Structures syntopogènes probabilistes

Par LIVIU FLORESCU (Jaşi)

1. *Introduction.* La notion d'espace métrique probabiliste introduit par K. MENGER en 1942, a marqué le commencement du modelage des situations où l'on connaît seulement la probabilité avec laquelle une propriété avec contenu topologique a lieu. Parmi les auteurs qui ont abordé un tel problème nous mentionnons: M. J. FRANK [5], A. LEONTE [6], C. DUMITRESCU [3], D. SÂMBOAN et R. THEODORESCU [8].

Dans la construction des modèles de ce type il faut tenir compte de deux exigences naturelles:

(a) le modèle doit admettre une interprétation probabiliste en concordance avec la fait réel modelé,

(b) les relations entre les structures probabilistes qui constituent le modèle doivent être similaires avec celles entre les structures topologiques classiques (par des structures topologiques classiques nous comprendrons les structures topologiques, les structures de proximité et les structures uniformes).

La condition (a) nous assure que le modèle est applicable, et la condition (b) nous permettra de regarder notre modèle comme une variante probabiliste de la topologie classique.

C'est la présentation d'un tel modèle topologique probabiliste qui fait l'objet de l'ouvrage présent.

Nous utiliserons la méthode initiée par Á. CSÁSZÁR dans l'étude de la topologie ([2]), méthode qui met en évidence un terme primitif commun pour les structures topologiques classiques.

En [4] nous avons presenté un théorème de caractérisation des structures topologiques probabilistes, introduites par M. J. FRANK [5], dans le langage des ordres topogènes. Ce théorème nous a conduit à l'idée d'introduire une variante probabiliste des structures syntopogènes. Notamment, si $(X, \mathscr{S})$ est un espace syntopogène ([2], (7.2)), modelons cette situation où nous pouvons affirmer seulement avec une probabilité si deux sous-ensembles de X sont en relation $<$, où $<\in\mathscr{S}$. Convenons d'appeler ces structures — structures syntopogènes probabilistes (ssp) et nous nous sommes occupé de leur introduction en 2.

Á. CSÁSZÁR (cf. [2]) a mis en évidence, dans le cadre des structures syntopogènes, l'importance des structures qui possèdent deux des propriétés d'être: simples, parfaites ou symétriques. Ce fait justifie l'attention que nous accordons à l'étude des ssp simples et parfaites, simples et symétriques, parfaites et symétriques en 3, 4, respectivement 5, aussi bien que les dénominations structure de proximité probabiliste et structure uniforme probabiliste que nous adoptons en 4 et 5.

Pour toutes les structures introduites, nous avons donné une interprétation probabiliste et nous avons montré (cf. les propositions 4.2, 5.2, et 6.1) que les relations entre ces structures sont similaires avec celles qui existent entre les structures topologiques classiques.

En 6. nous sommes occupé de la structure topologique probabiliste des espaces métriques probabilistes.

L'ouvrage finit avec quelques conclusions concernant les relations entre les structures probabilistes introduites et celles de [3], [6] et [8].

Partout X est un ensemble quelconque et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X.

Les notations concernant les structures syntopogènes sont celles de [2].

Si toutes les relations d'une famille sont symétriques, parfaites, ou la famille est composée d'une seule relation, cette famille est dite symétrique, parfaite, respectivement simple.

Les notations utilisées pour les espaces topologiques probabilistes et pour les espaces métriques probabilistes sont celles de [5].

Nous appelons espace Menger un espace métrique probabiliste de type Menger.

Soit $I=[0, 1]$ et $T: I\times I\to I$ une t-fonction (une fonction croissante par rapport à l'ordre partiel sur $I\times I$ défini par $(\lambda_1, \mu_1)\leqq(\lambda_2, \mu_2)$ si et seulement si $\lambda_1\leqq\lambda_2$ et $\mu_1\leqq\mu_2$); T est dite continue à gauche si quels que soient $\lambda, \mu\in I, (\lambda_n)_{n\in N}, (\mu_n)_{n\in N}\subset I$ avec $\lambda_n\uparrow\lambda$ et $\mu_n\uparrow\mu$ il résulte que $T(\lambda_n, \mu_n)\uparrow T(\lambda, \mu)$ (où $\lambda_n\uparrow\lambda$ est équivalent avec $\lim_{n\to\infty} \lambda_n=\lambda$ et $\lambda_n\leqq\lambda$).

C'est T. Bîrsan qui a observé que aux hypothèses du théorème 4.1 de [5] qui se réfèrent à la structure topologique probabiliste induite sur un espace Menger, on doit ajouter celle de la continuité à gauche pour la t-norme. Puis nous observons que l'opérateur θ' introduit dans ce théorème satisfait à la propriété d'additivité finie, une propriété plus forte que celle de monotonie (cf. [5] § 2 (C4)). En tenant compte de ce qu'on vient de préciser nous proposons une définition un peu modifiée pour la notion d'espace topologique probabiliste:

Soit T une t-fonction; une application $\theta: \mathscr{P}(X)\times I\to\mathscr{P}(X)$ est dite θ-fermeture sur X si $\{\theta(\cdot, \lambda): \lambda\in I\}$ est une famille d'opérateurs de fermeture Čech (cf. [1], 14 A.1) qui vérifient la condition de monotonie: $\lambda\leqq\mu$ entraîne $\theta(A, \mu)\subset\theta(A, \lambda)$ quel que soit $A\subset X$. Si θ est une θ-fermeture sur X et la condition $\theta(\theta(A, \mu), \lambda)\subset\subset\theta(A, T(\lambda, \mu))$ est vérifiée quels que soient $A\subset X, \lambda, \mu\in I$, le triplet (X, θ, T) est dit espace topologique probabiliste.

Dans cette définition nous avons modifié la condition (C1) de [5], qui implique $\theta(\Phi, 0)=X$ (où Φ est l'ensemble vide). La seule justification de cette condition est nature probabiliste; parce qu'elle n'est pas naturelle et parce qu'elle est incommodante dans ce qui suit, nous avons préféré la condition usuelle $\theta(\Phi, 0)=\Phi$ qui permet un traitment unitaire des opérateurs de la famille $\{\theta(\cdot, \lambda): \lambda\in I\}$.

2. *Structures syntopogènes probabilistes.* Soit $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ deux ensembles de de relations sur $\mathscr{P}(X)$. Nous dirons que $\mathscr{S}_1$ est moins fine que $\mathscr{S}_2$ (ou que $\mathscr{S}_2$ est plus fine que $\mathscr{S}_1$), et nous écrivons en ce cas $\mathscr{S}_1<\mathscr{S}_2$, si l'on peut trouver, pour toute relation $<_1\in\mathscr{S}_1$, une relation $<_2\in\mathscr{S}_2$ telle que $<_1\subset<_2$ (cf. [2], p. 19). La relation « $\sim$ », définie par $\mathscr{S}_1\sim\mathscr{S}_2$ si $\mathscr{S}_1<\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_2<\mathscr{S}_1$, est une équivalence ([2], (1.28)).

Définition 2.1. Soit $T: I\times I\to I$ une t-fonction, $\mathcal{S}_\lambda$, $\lambda\in I$, un ensemble d'ordres topogènes sur X dirigé à droite par rapport à l'inclusion, et $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_\lambda: \lambda\in I\}$. Nous dirons que le couple $(\mathcal{S}, T)$ s'appelle structure syntopogène probabiliste (ssp) sur X si:

(SP0) $\mathcal{S}_0=\{<_0\}$, où $A<_0 B$ si et seulement si $A=\Phi$ ou $B=X$,

(SP1) $\mathcal{S}_\mu<\mathcal{S}_\lambda$ quels que soient $\lambda, \mu\in I$, $\mu<\lambda$,

(SP2) quel que soit $<\in\mathcal{S}_{T(\lambda,\mu)}$ il existe $<'\in\mathcal{S}_\lambda$ et $<''\in\mathcal{S}_\mu$ tel que $<\subset<'\cdot<''$ ($A<'\cdot<''B$ si et seulement si il existe C tel que $A<'C<''B$, cf. [2], (1.19)). Si $(\mathcal{S}, T)$ est ssp sur X, nous dirons que le triplet $(X, \mathcal{S}, T)$ est un espace syntopogène probabiliste.

La motivation de l'épithète « probabiliste » est la suivante: soit $\mathcal{S}'$ une structure syntopogène sur X; alors quels que soient $\lambda\in I$ et $<\in\mathcal{S}_\lambda$ nous interpréterons $A<B$ par « la probabilité de l'événement $A<'B$ est $\geqq\lambda$ » où $<'\in\mathcal{S}'$.

Définition 2.2. Soit $(\mathcal{S}, T)$, $(\mathcal{S}', T)$ deux ssp sur X, oú $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_\lambda: \lambda\in I\}$, $\mathcal{S}'=\{\mathcal{S}'_\lambda: \lambda\in I\}$. Nous disons que $\mathcal{S}$ est moins fine que $\mathcal{S}'$ (ou que $\mathcal{S}'$ est plus fine que $\mathcal{S}$), et nous écrivons $\mathcal{S}<\mathcal{S}'$, si $\mathcal{S}_\lambda<\mathcal{S}'_\lambda$ quel que soit $\lambda\in I$. Si $\mathcal{S}<\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}'<\mathcal{S}$ nous disons que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalentes et on écrit dans ce cas $\mathcal{S}\sim\mathcal{S}'$ (évidemment « $\sim$ » est une équivalence sur la famille de ssp sur X).

Définition 2.3. Une ssp $(\mathcal{S}, T)$ sur X est dite symétrique, parfaite, ou simple si $\mathcal{S}_\lambda$ est symétrique, parfaite, respectivement simple, quel que soit $\lambda\in I$.

Remarques 2.1. Si $(\mathcal{S}, T)$ est une ssp simple sur X, les conditions (SP1) et (SP2) deviennent:

(SP1′) $<_\mu\subset<_\lambda$ quels que soient $\lambda, \mu\in I$ avec $\mu<\lambda$,

(SP2′) $<_{T(\lambda,\mu)}\subset<_\lambda\cdot<_\mu$ quels que soient $\lambda, \mu\in I$, où $<_\lambda$ est l'ordre topogène unique qui forme $\mathcal{S}_\lambda$.

2.2. Si $(\mathcal{S}, T)$ est une ssp symétrique sur X alors la condition (SP2) est équivalente à:

(SP2″) quel que soit $<\in\mathcal{S}_{T(\lambda,\mu)}$ il existe un $<'\in\mathcal{S}_\lambda$ et un $<''\in\mathcal{S}_\mu$ tel que $<\subset<''\cdot<'$.

2.3. Si $(\mathcal{S}, T)$ est une ssp sur X alors $\cup\mathcal{S}=\bigcup_{\lambda\in I}\mathcal{S}_\lambda$ est une structure syntopogène sur X si et seulement si $\mathcal{S}_1$ est une structure syntopogène sur X; une condition suffisante en est $T(1, 1)=1$.

Soit $(X, \mathcal{S}, T)$ un espace syntopogène probabiliste, où $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_\lambda: \lambda\in I\}$; convenons d'utiliser les notations $<_\lambda^t=\cup\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda^t=\{<_\lambda^t\}$ et $\mathcal{S}^t=\{\mathcal{S}_\lambda^t: \lambda\in I\}$ (cf. [2], (8.6)).

Quel que soit $<\in\mathcal{S}_\lambda$, on note par $<^p$ la relation définie par:

A $<^p B$ si et seulement si $\{x\}<B$ quel que soit $x\in A$, $\mathcal{S}_\lambda^p=\{<^p: <\in\mathcal{S}_\lambda\}$ et $\mathcal{S}^p=\{\mathcal{S}_\lambda^p: \lambda\in I\}$ (cf. [2], (4.7) et (8.10)). La proposition suivante est une version probabiliste des théorèmes (8.5) et (8.10) de [2].

Proposition 2.1. *Soit* $(\mathcal{S}, T)$ *une ssp sur* X. *Alors* $(\mathcal{S}^t, T)$ *est la moins fine ssp simple plus fine que* $(\mathcal{S}, T)$, *et cependant* $(\mathcal{S}^p, T)$ *est la moins fine ssp parfaite plus fine que* $(\mathcal{S}, T)$.

Remarques 2.4. $(\mathscr{S}, T)$ est une ssp simple si et seulement si $\mathscr{S}=\mathscr{S}^t$.

2.5. $(\mathscr{S}, T)$ est une ssp parfaite équivaut à $\mathscr{S}=\mathscr{S}^p$.

2.6. $\mathscr{S}^{tt}=\mathscr{S}^t$; $\mathscr{S}^{pp}=\mathscr{S}^p$.

Ainsi que nous avons annoncé dans l'introduction, c'est l'étude des ssp simples et parfaites, simples et symétriques, restrictivement symétriques et parfaites que constitue le but de cette note.

Mentionnons l'intérêt de l'étude des structure syntopogènes probabilistes simples, symétriques et parfaites qui offrent une approximation en probabilité de l'inclusion sur $\mathscr{P}(X)$ (cf. [2], (14.1)).

3. *SSP simples et parfaites. Espaces topologiques probabilistes.* Soit $(\mathscr{S}, T)$ une sap simple et parfaite sur X, où $\mathscr{S}=\{\mathscr{S}_\lambda: \lambda\in I\}$ et $\mathscr{S}_\lambda=\{<_\lambda\}$ quel que soit $\lambda\in I$. Nous avons démontré en [4] les résultats suivants:

Proposition 3.1. *L'opérateur* $\theta: \mathscr{P}(X)\times I\to\mathscr{P}(X)$ *défini par* $\theta(A, \lambda)= =\bigcap\{B: A<^c_\lambda B\}$ *quels que soient* $\lambda\in I$ *et* $A\subset X$ *est une θ-fermeture sur* X *et* (X, θ, T) *est un espace topologique probabiliste.*

Une ssp simple et parfaite $(\mathscr{S}, T)$ et la structure topologique probabiliste (θ, T) qui est déduite d'après la proposition 3.1 sont dites associées.

Théorème 3.1. *Soit* (X, θ, T) *un espace topologique probabiliste. Alors on peut définir une seule ssp simple et parfaite associée à la structure* (θ, T).

Remarque 3.1. La θ-fermeture θ associée à $\mathscr{S}$ est continue à gauche (cf. [5], (LC)) si et seulement si:
$(*)$ $\{x\}<_\lambda A$ implique qu'il existe $\mu\in I, \mu<\lambda$ tel que $\{x\}\ _\mu A$ quels que soient $\lambda>0$ et $A\subset X, A\neq\Phi$.

Nous dirons en ce cas que $(\mathscr{S}, T)$ est continue à gauche.

4. *SSP simples et symétriques. Structures de proximité probabilistes.* Soit $(\mathscr{S}, T)$ une ssp simple et symétrique sur X, où $\mathscr{S}=\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ et $\mathscr{S}_\lambda=\{<_\lambda\}$ quel que soit $\lambda\in I$.

Remarque 4.1. D'après la proposition 2.1 nous savons que $(\mathscr{S}^p, T)$ est une ssp simple et parfaite. On dit que $\mathscr{S}^p$ est induite par $\mathscr{S}$.

Définition 4.1. Nous disons que la ssp simple et symétrique $(\mathscr{S}, T)$ est continue à gauche si on a vérifié la condition $(*)$.

On déduit immédiatement que la continuité à gauche de $(\mathscr{S}, T)$ entraîne la continuité à gauche de la structure induite $(\mathscr{S}^p, T)$.

C'est le théorème (7.26) de [2] qui nous a suggéré l'introduction des quelques structures qui se trouvent vis-à-vis des ssp simples et symétriques dans le même rapport que les structures syntopogènes simples et symétriques vis-à-vis des structures de proximité.

Considérons les relations $\delta_\lambda\subset\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ définies pour $\lambda\in I$ de la façon suivante:

A $\delta_\lambda B$ signifie que la formule $A<_\lambda X-B$ est en défaut (c'est à dire $A\nless_\lambda X-B$).

Proposition 4.1 *La famille des relations* $\{\delta_\lambda : \lambda \in I\}$ *satisfait les propriétés suivantes:*

1) $A\delta_\lambda B$ *si et seulement si* $B\delta_\lambda A$,
2) $\{x\}\delta_\lambda\{x\}$ *quel que soit* $x \in X$,
3) $\Phi\bar{\delta}_\lambda A$,
4) $A\delta_\lambda(B \cup C)$ *si et seulement si* $A\delta_\lambda B$ *ou* $A\delta_\lambda C$,

quels que soient $\lambda \in I, A, B, C \subset X$.

(PP0) $A\delta_0 B$ *si et seulement si* $A \neq \Phi$ *et* $B \neq \Phi$,

(PP1) $\mu < \lambda$ *entraîne* $\delta_\lambda \subset \delta_\mu$ *quels que soient* $\lambda, \mu \in I$,

(PP2) $A\bar{\delta}_{T(\lambda,\mu)}B$ *entraîne qu'il existe* C *tel que* $A\bar{\delta}_\lambda C$ *et* $B\bar{\delta}_\mu X-C$ *quels que soient* $\lambda, \mu \in I, A, B, C \subset X$.

(où $\bar{\delta}_\lambda$ *signifie la relation complémentaire de* δ_λ*).*

Remarque 4.2. Les propriétés 1)—4) expriment que δ_λ est une proximité dans le sens de Čech (cf. [1], 25 A. 1).

Le résultat établi dans la proposition 4.1 nous conduit naturellement à la définition suivante:

Définition 4.2. Soit X un ensemble quelconque, $T: I \times I \to I$ une t-fonction, $\mathscr{P} = \{\delta_\lambda\}_{\lambda \in I}$ une famille de relations sur $\mathscr{P}(X)$. Nous dirons que le couple $(\mathscr{P}, T)$ est une structure de proximité probabiliste sur X si les conditions 1)—4), (PP0)—(PP2) de la proposition 4.1 sont accomplies. Si $(\mathscr{P}, T)$ est une structure de proximité probabiliste sur X nous disons que le triplet $(X, \mathscr{P}, T)$ est un espace de proximité probabiliste.

Remarque 4.3. La condition (PP2) est équivalente (d'après la remarque 2.2) avec:

(PP2′) $A\bar{\delta}_{T(\lambda,\mu)}B$ entraîne qu'il existe C tel que $A\bar{\delta}_\mu C$ et $B\bar{\delta}_\lambda X-C$ quels que soient $\lambda, \mu \in I, A, B, C \subset X$.

On voit que, sans restreindre la généralité, nous pouvons prendre la t-fonction T symétrique.

Nous donnerons l'interprétation suivante pour la notion de structure de proximité probabiliste: soit δ une proximité dans le sens d'Efremovič sur X (une structure que satisfait les conditions 1)—4) de la proposition 4.1 et 5) $A\bar{\delta}B$ entraîne qu'il existe $C \subset X$ tel que $A\bar{\delta}C$ et $B\bar{\delta}X-C$); alors nous interpréterons $A\delta_\lambda B$ par « la probabilité de l'événement $A\delta B$ est $\geqq \lambda$ ».

Nous disons que la ssp simple et symétrique $(\mathscr{S}, T)$ et la structure de proximité probabiliste déduite d'après la proposition 4.1 sont associées.

Le théorème suivant met en évidence la liaison étroite qui existe entre les ssp simples et symétriques et les proximités probabilistes.

Théorème 4.1. *Chaque structure de proximité probabiliste sur* X *est associée à une seule ssp simple et symétrique.*

DÉMONSTRATION. En effet, soit $(\mathscr{P}, T)$ une structure de proximité probabiliste sur X, où $\mathscr{P} = \{\delta_\lambda : \lambda \in I\}$. Les relations $<_\lambda, \lambda \in I$, définies par $A <_\lambda B$ si et seulement si $A\bar{\delta}_\lambda X-B$ (cf. [2], (7.24)), sont des ordres topogènes symétriques sur X (cf. [2], (7.26)). Soit alors, quel que soit $\lambda\in I, \mathscr{S}_\lambda=\{<_\lambda\}$ et $\mathscr{S}=\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in I}$.

(SP0) $A<_0 B$ est équivalent à $A\bar{\delta}_0 X-B$ et cette relation a lieu si et seulement si $A=\Phi$ ou $B=X$.

(SP1′) quels que soient $\lambda, \mu\in I$ avec $\mu<\lambda, A<_\mu B$ entraîne $A\bar{\delta}_\mu X-B$ et d'après (PP1) $A\bar{\delta}_\lambda X-B$ d'où $A<_\lambda B$.

(SP2′) $A<_{T(\lambda,\mu)}B$ entaîne $A\bar{\delta}_{T(\lambda,\mu)}X-B$ et d'après (PP2) il existe C tel que $A\bar{\delta}_\lambda C$ et $X-B\bar{\delta}_\mu X-C$ d'où $A<_\lambda X-C<_\mu B$. Donc $<_{T(\lambda,\mu)}\subset<_\lambda\cdot<_\mu$. Il résulte que $(\mathscr{S}, T)$ est une ssp simple et symétrique.

Parce que $A\nless_\lambda X-B$ est équivalent à $A\delta_\lambda B$, quel que soit $\lambda\in I$, il résulte que $\mathscr{P}$ est la structure de proximité probabiliste associée à $(\mathscr{S}, T)$. L'unicité est évidente.

La proposition suivante met en évidence la relation entre les proximités probabilistes et les topologies probabilistes sur X.

Proposition 4.2. *Soit* $(\mathscr{P}, T)$ *la structure de proximité probabiliste associée à la ssp simple et symétrique* $(\mathscr{S}, T)$ *sur* X. *Soit* (θ, T) *la structure topologique probabiliste associée à la ssp simple et parfaite* $(\mathscr{S}^p, T)$ *Alors:* $\theta(A, \lambda)=\{x:\{x\}\delta_\lambda A\}$ *quels que soient* $\lambda\in I, A\subset X$.

Nous disons que la structure topologique probabiliste (θ, T) a été induite par la structure de proximité probabiliste $(\mathscr{P}, T)$.

5. *SSP parfaites et symétrique. Structures uniformes probabilistes.* Soit $(\mathscr{S}, T)$ une ssp parfaite et symétrique sur X, où $\mathscr{S}=\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in I}$.

Remarque 5.1. $(\mathscr{S}^t, T)$ est alors une ssp simple et symétrique (cf. [2], (8.35)), et $(\mathscr{S}^{tp}, T)$ est donc une ssp simple et parfaite sur X (cf. la remarque 4.1).

Nous disons qu'une ssp parfaite et symétrique $(\mathscr{S}, T)$ sur X est continue à gauche si:

(*) $\mathscr{S}_\lambda\subset\bigcup\limits_{\mu<\lambda}\mathscr{S}_\mu$ quel que soit $\lambda\in(0, 1]$.

Il est évident que $(\mathscr{S}^t, T)$ et $(\mathscr{S}^{tp}, T)$ sont continues à gauche si $(\mathscr{S}, T)$ l'est aussi.

En [2], (7.33) on montre qu'à une certaine structure syntopogène symétrique et parfaite on peut associée une structure uniforme et toute structure uniforme s'associe à une structure syntopogène symétrique et parfaite unique jusqu'à une équivalence. Cela nous conduit à essayer la caractérisation des ssp parfaites et symétriques dans le langage des « entourages ».

Proposition 5.1. *Quels que soient* $\lambda\in I, <\in\mathscr{S}_\lambda$ *nous notons*

$$U_<=\{(x, y)\in X\times X: \{x\}\nless X-\{y\}\} \quad et \quad \mathscr{B}_\lambda=\{U_<: <\in\mathscr{S}_\lambda\}.$$

Alors $\mathscr{B}_\lambda$ *est une base pour une semiuniformité* $\mathscr{U}_\lambda$ *sur* X; *la famille* $\mathscr{U}=\{\mathscr{U}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ *de toutes ces semiuniformités vérifie:*

(UP0) $\mathscr{U}_0=\{X\times X\}$,

(UP1) $\mathscr{U}_\mu\subset\mathscr{U}_\lambda$ quels que soient $\lambda, \mu\in I$ avec $\mu<\lambda$,

(UP2) quel que soit $U\in\mathscr{U}_{T(\lambda,\mu)}$ il existe $V\in\mathscr{U}_\lambda$ et $W\in\mathscr{U}_\mu$ tel que $V\circ W\subset U$. (Pour la notion de semiuniformité cf. [1], 23 A.3.)

Le résultat établi dans la proposition 5.1 nous suggère la définition suivante:

Définition 5.2. Soient X un ensemble, $T: I\times I\to I$ une t-fonction, $\mathscr{U}=\{\mathscr{U}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ une famille de filtres sur $X\times X$. Nous disons que le couple $(\mathscr{U}, T)$ est une structure uniforme probabiliste sur X si les conditions (UP0), (UP1), (UP2) et

1) $\Delta=\{(x, x): x\in X\}\subset U$,

2) $U^{-1}=\{(x, y): (y, x)\in U\}\in\mathscr{U}_\lambda$ quels que soient $\lambda\in I$, $U\in\mathscr{U}_\lambda$ sont accomplies.

Si $(\mathscr{U}, T)$ est une structure uniforme probabiliste sur X nous disons que le triplet $(X, \mathscr{U}, T)$ est un espace uniforme probabiliste.

Remarques 5.2. Les conditions 1) et 2) montrent que $\mathscr{U}_\lambda$ est une semiuniformité sur X quel que soit $\lambda\in I$.

5.3. La condition (UP2) est équivalente à:

(UP2′) quel que soit $U\in\mathscr{U}_{T(\lambda,\mu)}$ il existe $V\in\mathscr{U}_\lambda$ et $W\in\mathscr{U}_\mu$ tel que $W\circ V\subset U$. Donc nous ne restreindrons pas la généralité si nous considérons la t-fonction T symétrique.

Nous interpréterons $(x, y)\in U$ $(U\in\mathscr{U}_\lambda)$ par « la probabilité de l'événement $(x, y)\in U'$ $(U'\in\mathscr{U}')$ est $\geqq\lambda$ » où $\mathscr{U}'$ est une structure uniforme sur X.

En ce qui suit nous disons que la structure uniforme probabiliste de la proposition 5.1 est associés à la ssp parfaite et symétrique $(\mathscr{S}, T)$ et nous appelons les éléments de $\mathscr{U}_\lambda$ entourages. Le théorème suivant établit une liaison entre les ssp parfaites et symétriques et les structures uniformes probabilistes similaire avec celle établie en [2], (7.33).

Théorème 5.1. *Toute structure uniforme probabiliste sur X est associée à une ssp parfaite et symétrique. Deux ssp parfaites et symétriques à qui on associe une même structure uniforme probabiliste sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $(\mathscr{U}, T)$ une structure uniforme probabiliste sur X, où $\mathscr{U}=\{\mathscr{U}_\lambda\}_{\lambda\in I}$ et quel que soit $\lambda\in I$, $\mathscr{B}_\lambda$-la famille des entourages symétriques de $\mathscr{U}_\lambda$ ($\mathscr{B}_\lambda$ est une base pour la semiuniformité $\mathscr{U}_\lambda$). Soit $\mathscr{S}_\lambda=\{<_U\}_{U\in\mathscr{B}_\lambda}$, où $A<_U B$ si et seulement si $U[A]\subset B$. De [2], (7.33) on déduit immédiatement que $\mathscr{S}_\lambda$ est une famille d'ordres topogène parfaits et symétriques dirigée à droite. Parce que $\mathscr{B}_0=\{X\times X\}$ il résulte que $\mathscr{S}_0=\{<_0\}$ et alors (SP0) est établie. (SP1) Soient $\lambda, \mu\in I$ et $\mu<\lambda$; quelque soit $<_U\in\mathscr{S}_\mu$ nous avons $U\in\mathscr{B}_\mu\subset\mathscr{B}_\lambda$ donc $<_U\in\mathscr{S}_\lambda$ et alors $\mathscr{S}_\mu<\mathscr{S}_\lambda$. (SP2) Quel que soit $U\in\mathscr{B}_{T(\lambda,\mu)}$ il existe $U_1\in\mathscr{U}_\lambda$ et $U_2\in\mathscr{U}_\mu$ tel que $U_1\circ U_2\subset$ $\subset U$. Mais nous pouvons choisir $U_1\in\mathscr{B}_\lambda$ et $U_2\in\mathscr{B}_\mu$ et alors $<_{U_1}\in\mathscr{S}_\lambda$, $<_{U_2}\in\mathscr{S}_\mu$. Si $A<_U B$ il existe $C=U_2[A]$ tel que $U_2[A]\subset C\subset U_1[U_2[A]]\subset U[A]\subset B$; donc $A<_{U_2}C<_{U_1}B$, d'où $<_U\subset<_{U_2}\cdot<_{U_1}$; mais cette condition est équivalente à (SP2) (la remarque 2.2). Donc $(\mathscr{S}, T)$, où $\mathscr{S}=\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in I}$, est ssp parfaite et symétrique sur X. Parce que nous avons $\{x\}\nless_U X-\{y\}$ si et seulement si $(x, y)\in U$, quels que soient $U\in\mathscr{B}_\lambda$, $\lambda\in I$ il résulte que l'uniformité probabiliste associée à $(\mathscr{S}, T)$ est $(\mathscr{U}, T)$.

Supposons que $(\mathscr{S}', T)$, où $\mathscr{S}'=\{\mathscr{S}'_\lambda\}_{\lambda\in I}$, est une autre ssp parfaite et symétrique avec la même structure uniforme probabiliste associée $(\mathscr{U}, T)$.

Quels que soient $\lambda\in I$, $<_U\in\mathscr{S}_\lambda$, $U\in\mathscr{B}_\lambda$, il existe $<_1\in\mathscr{S}'_\lambda$ tel que $U_{<_1}\subset U$. Si $A<_U B$ alors $U[A]\subset B$ donc $U_{<_1}[A]\subset B$ ou équivalent $\{x\}<_1 X-\{y\}$ quels que soient $x\in A$ et $y\in X-B$. Donc $A<_1 B$ parce que $<_1$ est parfait et symétrique, d'où $<_U\subset<_1$ qui entraîne $\mathscr{S}_\lambda<\mathscr{S}'_\lambda$ quel que soit $\lambda\in I$ et donc $\mathscr{S}<\mathscr{S}'$. Quels que soient $\lambda\in I$, $<_1\in\mathcal{S}'_\lambda$, $A<_1 B$ entraîne $\{x\}<_1 X-\{y\}$ pour tous les éléments $(x, y)\in X\times X-U_{<_1}$; alors il existe $<_U\in\mathcal{S}_\lambda$ tel que $U_{<_U}=U\subset U_{<_1}$ d'où $(x, y)\overline{\in} U$ et alors $A<_U B$. Donc $<_1\subset<_U$ et alors $\mathcal{S}'_\lambda<\mathcal{S}_\lambda$ quel que soit $\lambda\in I$, ou $\mathcal{S}'<\mathcal{S}$; il résulte que $\mathcal{S}\sim\mathcal{S}'$.

La proposition suivante précise les relations entre les structures uniformes probabilistes, les structures de proximité probabilistes et les structures topologiques probabilistes sur un ensemble arbitraire.

Proposition 5.2. *Soit* $(\mathcal{U}, T)$ *une structure uniforme probabiliste associée à une ssp parfaite et symétrique* $(\mathcal{S}, T)$ *sur* X, *où* $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in I}$.

Soit $(\mathcal{P}, T)$ la structure de proximité probabiliste associée à $(\mathcal{S}^t, T)$ et (θ, T) la structure topologique probabiliste associée à $(\mathcal{S}^{tp}, T)$.

Alors:

(i) $\mathcal{P}=\{\delta_\lambda\}_{\lambda\in I}$, où $A\delta_\lambda B$ si et seulement si $U[A]\cap B\neq\Phi$ quels que soient $\lambda\in I$ et $U\in\mathcal{U}_\lambda$.

(ii) $\theta(A, \lambda)=\bigcap\{U[A]: U\in\mathcal{U}_\lambda\}$ quels que soient $\lambda\in I, A\subset X$.

Nous disons que $(\mathcal{P}, T)$ est la structure de proximité probabiliste induite par $(\mathcal{U}, T)$ et (θ, T) est la structure toplogique probabiliste induite par $(\mathcal{U}, T)$.

6. *La structure topologique probabiliste des espaces Menger.* Nous montrerons que la structure d'espace Menger induit, d'une manière naturelle, sur un ensemble quelconque, une structure uniforme probabiliste et donc, nous avons la proximité et la topologie probabiliste induites par cette structure uniforme probabiliste (cf. la proposition 5.2).

Théorème 6.1. *Soit* (X, F, T) *un espace Menger avec la t-norme* T *continue à gauche. Quels que soient* $\alpha>0$ *et* $\lambda\in I$ *nous définissons la relation* $<_{\alpha,\lambda}\subset\mathcal{P}(X)\times\times\mathcal{P}(X)$ *par* $A<_{\alpha,\lambda}B$ *si et seulement si* $A\times(X-B)\subset\{(x, y): F_{xy}(\alpha)\leqq\lambda\}$. *Soient* $\mathcal{S}_\lambda=\{<_{\alpha,\mu}: \alpha>0, \mu<\lambda\}$ *pour* $\lambda\in(0, 1]$ et $\mathcal{S}_0=\{<_0\}$. *Alors* $(\mathcal{S}, T)$, *où* $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_\lambda\}_{\lambda\in I}$, *est une ssp parfaite et symétrique sur* X *continue à gauche.*

DÉMONSTRATION. En effet, on déduit immédiatement que $<_{\alpha,\mu}$ est un ordre topogène parfait et symétrique, quels que soient $\alpha>0, \mu<\lambda$. Pour tous $<_{\alpha_1,\mu_1}$, $<_{\alpha_2,\mu_2}\in\mathcal{S}_\lambda$ il existe $<_{\alpha,\mu}\in\mathcal{S}_\lambda$ $(\alpha=\inf(\alpha_1, \alpha_2)>0,\quad \mu=\sup(\mu_1, \mu_2)<\lambda)$ un ordre plus fine une $<_{\alpha_1,\mu_1}$, $<_{\alpha_2,\mu_2}$.

Évidemment (SP1) est vérifié. (SP2) Si $<_{\alpha,\gamma}\in\mathcal{S}_{T(\lambda,\mu)}\gamma<T(\lambda, \mu)$; la continuité à gauche de T entraîne alors qu'il existe $\gamma_1<\lambda$ et $\gamma_2<\mu$ tel que $T(\gamma_1, \gamma_2)>\gamma$. Soient $<_{\alpha/2,\gamma_1}\in\mathcal{S}_\lambda$ et $<_{\alpha/2,\gamma_2}\in\mathcal{S}_\mu$.

Alors $<_{\alpha,\gamma}\subset<_{\alpha/2,\gamma_1}\cdot<_{\alpha/2,\gamma_2}$. La condition de continuité à gauche $(*)$ est évidemment accomplie.

Nous disons que la ssp parfaite et symétrique $(\mathcal{S}, T)$ est induite par la métrique probabiliste de l'espace.

Remarque 6.1. $\mathcal{S}_1$ est effectivement une structure syntopogène parfaite et symétrique sur X (cf. la remarque 2.3).

Proposition 6.1. *Soient* (X, F, T) *un espace Menger avec la t-norme* T *continue à gauche,* $(\mathcal{U}, T)$ *l'uniformité probabiliste associée à ssp parfaite et symétrique induite par la métrique probabiliste,* $(\mathcal{P}, T)$ *la proximité probabiliste induite par*

$(\mathscr{U}, T)$ et (θ, T) la structure toplogique probabiliste induite par $(\mathscr{P}, T)$, où $\mathscr{U} = \{\mathscr{U}_\lambda\}_{\lambda \in I}$, $\mathscr{P} = \{\delta_\lambda\}_{\lambda \in I}$.

Nous noterons $U_{\alpha,\mu} = \{(x, y) \in X \times X: F_{xy}(\alpha) > \mu\}$ quels que soient $\alpha > 0$ et $\mu \in [0, 1)$. Alors:

(i) $\mathscr{B}_\lambda = \{U_{\alpha,\mu}\}_{\alpha>0, \mu<\lambda}$ est une base pour $\mathscr{U}_\lambda$, quel que soit $\lambda \in I$.

(ii) $A\delta_\lambda B$ si et seulement si, quels que soient $\alpha > 0$ et $\mu < \lambda$, il existe un $x \in A$ et un $y \in X - B$ tel que $F_{xy}(\alpha) > \mu$.

(iii) $\theta(A, \lambda) = \bigcap_{\alpha>0} \bigcap_{\mu<\lambda} \bigcup_{y \in A} \{x\colon F_{xy}(\alpha) > \mu\}$.

Remarques 6.2. On introduit une structure uniforme sur un espace Menger (X, F, T) en [10] pour qui une base est formée des ensembles:

$U(\alpha, \lambda) = \{(x, y): F_{xy}(\alpha) > 1 - \lambda\}$ quels que soient $\alpha > 0, \lambda > 0$. La condition qui s'impose sur T en th.1 de [10] est équivalente avec la continuité à gauche en $(1, 1) \in I \times I$. Parce que $\mathscr{U}_1 = \bigcup_{\lambda \in I} \mathscr{U}_\lambda$ est une uniformité (cf. la remarque 6.1) il résulte que la proposition 6.1 généralise la théorème ci-dessus. Nous remarquons en outre que δ_1 est une proximité dans le sens Efremovič et $\theta(\cdot, 1)$ est un opérateur de fermeture Kuratowski sur X. D'après ce que nous établirons (cf. l'exemple ci-dessous), $\mathscr{U}_\lambda, \delta_\lambda, \theta(\cdot, \lambda)$ n'ont pas, en général, ces propriétés si $\lambda < 1$.

6.3. La θ-fermeture θ de la proposition 6.1 coïncide avec la θ-fermeture θ' de [5], th. 4.1.

7. Conclusions. Plusieurs auteurs s'ont occupé des structures similaires avec celles qui ont été décrites ci-dessus. Ainsi A. Leonte [6] et C. Dumitrescu [3] introduisent les notions de proximité stochastique et respectivement celle de proximité statistique. A. Leonte démontre en [6] que chaque métrique probabiliste de type Menger induite une proximité stochastique, mais la θ-fermeture examinée dans la proposition 5 de l'ouvrage mentionné ne satisfait pas la condition: $\theta(\theta(\cdot, \mu), \lambda) \subset \subset \theta(\cdot, T(\lambda, \mu))$.

Suivant la suggestion faite en [6], de fortifier le système des axiomes qui définit la proximité stochastique, C. Dumitrescu introduit en [3] la proximité statistique qui induite (cf. la proposition 1 de [3]) un opérateur de θ-fermeture idempotent. Mais, en général, un espace Menger n'induit pas une telle structure de proximité, et nous pouvons constater cela d'après l'exemple suivant.

Soit R l'ensemble des nombres réels et $G_1, G_2: R \to I$ définies par $G_1 = 1/2\varphi_{(0,1]} + \varphi_{(1,+\infty)}$, $G_2 = \varphi_{(1,+\infty)}$, où φ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A. Soit $T: I \times I \to I$ définie par $T(a, b) = \sup(a + b - 1, 0)$. On sait (cf. [10]) que T est une t-norme, et évidemment T est une fonction continue sur $I \times I$. On en déduit immediatement que (R, F, T) est un espace Menger, où la métrique probabliste est définie par:

$$F_{xy} = \begin{cases} H & \text{si} \quad x = y \\ G_1 & \text{si} \quad 0 < |x-y| \leqq 1 \\ G_2 & \text{si} \quad |x-y| > 1 \end{cases}$$

où $H = \varphi_{(0,+\infty)}$ et $|a|$ est la valeur absolue de a.

Les ensembles $U_{\alpha,\mu}$ de la proposition 6.1 sont:

$$U_{\alpha,\mu}=\begin{cases}\{(x,y)\colon |x-y|\leqq 1\} & \text{si} \quad \alpha\leqq 1\\ R\times R & \text{si} \quad \alpha>1\end{cases}$$

pour tous $\mu<1/2$. Alors $U_{1,1/3}\in\mathscr{U}_{1/2}$ mais, quels que soient $\alpha>0$ et $\mu<1/2$, $U_{\alpha,\mu}\circ U_{\alpha,\mu}\not\subset U_{1,1/3}$. Donc $\mathscr{U}_{1/2}$ n'est pas uniformité sur X et alors $\delta_{1/2}$ n'est pas une proximité dans le sens Efremovič.

Maintenant nous pouvons affirmer que les structures de proximité probabilistes introduites par la définition 4.2 se placent entre les structures de proximité stochastique [6] et les structures de proximité statistique [3], et elles s'encadrent d'une manière plus naturelle entre les structures métriques probabilistes et les structures topologiques probabilistes

En [8], G. Sâmboan et R. Theodorescu, utilisant la relation qui existe entre les espaces métriques aléatoires (cf. [7] ch. 8) et les espaces Menger, ont construit, sur un espace Menger, une structure uniforme plus fine que l'uniformité introduite en [10].

Dans la situation spéciale étudiée par G. Sâmboan en [9] cette structure uniforme est équivalente avec celle de [10]. La remarque 6.2 met en évidence la liaison entre les semiuniformités d'une uniformité probabiliste sur un espace Menger et l'uniformité introduite en [8].

Bibliographie

[1] E. Čech, Topological Spaces, *Czechoslovac Academy of Sciences*, Prague, 1966.
[2] Á. Császár, Fondements de la topologie générale, *Akadémiai Kiadó, Budapest*, 1960.
[3] C. Dumitrescu, Spatii probabiliste de proximitate, *St. Cerc. Mat.* **26** (1974), 737—743.
[4] L. Florescu, A characterization of the probabilistic topological spaces, *An. St. Univ. Iași, Tom.* XXIII, s.I-a 1977, 25—28.
[5] M. J. Frank, Probabilistic topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **34** (1971), 67—81.
[6] A. Leonte, Proximitate stocastică, *St. Cerc. Mat.* **26** (1974), 1095—1100.
[7] O. Onicescu, Nombres et systèmes aléatoires, *Editions de l'Académie de la R. P. Roumanie, Bucarest, Editions Eyrolles, Paris,* 1964.
[8] G. Sâmboan, R. Theodorescu, Structuri uniforme aleatoare. *Com. Acad. R. P. R.* **11** (1961), 1311—1313.
[9] G. Sâmboan, Spatii metrice statistice, *St. Cerc. Mat.* **28** (1976), 365—368.
[10] B. Schweizer, A. Sklar, E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 673—675.

(Reçu le 23 novembre 1977.)