Über modifizierte Lebesguesche Funktionen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. Es sei $\lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ eine nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen mit $\lambda_k\to\infty$ $(k\to\infty)$, und $l^2(\lambda)$ bezeichnet die Klasse der reellen Zahlenfolgen $a=\{a_k\}_1^\infty$, für die $\sum a_k^2\lambda_k<\infty$ besteht.

In folgenden sei $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ein System der Funktionen $\varphi_k(x)\in L(0, 1)$ $(k=1, 2, \ldots)$.

G. ALEXITS und A. SHARMA [1] haben den folgenden Satz bewiesen.

Satz A. *Gilt*

$$L_n(\varphi; x)=\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n\varphi_k(x)\varphi_k(t)\Big|\,dt=O(\lambda_n)\quad(x\in(0, 1);\ n=1, 2, \ldots), \tag{1}$$

und für jede Folge $b=\{b_k\}_1^\infty\in l^2$ *besteht*

$$\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n b_k\varphi_k(x)\Big|\,dx=O(1)\quad(n=1, 2, \ldots), \tag{2}$$

dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k(x) \tag{3}$$

im Falle $a\in l^2(\lambda)$ *im Intervall* $(0, 1)$ *fast überall.*

In der Arbeit [4] haben wir die folgenden Sätze bewiesen.

Satz B. *Ist* φ *ein Konvergenzsystem für* l^2 *dem Maß nach in* $(0, 1)$ *und gilt* (1), *dann konvergiert die Reihe* (3) *im Falle* $a\in l^2(\lambda)$ *in* $(0, 1)$ *fast überall.*

Satz C. *Gilt*

$$L_n\Big(\frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}; x\Big)=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|dt=O(1)\quad(x\in(0, 1);\ n=1, 2, \ldots),$$

dann konvergiert die Reihe (3) *im Falle* $a\in l^2(\lambda)$ *in* $(0, 1)$ *fast überall.*

2. Erstens werden wir das Verhältnis der Sätze A und B betrachten. Wir bemerken, daß aus den Voraussetzungen des Sätzes A die Vorauszetzungen des Satzes B folgen. Es sei nähmlich b eine beliebige Folge aus l^2. Dann gibt es eine nichtabnehmende Folge $\mu=\{\mu_k\}_1^\infty$ von positiven Zahlen mit $\mu_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ und $\mu b=\{\mu_k b_k\}_1^\infty\in l^2$. Aus (2) ergibt sich

$$\int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^n \mu_k b_k \varphi_k(x)\Big|\, dx = O(1) \quad (n=1,2,\dots),$$

und also

$$\int_0^1 \Big|\sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k \varphi_k(x)\Big|\, dx = O(1) \quad (n<m).$$

Da

$$\sum_{k=n+1}^m b_k\varphi_k(x) = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{\mu_k}\mu_k b_k\varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m-1}\left(\frac{1}{\mu_k}-\frac{1}{\mu_{k+1}}\right)\left(\sum_{l=n+1}^k \mu_l b_l\varphi_l(x)\right)+\frac{1}{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k\varphi_k(x)$$

ist, erhalten wir

$$\int_0^1 \Big|\sum_{k=n+1}^m b_k\varphi_k(x)\Big| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=n+1}^{m-1}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\int_0^1 \Big|\sum_{l=n+1}^k \mu_l b_l\varphi_l(x)\Big|\, dx+\frac{1}{\lambda_m}\int_0^1 \Big|\sum_{k=n+1}^m \mu_k b_k\varphi_k(x)\Big|\, dx =$$

$$= O(1)\left(\sum_{k=n+1}^{m-1}\left(\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)+\frac{1}{\lambda_m}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\to 0 \quad (n<m;\ n\to\infty),$$

und daraus folgt, daß das System φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$ ist.

Wir bemerken, daß die Eigenschaft, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$ ist, ist mit der folgenden Eigenschaft äquivalent:

e) für jede positive Zahl ε gibt es eine meßbare Menge $E_\varepsilon(\subseteqq(0,1))$ mit $\operatorname{mes} E_\varepsilon \geqq 1-\varepsilon$ derart, daß für jede Folge $b\in l^2$

$$\int_{E_\varepsilon} \Big|\sum_{k=1}^n b_k\varphi_k(x)\Big|\, dx = O_\varepsilon(1) \quad (n=1,2,\dots)$$

gilt.

Ist nämhlich e) erfüllt, dann ergibt sich mit obiger Methode, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in der Menge E_ε ist. Da $\varepsilon>0$ beliebig gewählt werden kann, folgt es, daß φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach auch im Intervall $(0, 1)$ ist. Ist aber φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$, dann gibt es nach einem Satz von E. M. Nikišin [2] für jede positive Zahl ε eine meßbare Menge $E_\varepsilon(\subseteqq(0,1))$ mit $\operatorname{mes} E\geqq 1-\varepsilon$, eine positive Zahl M_ε und ein orthonormiertes System $\{\psi_k(\varepsilon;x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ derart, daß

$$\varphi_k(x) = M_\varepsilon\psi_k(\varepsilon;x) \quad (x\in E_\varepsilon;\ k=1,2,\dots)$$

besteht, und so gilt

$$\int_{E_\varepsilon} \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(x)\Big| \, dx = M_\varepsilon \int_{E_\varepsilon} \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k(\varepsilon;\, x)\Big| \, dx \leqq$$

$$\leqq M_\varepsilon \sqrt{\int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k \psi_k(\varepsilon;\, x)\Big)^2 dx} \leqq M_\varepsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

für jede Folge $b \in l^2$.

3. Mit M_B, bzw. mit M_C bezeichnen wir die Klasse der Koeffizientenfolgen a, für die die Reihe (3) bei jedem System φ mit der Bedingungen des Satzes B, bzw. des Satzes C in (0, 1) fast überall konvergiert. In folgenden werden wir die Klassen M_B und M_C untersuchen.

Nach den Sätzen B und C gelten

$$l^2(\lambda) \subseteqq M_B, \quad l^2(\lambda) \subseteqq M_C. \tag{4}$$

Die Klasse M_B ist es schwer zu charakterisieren. Man kann zeigen, daß

$$l^2(\lambda) \neq M_B \tag{5}$$

ist. Wegen $\lambda_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ gibt es solche Folge $a \in l$, die nicht zu $l^2(\lambda)$ gehört, und so folgt (5) aus dem

Satz I. *Es gilt* $l \subseteqq M_B$.

Beweis des Satzes I. Es sei nämlich $a \in l$, und sei φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in (0, 1). Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \int_{E_\varepsilon} |\varphi_k(x)| \, dx = M_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \int_{E_\varepsilon} |\psi_k(\varepsilon;\, x)| \, dx \leqq M_\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

woraus folgt, daß die Reihe (3) in E_ε fas überall konvergiert. Da $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \operatorname{mes} E_\varepsilon = 1$ ist, erhalten wir, daß die Reihe (3) in (0, 1) fas überall konvergiert, d. h. $a \in M_B$ ist.

Weiterhin gilt

Satz II. Es ist $l^2(\lambda) = M_C$.

Wegen (4) soll man zeigen, daß aus $a \notin l^2(\lambda)$ auch $a \notin M_C$ folgt. Es sei nun $a \notin l^2(\lambda)$. Dann gilt $a\sqrt{\lambda} = \{a_k \sqrt{\lambda_k}\}_1^\infty \notin l^2$. Nach einem bekannten Satz [3] gibt es ein orthonormiertes System $\chi = \{\chi_k(x)\}_1^\infty$ in (0, 1) mit $L_n(\chi;\, x) = O(1)$ $(x \in (0, 1);\; n = 1, 2, \ldots)$ derart, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$

in (0, 1) fast überall divergiert. Es sei

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\lambda_k}\, \chi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Für dieses System ist die Bedingung des Satzes C erfüllt, und die Reihe (3) divergiert in (0, 1) fast überall, d. h. gilt $a \notin M_C$.

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS—A. SHARMA, The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series, *Acta Sci. Math.,* **33** (1972), 1—10.

[2] E. M. НИКИШИН, О системах сходимости по мере для l^2, *Матем. заметки,* **13** (1973), 337—340.

[3] K. TANDORI, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.,* **28** (1967), 147—153.

[4] K. TANDORI, Weitere Bemerkungen über die Konvergenz und Summierbarkeit der Funktionenreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae,* **28** (1976), 119—127.

(Eingegangen am 28. Juli 1977.)