Fortsetzbare äquivalente Potenzreihen

Von KARL-HEINZ INDLEKOFER (Paderborn) und ROLF TRAUTNER (Ulm)

1. Einleitung. Es sei $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ der offene, $\overline{\mathbf{D}}=\{z\in\mathbf{C}: |z|\leqq 1\}$ der abgeschlossene Einheitskreis der z-Ebene. Für ein vorgegebenes $\zeta_0\in\mathbf{D}$, $\zeta_0\neq 0$, definiert

$$\Phi_{\zeta_0}(z)=\frac{1-\bar\zeta_0}{1-\zeta_0}\cdot\frac{z-\zeta_0}{1-\bar\zeta_0 z}$$

eine konforme und bijektive Abbildung Φ_{ζ_0} von $\overline{\mathbf{D}}$ auf sich.

P. TURÁN [15] warf 1958 die Frage auf, ob das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises eine konforme Invariante sei; Turáns überraschende Antwort lautete „nein". Er bewies nämlich die Existenz einer in $\mathbf{D}$ holomorphen Funktion f, deren Potenzreihe $\sum a_\nu w^\nu$ im Punkt $w=1$ konvergiert, wogegen die Potenzreihe¹) $\sum b_n z^n$ der zusammengesetzten Funktion $f^*=f\circ\Phi_{\zeta_0}$ in $z=\Phi_{\zeta_0}^{-1}=1$ divergiert. (Von einer solchen Funktion f sagt man auch, sie verhalte sich *konvergenz-schlecht unter der Abbildung* Φ_{ζ_0}). Die Fragestellung Turáns wurde in mannigfacher Hinsicht verallgemeinert (vgl. z.B. [1], [2], [9], [10], [11], [16]), und es wurden sogar explizite Beispiele von Funktionen angegeben, die sich konvergenz-schlecht verhalten (vgl. z. B. [7], [10], [11], [12]). Alle diese Beispiele waren über den Rand $\partial\mathbf{D}$ von $\mathbf{D}$ nicht fortsetzbar, und die allgemeinen Resultate sagten nichts aus, ob über $\partial\mathbf{D}$ fortsetzbare Funktionen existieren, die sich konvergenzschlecht verhalten. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit wird sein, daß die Existenz von in $\mathbf{D}$ holomorphen Funktionen gezeigt wird, die sich über den Rand $\partial\mathbf{D}$ außer $z=1$ analytisch fortsetzen lassen und sich konvergenzschlecht unter Φ_{ζ_0} verhalten, wobei $\zeta_0\in\mathbf{D}$ und $\zeta_0\neq 0$ ist. Das wichtigste Hilfsmittel zu diesem Resultat sind Kenntnisse über allgemeine Euler-Summierungsverfahren, die wir im Abschnitt 2 bewiesen. Im Abschnitt 4 verschärfen wir Satz 2 durch ein Ergebnis von ARONSZAJN.

2. Permanente Sonnenschein- und Euler-Verfahren. SONNENSCHEIN [13] führte 1949 die nach ihm benannte Klasse von Folgen-Folgen Matrixtransformationen ein. Eine solche Matrix $\{a_{n\nu}\}$ wird erzeugt durch eine Potenzreihe $u(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ mit Konvergenzradius $R>1$ und $u(1)=1$, über die Vorschrift

$$\{u(z)\}^n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu \quad (n=0,1,\ldots). \tag{1}$$

¹) Die Potenzreihen $\sum a_\nu w^\nu$ und $\sum b_n z^n$ heißen *äquivalent*.

Bemerkung. Nach dem Satz von Toeplitz—Schur ist das Folgen-Folgen Matrixverfahren $\{a_{n\nu}\}$ genau dann permanent, wenn

(a) $$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0 \quad \text{für jedes} \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = 1,$$

(c) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \quad \text{für} \quad n\to\infty \quad \text{ist.}$$

Es ist leicht zu sehen, daß (a) und (b) erfüllt sind, wenn $u(1)=1$ und $u(z)\in\overline{\mathbf{D}}$ für $z\in\overline{\mathbf{D}}$ ist.

B. Bajšanski [4] gab hinreichende Bedingungen für die Permanenz des Summierungsverfahrens $\{a_{n\nu}\}$ an, J. Clunie und P. Vermes [8] zeigten, daß diese Bedingungen auch notwendig sind. Genauer gilt: *Sei*

(i) *u holomorph für $|z|<R$, wobei $R>1$ ist;*

(ii) *$|u(z)|<1$ für $|z|=1$ außer für $z=1$;*

(iii) *$u(1)=1$;*

ist $\{a_{n\nu}\}$ durch (1) *definiert, so gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \quad \textit{für alle} \quad n = 0, 1, \ldots$$

genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

(iv) *Es ist* $\operatorname{Re} A\neq 0$, *wobei A durch*

$$u(z)-z^{\alpha} = Ai^{p}(z-1)^{p}+o\big((z-1)^{p}\big) \quad \textit{für} \quad z\to 1, \quad \alpha = u'(1)$$

definiert ist.

Allgemeine Euler-Summierungsverfahren sind transponierte Sonnenschein-Matrizen, die Reihen in Reihen überführen. Ist $w=u(z)$ eine Funktion, die (i), (ii) und (iii) erfüllt, und $f(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu w^\nu$ konvergent in $\mathbf{D}$, so ist auch $f(u(z))=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^\nu$ konvergent in $\mathbf{D}$. Die (allgemeine) Euler-Transformation $\{a'_{n\nu}\}$ ist erklärt durch

(2) $$b_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu} a_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

transformiert also die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ in die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und ist offenbar gegeben durch

$$a'_{n\nu} = a_{\nu n} \quad (\nu, n = 0, 1, \ldots).$$

Für die Partialsummen $A_\nu=\sum_{\mu\leqq\nu} a_\mu$ und $B_n=\sum_{m\leqq n} b_m$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu w^\nu = \frac{f(w)}{1-w} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n = \frac{f(u(z))}{1-z}.$$

Dann entspricht der Transformation (2) das Folgen-Folgen Summierungsverfahren

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha'_{n\nu} A_\nu \quad (n=0,1,\ldots) \tag{3}$$

mit

$$\alpha'_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{(u(z))^\nu}{z^{n+1}} \cdot \frac{1-u(z)}{1-z}\, dz; \tag{4}$$

hierbei ist (γ) ein einfach geschlossener Weg in $\mathbf{D}$, der $z=0$ im Innern enthält. Auf die Matrix $\{\alpha'_{n\nu}\}$ in (3) ist wieder das Kriterium von Toeplitz—Schur anwendbar. B. BAJŠANSKI [5] bewies für das Euler-Verfahren (2) bzw. (3): *Genügt* $u(z)$ *den Bedingungen* (i), (ii) *und* (iii), *so ist* (iv) *hinreichend für die Permanenz des Euler-Verfahrens* (2) *bzw.* (3). Wir führen dieses Ergebnis zum Abschluß, indem wir zeigen

Satz 1. *Sind* (i), (ii) *und* (iii) *für* $u(z)$ *erfüllt, so ist* (iv) *notwendig für die Permanenz des Euler-Verfahrens* (2) *bzw.* (3).

Wir zerlegen den Beweis in verschiedene Lemmata. Unter der Annahme, daß (iv) nicht gilt, werden wir

$$\sup_n \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}| = \infty \tag{5}$$

folgern.

Lemma 1. *Es existiert eine gerade Zahl* q *mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Zu beliebigem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, *so daß für jedes* n *und jedes* $\nu > \nu_0$

$$|\alpha'_{n\nu}| < \varepsilon \nu^{-1/q}$$

ist.

2) *Für genügend großes* n *ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}|^2 > \frac{c}{\nu^{1/q}} \quad (c = \text{const.} > 0).$$

BEWEIS. Betrachtet man

$$\beta_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{u(z)^\nu}{z^{n+1}}\, dz,$$

so gelten die Behauptungen 1) und 2), wenn man dort $\alpha'_{n\nu}$ durch $\beta_{n\nu}$ ersetzt, nach [8], Lemma 3 und 4. Die $\alpha'_{n\nu}$ unterscheiden sich von $\beta_{n\nu}$ dadurch, daß unter dem Integral der Faktor $\dfrac{1-u(z)}{1-z}$ hinzukommt. Dieser ist in einer Umgebung von $\mathbf{D}$ analytisch und von 0 verschieden. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß unter den Voraussetzungen (i), (ii), (iii) nach einem Satz von JULIA (vgl. [6], S. 112) $\alpha = u'(1)$ reell und positiv ist. Man sieht nun leicht, daß die Abschätzungen von [8] gültig bleiben.

Lemma 2. *Es existiert eine Konstante* $K_0 > 0$, *so daß*

$$\sup_{\nu} \sum_{n \geqq K_0 \nu}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}| < \infty$$

ist.

BEWEIS. Wir wählen in (4) für (γ) den Weg $|z|=r$, $1<r<R$; dann existiert ein $K>0$, so daß für alle $K \geqq K_0$

$$\sup_{|z|=r} \frac{|u(z)|^{1/K}}{r} \leqq \delta < 1$$

ist. Setzt man $K=n/\nu$ $(\geqq K_0)$, so folgt

$$|\alpha'_{n\nu}| = O(\delta^n)$$

und daraus die Behauptung.

Lemma 3. *Mit der Konstanten* K_0 *aus Lemma* 2 *gilt*

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{0 \leqq n \leqq K_0 \nu} |\alpha'_{n\nu}| = \infty.$$

BEWEIS. Mit der Bezeichnung $\alpha'_\nu := \sup_n |\alpha'_{n\nu}|$ gilt nach Lemma 1

$$\nu^{1/q} \alpha'_\nu \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty.$$

Nun ist

$$\alpha'_\nu \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}| \geqq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}|^2$$

und wiederum nach Lemma 1

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha'_{\nu n}| \geqq \lim_{n \to \infty} \frac{c}{\alpha'_\nu \nu^{1/q}} = \infty.$$

Wegen Lemma 2 ist somit Lemma 3 bewiesen.

BEWEIS VON SATZ 1. Wir haben mit Lemma 3

$$\lim_{N \to \infty} N^{-1} \sum_{\nu=N}^{2N} \sum_{n \leqq K_0 \nu} |\alpha'_{n\nu}| = \infty.$$

Andererseits ist

$$N^{-1} \sum_{\nu=N}^{2N} \sum_{n \leqq K_0 \nu} |\alpha'_{n\nu}| \leqq N^{-1} \sum_{n \leqq 2K_0 N} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}| \leqq 2K_0 \sup_n \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha'_{n\nu}|,$$

und damit ist Satz 1 bewiesen.

Beispiele. 1. Wir betrachten nach [5] die Funktion

$$u(z) = z^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^4. \tag{6}$$

Hier sind (i)—(iii) erfüllt ($|u(e^{i\varphi})| = 1 - \sin^4 \varphi/2$), ferner ist $\alpha=2$, $p=4$, $A = -\dfrac{1}{16}$. Also gilt auch (iv), und das von u erzeugte Euler-Verfahren ist regulär.

2. Wir betrachten die mit u aus (6) gebildete Funktion

$$u^*(z) = u(\Phi_{\zeta_0}(z)). \tag{7}$$

Die Entwicklung von Φ_{ζ_0} um $z=1$ ergibt zunächst

$$\Phi_{\zeta_0}(z) = \sum_{k=0}^{3} d_k(z-1)^k + O((z-1)^4),$$

$$d_1 = \frac{1-\zeta_0\bar{\zeta}_0}{(1-\zeta_0)(1-\bar{\zeta}_0)} > 0, \quad d_k = d_1\left(\frac{\bar{\zeta}_0}{1-\zeta_0}\right)^{k-1}, \quad k = 2, 3.$$

Man erhält

$$u^*(z) = 1+2d_1(z-1)+(2d_2+d_1^2)(z-1)^2+(2d_3+2d_1d_2)(z-1)^3+O((z-1)^4),$$

also $\alpha=2d_1$.

Ziehen wir hiervon $z^\alpha = \sum_{k=0}^{3}\binom{\alpha}{k}(z-1)^k+O((z-1)^4)$ ab, erhalten wir

$$u^*(z)-z^\alpha = c_2(z-1)^2+c_3(z-1)^3+O((z-1)^4).$$

Hierbei ist zunächst

$$c_2 = 2d_2+d_1^2-\binom{\alpha}{2} = \frac{d_1(\bar{\zeta}_0-\zeta_0)}{(1-\zeta_0)(1-\bar{\zeta}_0)}.$$

Ist also $\operatorname{Im}\zeta_0\neq 0$, so ist $p=2$ und $A=-c_2\neq 0$, $\operatorname{Re} A=0$. Ist $\operatorname{Im}\zeta_0=0$, so betrachten wir zusätzlich

$$c_3 = \frac{2}{3}d_1\frac{\zeta_0}{(1-\zeta_0)^2}$$

Ist noch $\zeta_0\neq 0$, so ist $p=3$ und $A=-ic_3\neq 0$, $\operatorname{Re} A=0$. Also erzeugt u^* für alle $\zeta_0\in\mathbf{D}$, $\zeta_0\neq 0$ ein nicht permanentes Euler-Verfahren.

3. Fortsetzbare äquivalente Potenzreihen. Wir kommen nun zu unserem Hauptergebnis.

Satz 2. *Sei* $\zeta_0\in\mathbf{D}$, $\zeta_0\neq 0$. *Dann existiert eine über* $|z|=1$, $z\neq 1$, *fortsetzbare Funktion* f, *die sich konvergent-schlecht unter* Φ_{ζ_0} *verhält.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion u^* aus (7) die für $\zeta_0\in\mathbf{D}$, $\zeta_0\neq 0$ ein nicht permanentes Euler-Verfahren erzeugt. Also gibt es eine in $\mathbf{D}$ holomorphe Funktion $g(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu w^\nu$ mit konvergenter Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu$ während die Reihe $g(u^*(z))=\sum_{n=0}b_nz^n$ bei $z=1$ divergiert. Da u aus (6) ein permanentes Euler—Verfahren erzeugt, konvergiert die Reihe $f(z)=g(u(z))=\sum_{\nu=0}^{\infty}a'_\nu z^\nu$ bei $z=1$ und ist über $|z|=1$, $z\neq 1$, analytisch fortsetzbar. Die Funktionen f und $f\circ\Phi_{\zeta_0}=g\circ u^*$ beweisen Satz 2.

Bemerkungen. 1. Nach einem Satz von Aronszajn [3] läßt sich f darstellen in der Form $f=f_1+f_2$, wobei f_1 analytisch ist in $\{|z-1|>\varepsilon\}$ und f_2 analytisch ist in einer Umgebung von $\overline{\mathbf{D}}$. Also sind f_2 und $f_2\circ\Phi_{\zeta_0}$ bei $z=1$ konvergent. Dann ist f_1 bei $z=1$ konvergent, dagegen $f_1\circ\Phi_{\zeta_0}$ bei $z=1$ divergent.

Wir erhalten somit die Existenz einer konvergenz-schlechten Funktion, deren Singularitäten auf eine beliebig vorgegebenene Umgebung von $z=1$ konzentriert sind.

2. Satz 2 gilt natürlich auch für absolute Konvergenz. So haben wir

Satz 2'. *Sei $\zeta_0\in\mathbf{D}$, $\zeta_0\neq 0$. Dann existiert eine über $|z|=1$, $z\neq 1$, fortsetzbare Funktion f, $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|<\infty$ ist, aber $f(\Phi_{\zeta_0}(z))=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ für $|z|=1$ absolut divergiert.*

Literatur

[1] L. Alpár, Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence. I, II, III. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **3** (1958), 1—12, **3**, (1958), 141—158, **5**, (1960), 97—152.

[2] L. Alpár, Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **7** (1962), 287—316.

[3] N. Aronszajn, Sur la décomposition des functions analytiques uniformes et leurs applications. *Acta Math.* **65**, (1935), 1—156.

[4] B. M. Bajsanski, Sur une classe générale de procédés de sommations du type d'Euler—Borel. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* **10**, (1956), 131—152.

[5] B. M. Bajsanski, Généralisation d'un théorème de Carlemann. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.* **12**, (1958), 101—108.

[6] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, *New York* 1945.

[7] J. Clunie, On equivalent power series. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18** (1967), 165—169.

[8] J. Clunie and P. Vermes, Regular Sonnenschein type summability methods. *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci.* (5) **45** (1959), 93—945.

[9] G. Halász, On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence, I, II, III. *Publ. Math. Debrecen*, **14** (1967), 63—68; **15** (1968) 23—31; *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **25** (1974), 81—87.

[10] K.-H. Indlekofer, Summierbarkeitsverhalten äquivalenter Potenzreihen. I, II, III, *Arch. Math.* **22**, (1971) 385—393; *Math. Nachr.* **50** (1971), 305—319; *Math. Nachr.* **55** (1973), 265—286.

[11] K.-H. Indlekofer, Bemerkungen über äquivalente Potenzreihen von Funktionen mit einem gewissen Stetigkeitsmodul. *Monatsh. Math.* **76** (1972), 124—129.

[12] K.-H. Indlekofer, Über die Invarianz der absoluten Konvergenz bei konformer Abbildung. *Math. Z.*, **134** (1973), 171—177.

[13] J. Sonnenschein, Sur les séries divergentes. *Bull. Acad. Royale de Belgique*, **35** (1949), 594—601.

[14] J. Sonnenschein, Sur les séries divergentes. *Thèse. Bruxelles* 1946.

[15] P. Turán, A remark concerning the behaviour of a power series on the periphery of its convergence circle. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), 19—26.

[16] R. Warlimont, Euler-Summierbarkeit konform äquivalenter Reihen, *Monatsh. für Math.* **81** (1976), 63—68.

(Eingegangen am 16. Dezember 1977.)