 1958 (Chap. XII).

[8] Mirela Stefănescu, Infra-near rings of affine type, *An. Şt. Univ. Iaşi*, **24** (1978), 5—14.

[9] Mirela Stefănescu, Infra-near rings, *An. Şt. Univ. Iaşi*, **25** (1979), 45—56.

[10] R. E. Williams, A note on near rings over vector spaces, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 173—1975.

[11] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, *Leipzig*, 1937 (Chap. II).

DR. MIRELA STEFĂNESCU
FACULTY OF MATHEMATICS
UNIVERSITY "AL. I. CUZA"
IAŞI, 6000 (ROMANIA)

(Reçu le 26 juin 1977.)