Eine Verallgemeinerung des Simplexalgorithmus zur Lösung des Tschebyscheff—Markoff Problems

Von G. FAZEKAS (Debrecen)

0. Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem folgenden Problem: Es seien die auf dem endlichen Intervall $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktionen $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t), \omega(t)$ und die reellen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ gegeben. Unter der Bedingung, daß $\sigma(t)$ eine auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$ monoton wachsende Funktion ist, welche die Integralgleichungen

$$\int_\alpha^\beta u_i(t)\, d\sigma(t) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{0.1}$$

erfüllt, werden die Extremalwerte des Integrals

$$\int_\alpha^\beta \omega(t)\, d\sigma(t) \tag{0.2}$$

und je eine der sie realisierenden Funktionen σ gesucht.

Ein Spezialfall der obigen Aufgabe stammt von P. L. Tschebyscheff (1874), und wurde in 1885 von A. A. Markoff gelöst. Die Gedanken von Tschebyscheff und Markoff haben sich später u. a. in der Wahrscheinlichkeitstheorie als sehr benützlich erwiesen. Viele Verfasser haben sich mit diesem Problem beschäftigt und interessante Ergebnisse erreicht. (S. besonders die Monographien [3] und [6].) Es sei hier nur M. G. Krein erwähnt, der für die Lösung der obigen Aufgabe — unter gewissen zusätzlichen Bedingungen — einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen hat.

Das Ziel dieser Arbeit ist durch die Verallgemeinerung des gewöhnlichen Simplex Algorithmus ein Verfahren zu entwickeln, mit deren Hilfe die Extremalwerte- und Stellen von (0.2) — mindestens unter den Bedingungen von Krein — approximiert werden können. Diese Möglichkeit beruht auf der Tatsache, daß die obige Aufgabe in gewissem Sinne als eine verallgemeinerte lineare Optimierungsaufgabe aufgefaßt werden kann.

Das Kapitel I. enthält einige Sätze über die Menge $V(\mathbf{b})$ der Funktionen $\sigma(t)$, welche die Gleichungen (0.1) erfüllen. Der Satz 1.3 karakterisiert die extremen Punkte von $V(\mathbf{b})$.

Im Kapitel II. wird gezeigt, daß aus einem beliebig gegebenen extremen Punkt ausgehend effektiverweise eine Folge σ_n der extremen Punkte von $V(\mathrm{b})$, für welche $\int\limits_\alpha^\beta \omega(t)\,d\sigma_n(t)$ monoton wächst, bestimmt werden kann.

Im Kapitel III. werden wir beweisen, daß unter den Bedingungen von Krein die folgende Behauptung gilt: Die oben erwähnte Folge σ_n kann so bestimmt werden, daß $\int\limits_\alpha^\beta \omega(t)\,d\sigma_n(t)$ gegen das Maximum (bzw. Minimum) von (0.2) konvergiert.

I.

Es bezeichne $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ die Menge aller auf dem endlichen Intervall $[\alpha, \beta]$ erklärten reellen Funktionen von beschränkter Variation, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) Jede Funktion $\sigma \in \mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ hat im Punkt α den Wert 0.

(ii) Jede Funktion $\sigma \in \mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ ist in jedem inneren Punkt von $[\alpha, \beta]$ von rechst stetig.

Es bedeute $\mathrm{NBV}_+[\alpha, \beta]$ die Teilmenge von $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$, deren Elemente monoton wachsend sind.

Mit der gewöhnlichen Funktionenaddition und Skalarmultiplikation bildet $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Benutzt man die totale Variation der Funktionen $\sigma \in \mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ als Norm, so bildet $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ einem Banachraum, der dem konjugierten Raum des Raumes $C[\alpha, \beta]$ isomorph und isometrisch ist. Neben der durch diese Norm erzeugten Topologie, welche die starke Topologie genannt wird, werden wir die $C[\alpha, \beta]$-oder schwache Topologie des Raumes $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ betrachten. Bezüglich der schwachen Topologie ist $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ ein lokal konvexer topologischer Vektorraum.

Eine Funktionenfolge $\sigma_n \in \mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ konvergiert schwach gegen eine Funktion $\sigma \in \mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$ dann und nur dann, wenn für jede auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$ stetige Funktion $\varphi(t)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\,d\sigma_n(t) \doteq \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\,d\sigma(t)$$

gilt.

Die Menge $\mathrm{NBV}_+[\alpha, \beta]$ ist ein schwach abgeschlossener konvexer Kegel des Raumes $\mathrm{NBV}[\alpha, \beta]$.

Es sei $\mathbf{u}\colon [\alpha, \beta] \to R^m$ eine stetige Vektorfunktion, deren Komponenten $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ über dem Intervall $[\alpha, \beta]$ linear unabhängig sind. Wir werden voraussetzen, daß ein Vektor $\mathbf{a} \in R^m$ existiert, für welchen

$$(1.1) \qquad \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}(t) \rangle > 0, \quad \forall t \in [\alpha, \beta],$$

gilt. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet dabei das innere Produkt im Raum R^m.

Führen wir noch die folgenden Bezeichnungen ein: Es seien

$$(1.2) \qquad U = \{\mathbf{u}(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\},$$

$$(1.3) \qquad \operatorname{pos} U \overset{?}{=} \left\{\mathbf{r} \in R^m \mid \mathbf{r} = \int\limits_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\,d\sigma(t),\ \sigma \in NBV_+[\alpha, \beta]\right\}.$$

Ist

$$U^* = \{\mathbf{r} \in R^m | \langle \mathbf{r}, \mathbf{y} \rangle \geqq 0, \ \forall \mathbf{y} \in U\}$$

die Polarmenge der Vektormenge U und $U^{**} = (U^*)^*$, so ist

$$U^{**} = \text{pos } U. \tag{1.4}$$

Man kann zeigen, daß die Menge $\text{pos } U$ im R^m ein konvexer abgeschlossener Kegel ist.

Definition 1.1. Ein Vektor $\mathbf{b} \in R^m$ wird bezüglich $\mathbf{u}(t)$ positiv genannt, falls für jeden Vektor $\mathbf{a} \in U^*$ die Ungleichung $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \geqq 0$ gilt. Ein bezüglich $\mathbf{u}(t)$ positiver Vektor heißt streng positiv, falls für jeden Vektor $\mathbf{a} \in U^*$ aus $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u}(t) \rangle \neq 0$ folgt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$. Ein bezüglich $\mathbf{u}(t)$ positiver Vektor, der nicht streng positiv ist, heißt singular positiv [6].

Wegen (1.4) stimmt die Menge aller bezüglich $\mathbf{u}(t)$ positiven Vektoren mit $\text{pos } U$ überein.

Es sei für einen beliebigen $\mathbf{b} \in R^m$

$$V(\mathbf{b}) = \left\{ \sigma \in NBV_+ [\alpha, \beta] \Big| \int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\sigma(t) = \mathbf{b} \right\}. \tag{1.5}$$

Offenbar ist die Menge (1.5) dann und nur dann nicht leer, wenn $\mathbf{b} \in \text{pos } U$.

Satz 1.1. *Die Menge* (1.5) *ist eine konvexe und schwach kompakte Teilmenge des Raumes* NBV $[\alpha, \beta]$.

Beweis. Es seien

$$\sigma_1, \sigma_2 \in V(\mathbf{b}), \quad \nu_1, \nu_2 \geqq 0, \quad \nu_1 + \nu_2 = 1.$$

Dann gilt einerseits

$$\sigma_0 = \nu_1 \sigma_1 + \nu_2 \sigma_2 \in NBV_+ [\alpha, \beta],$$

anderseits

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\sigma_0(t) = \nu_1 \int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\sigma_1(t) + \nu_2 \int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\sigma_2(t) = \mathbf{b}.$$

Daraus folgt $\sigma_0 \in V(\mathbf{b})$, und somit haben wir die Konvexität von $V(\mathbf{b})$ bewiesen.

Die folgende Behauptung ist bekannt: Ist X ein Banachraum, dann ist eine Teilmenge von X^* kompakt in der X-topologie des Raumes X^* genau dann, wenn sie in der X-topologie abgeschlossen, und in der metrischen Topologie beschränkt ist [1]. So haben wir nur zu zeigen, daß die Menge $V(\mathbf{b})$ schwach kompakt, und in der Norm der totalen Variation beschränkt ist.

Setzen wir voraus, daß die Folge $\sigma_n \in V(\mathbf{b})$ schwach gegen die Funktion $\sigma_0 \in$ NBV $[\alpha, \beta]$ konvergiert. Weil die Menge $V(\mathbf{b})$ eine Teilmenge von NBV$_+$ $[\alpha, \beta]$, und NBV$_+$ $[\alpha, \beta]$ schwach abgeschlossen ist, gilt $\sigma_0 \in$ NBV$_+$ $[\alpha, \beta]$. Da die Komponenten $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ der Vektorfunktion $\mathbf{u}(t)$ stetig sind, so folgt aus der schwachen Konvergenz der Folge $\sigma_n(t)$, daß für jeden Komponenten b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ des Vektors $\mathbf{b}$

$$b_i = \lim_{n \to \infty} \int_\alpha^\beta u_i(t)\, d\sigma_n(t) = \int_\alpha^\beta u_i(t)\, d\sigma_0(t) \tag{1.6}$$

gilt. Folglich erhalten wir

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{u}(t)\, d\sigma_0(t) = \mathbf{b}.$$

Hieraus folgt wegen (1.5), daß $\sigma_0 \in V(\mathbf{b})$, und somit haben wir bewiesen, daß $V(\mathbf{b})$ schwach abgeschlossen ist.

Es sei mit einem die Ungleichung (1.1) erfüllenden Vektor $\mathbf{a}$

$$v = \min_{t \in [\alpha, \beta]} \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}(t) \rangle.$$

Dann ist $v > 0$ und für beliebige $\sigma \in V(\mathbf{b})$ gilt

$$0 < \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}(t) \rangle\, d\sigma(t) \geqq v\big(\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)\big) = v\sigma(\beta).$$

Hieraus ergibt sich wegen der Monotonität der Funktion σ

$$0 \leqq \text{tot. var.}_{\alpha}^{\beta}\, \sigma(t) = \sigma(\beta) \leqq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / v. \tag{1.7}$$

Die Ungleichung (1.7) bedeutet, daß die Menge $V(\mathbf{b})$ bezüglich der Norm beschränkt ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Ist Y eine Teilmenge des Vektorraumes X, dann wird mit $\operatorname{ext} Y$ die Menge der extremen Punkte von Y bezeichnet.

Satz 1.2. *Ist* $\mathbf{b} \in \operatorname{pos} U$, *dann ist* $\operatorname{ext} V(\mathbf{b})$ *eine nichtleere Menge.*

Beweis. Wenn $\mathbf{b} \in \operatorname{pos} U$, dann ist wegen (1.3) und (1.5) $V(\mathbf{b})$ nichtleer. In [1] ist bewiesen, daß jede nichtleere Teilmenge eines lokal konvexen topologischen Vektorraumes einen extremen Punkt besitzt. Da NBV $[\alpha, \beta]$ bezüglich der schwachen Topologie ein lokal konvexer topologischer Vektorraum ist, so folgt der Beweis nach Satz 1.1.

Es sei für $\lambda \in (\alpha, \beta]$

$$e_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha \leqq t < \lambda, \\ 1, & \text{wenn } \lambda \leqq t \leqq \beta \end{cases} \tag{1.8}$$

und

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = \alpha, \\ 1, & \text{wenn } \alpha < t \leqq \beta. \end{cases} \tag{1.9}$$

Offenbar gilt für beliebige $\lambda \in [\alpha, \beta]$: $e_\lambda \in \text{NBV}_+ [\alpha, \beta]$ und

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{u}(t)\, de_\lambda(t) = \mathbf{u}(\lambda). \tag{1.10}$$

Jede Sprungfunktion $\sigma \in \text{NBV}_+ [\alpha, \beta]$, die endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, hat die Darstellung

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i e_{\lambda_i}(t), \tag{1.11}$$

wobei $\varrho_i \geqq 0$, $\lambda_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ist die Funktion (1.11) ein Element von $V(\mathbf{b})$, dann folgt aus (1.10), daß sich der Vektor $\mathbf{b}$ in der Form

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i \mathbf{u}(\lambda_i) \tag{1.12}$$

darstellen läßt und umgekehrt: zu jeder Darstellung der Form (1.12) des Vektors $\mathbf{b}$ (sofern $\varrho_i \geqq 0$ für $i=1, 2, \dots, k$ ist) gehört eine Funktion $\sigma \in \mathrm{NBV}_+ [\alpha, \beta]$, welche in der Form (1.11) darstellbar ist.

Es ist leicht zu sehen, daß eine nicht identisch verschwindende Sprungfunktion $\sigma \in \mathrm{NBV}_+ [\alpha, \beta]$, die endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, genau dann eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form (1.11) hat, wenn $\varrho_i > 0$ für $i=1, 2, \dots, k$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt. Die Darstellungen einer Sprungfunktion σ, in denen es eine von den λ_i verschiedene λ mit Koeffizienten $\varrho=0$ gibt, werden wir als von (1.11) nicht wesentlich verschieden betrachten.

Der folgende Satz charakterisiert die extremen Punkte der Menge $V(\mathbf{b})$.

Satz 1.3. *Eine nicht identisch verschwindende Funktion $\sigma_0 \in V(\mathbf{b})$ ist ein extremer Punkt von $V(\mathbf{b})$ dann und nur dann, wenn sie sich in der Form*

$$\sigma_0(t) = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i e_{\lambda_i}(t) \tag{1.13}$$

darstellen läßt, wobei $0 < k \leqq m$, $\alpha \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \leqq \beta$, $\varrho_i > 0$ für $i=1, 2, \dots, k$, und das System der Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \dots, \mathbf{u}(\lambda_k)$ im Raum R^m linear unabhängig ist.

Beweis. Notwendigkeit: Setzen wir voraus, daß $\sigma_0 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$, $\sigma_0 \not\equiv 0$. Es sei für $i=1, 2, \dots, m+1$:

$$\mathbf{r}_i = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{u}(t)\, d\big(1+\sigma_0(t)\big)^{1/i}. \tag{1.14}$$

Da $m+1$ Vektoren im Raum R^m abhängig sind, existieren solche reelle Zahlen $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$, welche die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m+1} v_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}, \tag{1.15}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} |v_i| = 1 \tag{1.16}$$

erfüllen. Es sei für $0 \leqq x < \infty$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m+1} v_i [(1+x)^{1/i} - 1]. \tag{1.17}$$

Die durch (1.17) erklärte Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

(a) $\varphi(0)=0$.

(b) φ ist auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetig.

(c) Für beliebige $0 \leqq x_1 \leqq x_2$ gilt die Ungleichung

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqq x_2 - x_1. \tag{1.18}$$

(d) φ hat höchstens $m+1$ Nullstellen in dem Intervall $[0, \infty)$.

Offensichtlich gelten (a) und (b). Um (c) zu beweisen betrachten wir für $z \geqq 1$ die Funktionen

(1.19) $$z^{1/i},\ z^{(i-1)/i}-1, \quad i = 2, 3, \dots, m+1.$$

Da diese monoton wachsend und nichtnegativ sind, so sind auch die Funktionen

(1.20) $$z - z^{1/i} = z^{1/i}(z^{(i-1)/i}-1), \quad i = 2, 3, \dots, m+1$$

für $z \geqq 1$ monoton wachsend und nichtnegativ. Durch die Einsetzung $z = 1+x$ erhalten wir aus (1.20), daß für beliebige $0 \leqq x_1 \leqq x_2$:

(1.21) $$(1+x_2)-(1+x_2)^{1/i} \geqq (1+x_1)-(1+x_1)^{1/i}, \quad i = 2, 3, \dots, m+1$$

gilt. Daraus folgt mit geeigneter Umordnung

(1.22) $$x_2 - x_1 \geqq (1+x_2)^{1/i}-(1+x_1)^{1/i}, \quad i = 2, 3, \dots, m+1.$$

So erhalten wir mit Hilfe von (1.16) und von (1.17) die folgenden Abschätzungen:

(1.23) $$|\varphi(x_2 - \varphi(x_1)| = \left|\sum_{i=1}^{m+1} v_i[(1+x_2)^{1/i}-(1+x_1)^{1/i}]\right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{m+1} |v_i|[(1+x_2)^{1/i}-(1+x_1)^{1/i}] \leqq \sum_{i=1}^{m+1} |v_i|(x_2-x_1) = x_2-x_1.$$

Das heißt (1.18) gilt.

Die Richtigkeit von (d) läßt sich wie folgt einsehen: Da die Funktion $x(z) = z^{(m+1)!}-1$ für $z \geqq 1$ streng monoton wachsend ist, so hat die Funktion $\varphi(x)$ ebensoviele Nullstellen im Intervall $[0, \infty)$, wie die Funktion

(1.24) $$\psi(z) = \varphi(x(z)) = \sum_{i=1}^{m+1} v_i z^{(m+1)!/i} - \sum_{i=1}^{m+1} v_i$$

im Intervall $[1, \infty)$. Da zwischen den Zahlen $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$ eine von Null verschiedene existiert, so ist $\psi(z)$ ein Polynom vom Grade $\geqq 1$ in z. Das Polynom $\psi(z)$ besitzt nach (1.24) höchstens $m+2$ von Null verschiedene Koeffizienten, so gibt es höchstens $m+1$ Zeichenwechslungen in der Folge der Koeffizienten von $\psi(z)$. Daraus folgt auf Grund des Satzes von Descartes [4], daß das Polynom $\psi(z)$ höchstens $m+1$ positive Wurzeln, und deswegen $\varphi(x)$ höchstens $m+1$ nichtnegative Wurzeln besitzt. Damit ist die Aussage (d) bewiesen.

Betrachten wir jetzt die Funktionen

(1.25) $$\sigma_1(t) = \sigma_0(t) + \varphi(\sigma_0(t)),$$

(1.26) $$\sigma_2(t) = \sigma_0(t) - \varphi(\sigma_0(t)).$$

Da $\sigma_0(\alpha) = 0$ und α_0 auf dem Intervall $(\alpha, \beta]$ von rechst stetig ist, besitzen σ_1 und σ_2 nach (a) und (b) ebenfalls diese Eigenschaften. σ_0 ist monoton wachsend und nichtnegativ, deshalb gilt wegen (c) für beliebige $\alpha \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \beta$ die Ungleichung

(1.27) $$|\varphi(\sigma_0(t_2)) - \varphi(\sigma_0(t_1))| \leqq \sigma_0(t_2) - \sigma_0(t_1).$$

Daraus geht die Richtigkeit der folgenden Ungleichungen hervor:

$$\sigma_1(t_1) = \sigma_0(t_1) + \varphi(\sigma_0(t_1)) \leqq \sigma_0(t_2) + \varphi(\sigma_0(t_2)) = \sigma_1(t_2), \tag{1.28}$$

$$\sigma_2(t_1) = \sigma_0(t_1) - \varphi(\sigma_0(t_1)) \leqq \sigma_0(t_2) - \varphi(\sigma_0(t_2)) = \sigma_2(t_2). \tag{1.29}$$

(1.28) und (1.29) bedeuten, daß σ_1 und σ_2 auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$ monoton wachsende Funktionen sind. Aus (1.14), (1.15) und (1.17) ergibt sich

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\varphi(\sigma_0(t)) = \mathbf{0}. \tag{1.30}$$

Die obigen Ergebnisse zusammenfassend erhalten wir, daß $\sigma_1, \sigma_2 \in V(\mathbf{b})$. Nach (1.25) und (1.26) gilt daneben offenbar die Beziehung

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{2}(\sigma_1(t) + \sigma_2(t)). \tag{1.31}$$

Mit Rücksicht darauf, daß $\sigma_0 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$ ist, folgt aus (1.31) $\sigma_1 \equiv \sigma_2$. Hieraus nach (1.25) und (1.26) ergibt sich

$$\varphi(\sigma_0(t)) \equiv 0. \tag{1.32}$$

Damit erhalten wir wegen (d), daß der Wertebereich der Funktion σ_0 höchstens $m+1$ Elemente enthält. Da σ_0 auch monoton ist, so ist σ_0 eine Sprungfunktion mit höchstens m Unstetigkeitsstellen, also nach (1.11) läßt sich σ_0 in der Form (1.13) darstellen.

Es bleibt übrig zu zeigen, daß die Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{u}(\lambda_k)$ im Raum R^m unabhängig sind. Auf Grund der Beziehung (1.12) gilt jedenfalls

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \varrho_i \mathbf{u}(\lambda_i). \tag{1.33}$$

Es sei mit irgendwelchen reellen Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$

$$\sum_{i=1}^k \nu_i \mathbf{u}(\lambda_i) = \mathbf{0}. \tag{1.34}$$

Da die Gleichung (1.34) mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert werden kann, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$|\nu_i| < \varrho_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.35}$$

Nach (1.33), (1.34) und (1.35) ergibt sich, daß die Funktionen

$$\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^k (\varrho_i + \nu_i) e_{\lambda_i}(t),$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{i=1}^k (\varrho_i - \nu_i) e_{\lambda_i}(t)$$

zu der Menge $V(\mathbf{b})$ gehören. Es ist aber auch

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{2}\sigma_1(t) + \frac{1}{2}\sigma_2(t),$$

so erhält man wegen $\sigma_0 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$, daß $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ist, und das bedeutet, daß

$$v_i = 0, \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Damit ist die Notwendigkeit bewiesen.

Hinlänglichkeit: Setzen wir voraus, daß die durch (1.13) erklärte Funktion σ_0 der Menge $V(\mathbf{b})$ gehört und die Funktionen $\sigma_1, \sigma_2 \in V(\mathbf{b})$ mit einer gewissen Zahl $0 < \mu < 1$ die Gleichung

$$\sigma_0(t) = \mu\sigma_1(t) + (1-\mu)\sigma_2(t) \tag{1.36}$$

erfüllen. Berücksichtigt man, daß σ_0 eine Sprungfunktion, und $0 < \mu < 1$ ist, so folgt hieraus, daß σ_1 und σ_2 auch Sprungfunktionen sind, und daß σ_1 und σ_2 keine von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ verschiedene Unstetigkeitsstelle besitzen. Deswegen sind σ_1 und σ_2 in der Form

$$\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i' e_{\lambda_i}(t),$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i'' e_{\lambda_i}(t)$$

darstellbar, wobei $\varrho_i', \varrho_i'' \geqq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, k$. Dann gilt offenbar

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i' \mathbf{u}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \varrho_i'' \mathbf{u}(\lambda_i)$$

und hieraus folgt wegen der Unabhängigkeit der Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{u}(\lambda_k)$, daß $\varrho_i' = \varrho_i'' = \varrho$ ist für $i = 1, 2, \ldots, k$. Das heißt $\sigma_1 = \sigma_2$ und folglich $\sigma_0 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1.1. (a) Es ist leicht zu beweisen, daß $\sigma_0 \equiv 0 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$ genau dann, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. In diesem Fall hat die Menge $V(\mathbf{b})$ keinen von $\sigma_0 \equiv 0$ verschiedenen extremen Punkt.

(b) Nennt man diejenigen Lösungen $\sigma(t)$ der für σ betrachteten Integralgleichung

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{u}(t)\, d\sigma(t) = \mathbf{b}, \tag{1.37}$$

die zu der Menge $NBV_+ [\alpha, \beta]$ gehören, zulässige Lösungen, so ist es klar, daß die Menge der zulässigen Lösungen von (1.37) mit $V(\mathbf{b})$ übereinstimmt. Eine zulässige Lösung von (1.37) heißt zulässige Basislösung, falls alle Vektoren $\mathbf{u}(\lambda)$, welche irgendeiner Zunahmestelle λ der Funktion σ entsprechen, ein linear unabhängiges System bilden. Eine zulässige Basislösung besitzt höchstens m Zunahmestellen. Verwendet man die obigen Benennungen, so läßt sich der Satz 1.3 in folgender Weise formulieren:

Die Menge ext $V(\mathbf{b})$ besteht aus allen zulässigen Basislösungen der Integralgleichung (1.37).

Dieser Satz zeigt eine enge Analogie mit dem folgenden Satz der linearen Programmierung:

Es sei A eine Matrix vom Typ $m\times n$ mit reellen Elementen, ferner es sei $\mathbf{x}\in R^n$ und $\mathbf{b}\in R^m$. Dann sind die extremen Punkte der Menge

$$K = \{\mathbf{x}\in R^m | A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \tag{1.38}$$

zulässige Basislösungen des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, und umgekehrt: jede zulässige Basislösung bildet einen extremen Punkt von (1.38).

(c) Der Satz 1.3 ist auch in [3] bewiesen, aber unter stärkeren Bedingungen, nämlich falls die Komponenten der Vektorfunktion ein Tschebyscheffsystem bilden.

Es sei $\omega: [\alpha, \beta]\to R$ eine stetige Funktion, und setzen wir voraus, daß die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_m, \omega$ auf dem Intervall $[\alpha, \beta]$ linear unabhängig sind. Es sei weiterhin für $\sigma\in \mathrm{NBV}\,[\alpha, \beta]$:

$$I(\sigma) = \int_\alpha^\beta \omega(t)\, d\sigma(t). \tag{1.39}$$

Offenbar ist (1.39) ein lineares Funktional des Raumes $\mathrm{NBV}\,[\alpha, \beta]$, das in bezug auf beiden von uns betrachteten Topologien von $\mathrm{NBV}\,[\alpha, \beta]$ stetig ist.

Satz 1.4. *Ist* $\mathbf{b}\in \mathrm{pos}\, U$, *dann existieren Funktionen* $\underline{\sigma}, \bar{\sigma}\in \mathrm{ext}\, V(\mathbf{b})$ *derart, daß für jede* $\sigma\in V(\mathbf{b})$

$$I(\underline{\sigma}) \leqq I(\sigma) \leqq I(\bar{\sigma})$$

gilt.

Beweis. Da die Menge $V(\mathbf{b})$ schwach kompakt und das Funktional (1.39) auf $V(\mathbf{b})$ schwach stetig ist, so nimmt (1.39) seine Extremalwerte über $V(\mathbf{b})$ an. Es seien

$$\gamma = \max_{\sigma\in V(\mathbf{b})} I(\sigma) \tag{1.40}$$

und

$$H = \{\sigma\in V(\mathbf{b}) | I(\sigma) = \gamma\}. \tag{1.41}$$

Es ist klar, daß $H\subseteq V(\mathbf{b})$ und $H\neq\emptyset$ ist. Nach dem Satz 1.1 ist H beschränkt bezüglich der totalen Variationsnorm, anderseits ist H abgeschlossen in der schwachen Topologie. Daraus folgt, daß H eine schwach kompakte Menge ist. Berücksichtigt man die zum Beweis des Satzes 1.2 durchgeführten Überlegungen, so ergibt sich hieraus, daß ext H nichtleer ist. Setzen wir voraus, daß für $\bar{\sigma}\in \mathrm{ext}\, H$ und $\sigma_1, \sigma_2\in V(\mathbf{b})$ die Gleichung

$$\bar{\sigma} = \mu\sigma_1+(1-\mu)\sigma_2, \quad 0 < \mu < 1 \tag{1.42}$$

gilt. Dann ist nach (1.39)

$$\gamma = I(\bar{\sigma}) = \mu I(\sigma_1)+(1-\mu)\, I(\sigma_2) \tag{1.43}$$

und wegen $I(\sigma_1)\leqq\gamma$, $I(\sigma_2)\leqq\gamma$ und $0<\mu<1$ folgt hieraus

$$I(\sigma_1) = I(\sigma_2) = \gamma. \tag{1.44}$$

Durch Vergleich mit (1.41) erhalten wir $\sigma_1, \sigma_2 \in H$, somit kann (1.42) nur dann gelten, wenn $\sigma_1=\sigma_2$ ist. Daraus ergibt sich $\bar{\sigma}\in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$.

Im Fall des Minimums läßt sich der Beweis genauso durchführen.

II.

Es sei gegeben $\alpha\leqq\lambda_1<\lambda_2<\dots\lambda_m\leqq\beta$ derart, daß die Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \mathbf{u}(\lambda_2), \dots, \dots, \mathbf{u}(\lambda_m)$ linear unabhängig sind. Weil nach unseren Voraussetzungen die Funktionen $u_i(t)$ linear unabhängig sind, kann man solche Vektoren auswählen.

Setzen wir voraus, daß reelle Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m\geqq 0$ existieren, für welche

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \mathbf{u}(\lambda_i) \tag{2.1}$$

gilt. Dann ist nach dem Satz 1.3

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i e_{\lambda_i} \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b}). \tag{2.2}$$

Da die Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \mathbf{u}(\lambda_2), \dots, \mathbf{u}(\lambda_m)$ im Raum R^m eine Basis bilden, läßt sich $\mathbf{u}(t)$ in der Form

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\mathbf{u}(\lambda_i) \tag{2.3}$$

ausdrücken, wobei $d_1(t), d_2(t), \dots, d_m(t)$ eindeutig bestimmte, in dem Intervall $[\alpha, \beta]$ stetige Funktionen sind. Führen wir noch die folgenden Funktionen ein: Es seien

$$z(t) = \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\omega(\lambda_i), \tag{2.4}$$

$$\delta(t) = z(t)-\omega(t). \tag{2.5}$$

Dann gilt der

Satz 2.1. (A) *Ist* $\delta(t)\geqq 0$ *für alle* $t\in[\alpha, \beta]$, *so ist die durch* (2.2) *erklärte Funktion* σ *eine Maximumstelle des Funktionals* (1.39).

(B) *Gibt es eine Stelle* $\lambda\in[\alpha, \beta]$ *mit* $\delta(\lambda)<0$, *dann*

(i) *existiert mindestens ein* i, $(1\leqq i\leqq m)$, *abhängig von* λ, *wofür* $d_i(\lambda)>0$; *weiterhin*

(ii) *existiert ein* $\sigma_1\in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$, *wofür*

$$I(\sigma_1) \geqq I(\sigma_0). \tag{2.6}$$

BEWEIS. Setzen wir voraus, daß für alle $t \in [\alpha, \beta]$ $\delta(t) \geqq 0$ ist. Dann gilt auf Grund der Formeln (2.1), (2.2), (2.3) für beliebige $\sigma \in V(\mathbf{b})$

$$\sum_{i=1}^{m} \varrho_i \mathbf{u}(\lambda_i) = \mathbf{b} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{u}(t)\, d\sigma(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\sum_{i=1}^{m} d_i(t) \mathbf{u}(\lambda_i)\Big)\, d\sigma(t) = \tag{2.7}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\int_{\alpha}^{\beta} d_i(t)\, d\sigma(t)\Big) \mathbf{u}(\lambda_i),$$

und hieraus folgt wegen der Unabhängigkeit der Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_1), \mathbf{u}(\lambda_2), \dots, \mathbf{u}(\lambda_m)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} d_i(t)\, d\sigma(t) = \varrho_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.8}$$

Da $\sigma(t)$ monoton wachsend und $\delta(t) \geqq 0$ ist, erhalten wir aus (2.4), (2.5) und (2.8), daß

$$I(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(t)\, d\sigma(t) \leqq \int_{\alpha}^{\beta} z(t)\, d\sigma(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, \omega(\lambda_i)\Big)\, d\sigma(t) = \tag{2.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\int_{\alpha}^{\beta} d_i(t)\, d\sigma(t)\Big) \omega(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \omega(\lambda_i) = I(\sigma_0).$$

Daraus folgt die Behauptung (A).

Es sei für eine λ_0 $\delta(\lambda_0) < 0$, und setzen wir voraus, daß für $i = 1, 2, \dots, m$ in Gegensatz zur Behauptung (i)

$$d_i(\lambda_0) \leqq 0 \tag{2.10}$$

gilt. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann erhält man aus (2.1) und (2.3), daß sich $\mathbf{b}$ in der Form

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \mathbf{u}(\lambda_i) - \varepsilon \mathbf{u}(\lambda_0) + \varepsilon \mathbf{u}(\lambda_0) = \tag{2.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \big(\varrho_i - \varepsilon d_i(\lambda_0)\big) \mathbf{u}(\lambda_i) + \varepsilon \mathbf{u}(\lambda_0)$$

ausdrücken läßt. Daraus ergibt sich wegen (2.10) und $\varepsilon > 0$, daß

$$\sigma_1 \doteq \sum_{i=1}^{m} \big(\varrho_i - \varepsilon d_i(\lambda_0)\big) e_{\lambda_i} + \varepsilon e_{\lambda_0} \in V(\mathbf{b}), \tag{2.12}$$

weiterhin

$$I(\sigma_1) = \sum_{i=1}^{m} \big(\varrho_i - \varepsilon d_i(\lambda_0)\big) \omega(\lambda_0) + \varepsilon \omega(\lambda_0) = \tag{2.13}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varrho_i \omega(\lambda_i) - \varepsilon \delta(\lambda_0) = I(\sigma_0) - \varepsilon \delta(\lambda_0).$$

Ist ε nun hinreichend groß, so wird $I(\sigma_1)$, wegen $\delta(\lambda_0) < 0$ beliebig groß. Das bedeutet, daß das Funktional $I(\sigma)$ über $V(\mathbf{b})$ unbeschränkt ist. Diese Tatsache widerspricht dem Satz 1.4, und somit ist die Behauptung (i) bewiesen.

Um (ii) zu beweisen, bestimme man ε_0 durch die Beziehung

$$\varepsilon_0 = \min_{d_i(\lambda_0)>0} \left\{\frac{\varrho_i}{d_i(\lambda_0)}\right\} = \frac{\varrho_j}{d_j(\lambda_0)}. \tag{2.14}$$

Offenbar ist $\varepsilon_0 \geqq 0$, weiterhin folgt aus (2.14)

$$\varrho_i - \varepsilon_0 d_i(\lambda_0) \geqq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m,$$

$$\varrho_j - \varepsilon_0 d_j(\lambda_0) = 0.$$

Betrachten wir jetzt die durch (2.12) erklärte Funktion σ_1 mit dieser ε_0. Es ist klar, daß $\sigma_1 \in V(\mathbf{b})$, nach dem Satz 1.3 gilt sogar $\sigma_1 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$, weil wegen $d_j(\lambda_0) > 0$ das Vektorsystem

$$\mathbf{u}(\lambda_0), \mathbf{u}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{u}(\lambda_{j-1}), \mathbf{u}(\lambda_{j+1}), \ldots, \mathbf{u}(\lambda_m)$$

unabhängig ist. Aus (2.13) folgt wegen $\varepsilon_0 \geqq 0$ und $\delta(\lambda_0) < 0$ (2.6), und somit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 2.1. (a) $I(\sigma_1) = I(\sigma_0)$ gilt für die durch (2.12) erklärte Funktion σ_1 dann und nur dann, wenn $\varepsilon_0 = 0$ ist.

(b) Ist eine Darstellung der Form (2.1) für $\mathbf{b}$ gegeben, dann kann man die Funktionen $d_1(t), \ldots, d_m(t), z(t), \delta(t)$ bestimmen, und entscheiden, ob $\delta(t)$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ nichtnegativ ist. Ist für gewisse λ_0 $\delta(\lambda_0) < 0$, dann kann man auf Grund des Satzes 2.1 irgendeinen der Vektoren $\mathbf{u}(\lambda_i)$ mit $\mathbf{u}(\lambda_0)$ vertauschend eine neue Darstellung von $\mathbf{b}$ einführen, so daß für die zugehörende $\sigma_1 \in \operatorname{ext} V(\mathbf{b})$ $I(\sigma_1) \geqq I(\sigma_0)$ gilt. Aus der neuen Darstellung ausgehend kann man das obige Verfahren wiederholen. Im allgemeinen entsteht so eine Folge $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ der extremen Punkte von $V(\mathbf{b})$ derart, daß

$$I(\sigma_0) \leqq I(\sigma_1) \leqq \ldots \leqq I(\sigma_n) \leqq \ldots$$

gilt. Führt man für $\mathbf{b}$ statt (2.1) die Darstellung

$$\mathbf{b} = \sum_{i \neq j} \varrho_i' \mathbf{u}(\lambda_i) + \varepsilon \mathbf{u}(\lambda_0) \tag{2.15}$$

ein, und bildet man die den Formeln (2.3), (2.4) und (2.5) entsprechenden Formeln:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i \neq j} d_i'(t) \mathbf{u}(\lambda_i) + d_0'(t) \mathbf{u}(\lambda_0), \tag{2.16}$$

$$z'(t) = \sum_{i \neq j} d_i'(t) \omega(\lambda_i) + d_0'(t) \omega(\lambda_0), \tag{2.17}$$

$$\delta'(t) = z'(t) - \omega(t), \tag{2.18}$$

dann kann man leicht beweisen, daß die folgende Beziehungen gelten:

(2.19) $$\varrho_i' = \varrho_i - \varepsilon d_i(\lambda_0), \quad i \neq j,$$

(2.20) $$d_i'(t) = d_i(t) - \frac{d_j(t)}{d_j(\lambda_0)} d_i(\lambda_0), \quad i \neq j,$$

$$d'(t) = \frac{d_j(t)}{d_j(\lambda_0)},$$

(2.21) $$\delta'(t) = \delta(t) - \frac{d_j(t)}{d_j(\lambda_0)} \delta(\lambda_0).$$

(c) Betrachten wir jetzt die folgende Aufgabe: Unter den Bedingungen

(2.22) $$\int_\alpha^\beta \mathbf{u}(t)\, d\sigma(t) = \mathbf{b},$$

(2.23) $$\sigma \in NBV_+[\alpha, \beta],$$

werden der Maximumwert des Funktionals

(2.24) $$I(\sigma) = \int_\alpha^\beta \omega(t)\, d\sigma(t)$$

und eine der Funktionen $\sigma \in \mathrm{NBV}_+ [\alpha, \beta]$, für welche der Maximumwert erreicht wird, gesucht.

Die bisherigen Ergebnisse und die obige Aufgabe sind dem Thema der linearen Programmierung und ihrer Grundaufgabe

(2.25) $$\begin{gathered} A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max \end{gathered}$$

sehr ähnlich. (In (2.25) ist A eine Matrix vom Typ $m \times n$, $\mathbf{b} \in R^m$ x, $c \in R^n$.) Die von uns betrachtete Aufgabe ist in gewissem Sinne eine stetige Verallgemeinerung der linearen Optimierunsaufgabe (2.25). Nämlich läßt sich die Vektorfunktion $\mathbf{u}$ als eine Matrix mit m Zeilen und „unendlich vielen Spalten" auffassen. Der Bedingung „$\mathbf{x} \geqq 0$" entspricht die Bedingung, daß „σ monoton wachsend ist", und dem Funktional „$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$" entspricht das Funktional „$I(\sigma)$".

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse (Vgl. Satz 1.4.) kann man eine Funktion σ_0, für die der Maximumwert von $I(\sigma)$ erreicht wird, unter den extremen Punkten der Menge $V(\mathbf{b})$ suchen. Da die Menge $V(\mathbf{b})$ im allgemeinen unendlich viele extremen Punkte besitzt, endet das in (b) erwähnte Verfahren, das dem gewöhnlichen Simplexalgorithmus ähnlich ist, nicht unbedingt nach endlich vielen Schritten. So entsteht die Frage: unter welchen Bedingungen konvergiert die Folge $I(\sigma_0), I(\sigma_1), \ldots$ gegen den Maximumwert von $I(\sigma)$, und wie kann man eine Funktion σ_0, für die der Maximumwert erreicht ist, approximieren. Der folgende Kapitel ist diesem Problem gewidmet.

III.

In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, daß die Komponenten der Vektorfunktion $\mathbf{u}(t)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ ein Tschebyscheff-System bilden.

Definition 3.1. Man sagt, daß die Komponenten der Vektorfunktion $\mathbf{u}(t)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ ein Tschebyscheff-System (oder kurz: T-System) von Ordnung $m-1$ bilden, falls für beliebige $\mathbf{a}\in R^m$ die Funktion

$$p(t) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}(t)\rangle \tag{3.1}$$

in dem Intervall $[\alpha, \beta]$ höchstens $m-1$ Nullstellen besitzt [3], [6].

Bemerkung 3.1. In [6] wurde bewiesen, daß wenn die Komponenten von $\mathbf{u}(t)$ ein T-System bilden, dann ein Vektor $\mathbf{a}\in R^m$ existiert, für den (1.1) gilt.

Für T-Systeme gilt der

Satz 3.1. *Die Komponenten der Vektorfunktion* $\mathbf{u}(t)$ *bilden ein T-System in dem Intervall* $[\alpha, \beta]$ *dann und nur dann, wenn für beliebige* $\alpha\leqq t_1<t_2<\ldots<t_m\leqq\beta$ *die Determinante*

$$\begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_1(t_2) & \ldots & u_1(t_m) \\ u_2(t_1) & u_2(t_2) & \ldots & u_2(t_m) \\ \vdots & & & \vdots \\ u_m(t_1) & u_m(t_2) & \ldots & u_m(t_m) \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

nicht verschwindet. (Das heißt, daß die Vektoren $\mathbf{u}(t_1), \ldots, \mathbf{u}(t_m)$ unabhängig sind [6].)

Definition 3.2. Ist die Determinante (3.2) für beliebige $\alpha\leqq t_1<t_2<\ldots<t_m\leqq\beta$ positiv, so sagt man, daß die Komponenten von $\mathbf{u}(t)$ ein T_+-System bilden [6].

Definition 3.3. Die Funktion $\omega(t)$ heißt die T-Fortsetzung (bzw. T_+-Fortsetzung) des Systems $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, falls $u_1(t), \ldots, u_m(t), \omega(t)$ ein T-System (bzw. T_+-System) von Ordnung m bilden [6].

Es sei

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad t=\alpha, \quad \text{oder} \quad t=\beta, \\ 2, & \text{wenn} \quad \alpha<t<\beta. \end{cases} \tag{3.3}$$

Satz 3.2. (A) *Ist* $\mathbf{b}\in \operatorname{pos} U$ *ein singular positiver Vektor, dann enthält die Menge* $V(\mathbf{b})$ *nur ein Element. In diesem Fall läßt sich* $\mathbf{b}$ *eindeutig in der Form*

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{N} \varrho_k \mathbf{u}(\lambda_k) \tag{3.4}$$

darstellen, wobei $\alpha\leqq\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_N\leqq\beta$, $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_N>0$.

(B) *Ist* $\mathbf{b}\in \operatorname{pos} U$ *ein streng positiver Vektor, so enthält die Menge* $V(\mathbf{b})$ *unabzählbar viele Elemente, aber es existieren genau zwei Darstellungen von* $\mathbf{b}$ *in der Form* (3.4) *derart, daß* $\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(\lambda_k)=m$ *ist.* [6].

Bemerkung 3.2. Ist $\mathbf{b}$ ein streng positiver Vektor, dann besitzen seine Darstellungen der Form (3.4), für die $\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(\lambda_k)=m$ ist, die folgende Struktur:

(a) für gerade m ist

$$\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N < \beta, \quad N = m/2,$$

oder

$$\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N = \beta, \quad N = (m/2)+1;$$

(b) für ungerade m ist

$$\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N < \beta, \quad N = (m-1)/2+1,$$

oder

$$\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N = \beta, \quad N = (m-1)/2+1.$$

Definition 3.4. Ist $\mathbf{b}$ ein streng positiver Vektor, so wird seine Darstellung (3.4), für die $\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(\lambda_k)=m$ ist, je nachdem $\lambda_N=\beta$ oder $\lambda_N<\beta$ ist, obere bzw. untere Hauptdarstellung genannt [6].

Bemerkung 3.3. Nach dem Satz 3.2 ist die obere bzw. die untere Hauptdarstellung eindeutig bestimmt.

Satz 3.3. *Es sei* $\mathbf{b}_n$ *eine Folge von bezüglich* $\mathbf{u}(t)$ *streng positiven Vektoren, die gegen einen bezüglich* $\mathbf{u}(t)$ *streng positiven Vektor* $\mathbf{b}$ *konvergiert. Es sei weiterhin die obere Hauptdarstellung von* $\mathbf{b}_n$:

$$\mathbf{b}_n = \sum_{k=1}^{N} \varrho_k^{(n)} \mathbf{u}(\lambda_k^{(n)}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.5}$$

die obere Hauptdarstellung von $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{N} \varrho_k \mathbf{u}(\lambda_k). \tag{3.6}$$

Dann gelten für $k=1, 2, \ldots, N$ *die folgenden Grenzübergänge:*

$$\varrho_k^{(n)} \to \varrho_k, \quad (n \to \infty), \tag{3.7}$$

$$\lambda_k^{(n)} \to \lambda_k, \quad (n \to \infty). \tag{3.8}$$

Beweis. Da ein Vektor existiert, für welchen (3.1) positiv ist, so sind nach dem Satz 1.1 die Zahlenfolgen $\varrho_k^{(n)}$ beschränkt. Wegen $\lambda_k^{(n)} \in [\alpha, \beta]$ sind auch die Folgen $\lambda_k^{(n)}$ beschränkt. Aber dann ist die Vektorfolge

$$\vartheta_n = (\varrho_1^{(n)}, \ldots, \varrho_N^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_N^{(n)}) \tag{3.9}$$

im Raum R^{2N} beschränkt, deswegen enthält jede Teilfolge von (3.9) eine konvergente Teilfolge. Es sei

$$\vartheta' = (\varrho_1', \ldots, \varrho_N', \lambda_1', \ldots, \lambda_N') \tag{3.10}$$

der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Teilfolge von (3.9). Dann gilt wegen der Stetigkeit von $\mathbf{u}(t)$

$$\sum_{k=1}^{N} \varrho_k' \mathbf{u}(\lambda_k') = \mathbf{b}. \tag{3.11}$$

Es ist klar, daß $\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(\lambda_k) \leqq m$, aber hier kann $<$ nicht stehen, weil dann $\mathbf{b}$ singular positiv wäre. Folglich bildet (3.11) — wegen $\lambda_N^{(n)} = \lambda_N' = \beta$ — eine obere Hauptdarstellung von $\mathbf{b}$. Hieraus folgt wegen der Eindeutigkeit der oberen Hauptdarstellung,

$$\varrho_k' = \varrho_k, \quad \lambda_k' = \lambda_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Wir enthalten also, daß der Grenzwert einer beliebigen konvergenten Teilfolge von (3.10)

$$\vartheta = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_N, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \tag{3.12}$$

ist. Da aus jeder Teilfolge von (3.10) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert (3.12) ausgewählt werden kann, so ergibt sich, daß (3.10) auch selbst gegen (3.12) konvergiert. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 3.4. (a) Ein analoger Satz gilt auch für untere Hauptdarstellungen.

(b) Es ist leicht zu beweisen, daß die Konvergenz der Folgen (3.7) und (3.8) gleichwertig mit der Tatsache ist, daß die zu der oberen Hauptdarstellung von $\mathbf{b}_n$ gehörende Funktionenfolge $\sigma_n \in \mathrm{NBV}_+ [\alpha, \beta]$ schwach gegen die zu der oberen Hauptdarstellung von $\mathbf{b}$ gehörenden Funktion $\sigma \in \mathrm{NBV}_+ [\alpha, \beta]$ konvergiert.

Satz 3.4. *Setzen wir voraus, daß die Komponenten der Vektorfunktion* $\mathbf{u}(t)$ *in dem Intervall* $[\alpha, \beta]$ *ein* T_+*-System bilden, und* $\omega(t)$ *ihre* T_+*-Fortsetzung ist. Es sei* $\mathbf{b}$ *ein bezüglich* $\mathbf{u}(t)$ *streng positiver Vektor. Das Funktional* (2.23) *nimmt sein Maximum* (Minimum) *über* $V(\mathbf{b})$ *bei der zu der oberen* (unteren) *Hauptdarstellung von* $\mathbf{b}$ *gehörenden* $\sigma \in V(\mathbf{b})$ *an. Dieses Maximum* (Minimum) *ist streng* [6].

Bemerkung 3.5. Ein Spezialfall des von uns betrachteten Optimierungsproblems wurde von P. L. TSCHEBYSCHEFF im Jahre 1874 aufgeworfen. A. A. MARKOFF hat das Problem von Tschebyscheff in seinem im Jahre 1885 erschienenen Artikel gelöst. Der Satz 3.4 ist die Lösung des sogenannten verallgemeinerten Tschebyscheff—Markoff Problems.

Setzen wir voraus, daß die Funktionen $\mathbf{u}(t)$ und $\omega(t)$ und der Vektor $\mathbf{b}$ den Bedingungen des Satzes 3.4 genügen. Die weiteren Untersuchungen werden wir auf den Fall ungerader m beschränken. (Der Fall der geraden m kann analog behandelt werden.)

Es sei für $\mathbf{b}$ eine Darstellung der Form (2.1) gegeben, und betrachten wir die Ausdrücke (2.3), (2.4), (2.5). Dafür gilt das

Lemma 3.1. (A)

$$d_i(\lambda_j) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{wenn} \quad i = j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

(B)

$$\delta(\lambda_i) = 0 \quad \textit{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.14}$$

(C) *$d_j(t)$ und $\delta(t)$ haben keine von den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ verschiedene Nullstelle in dem Intervall $[\alpha, \beta]$.*

(D) *Ist $\lambda_m < \beta$, dann ist $\delta(\beta) < 0$.*

(E) *Ist $t < \lambda_m$, dann ist* $\operatorname{sign} d_m(t) = \operatorname{sign} \delta(t)$.

Beweis. Offenbar läßt sich $d(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ in der Form

$$d_i(t) = \frac{|\mathbf{u}(\lambda_1) \ldots \mathbf{u}(\lambda_{i-1}) \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(\lambda_{i+1}) \ldots \mathbf{u}(\lambda_m)|}{|\mathbf{u}(\lambda_1) \ldots \mathbf{u}(\lambda_m)|} \tag{3.15}$$

ausdrücken, wobei $| \ldots |$ die mit Hilfe der entsprechenden Spaltenvektoren gebildete Determinante bezeichnet. Daraus folgt (3.13).

Verwendet man (2.4), (2.5) und (3.13), so ergibt sich

$$\delta(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{m} d_i(\lambda_j) \omega(\lambda_i) - \omega(\lambda_j) = \omega(\lambda_j) - \omega(\lambda_j) = 0 \tag{3.16}$$

für $j = 1, 2, \ldots, m$, das heißt, es gilt (B).

Entwickelt man geeigneterweise die Determinante in (3.15), so erhält man mit irgendwelchen reellen Zahlen $a_{i1}, \ldots, a_{im}$ für $d_i(t)$ den Ausdruck

$$d_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j(t) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u}(t) \rangle. \tag{3.17}$$

Somit ergibt sich, da die Komponenten von $\mathbf{u}(t)$ ein T-System bilden, daß $d_i(t)$ in dem Intervall $[\alpha, \beta]$ höchstens $m-1$ Nullstellen hat. Aber nach (A) sind die voneinander verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m$ Nullstellen von $d_i(t)$, deshalb besitzt $d_i(t)$ keine von diesen verschiedene Nullstelle.

Nach (2.4), (2.5) und (3.17) läßt sich $\delta(t)$ mit Hilfe gewisser reellen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_m$ in der Form

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(t) - \omega(t) \tag{3.18}$$

schreiben. Da $\omega(t)$ die T-Fortsetzung des Systems $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ ist, so ergibt sich (C), indem man (B) berücksichtigt und die vorhergehenden Überlegungen wiederholt.

Nach (B) und (C) gilt für $\delta(t)$ mit geeigneter γ die Beziehung

$$\delta(t) = \gamma \cdot \begin{vmatrix} u_1(\lambda_1) & \ldots & u_1(\lambda_m) & u_1(t) \\ \vdots & & \vdots & \\ u_m(\lambda_1) & \ldots & u_m(\lambda_m) & u_m(t) \\ \omega(\lambda_1) & & \omega(\lambda_m) & \omega(t) \end{vmatrix}. \tag{3.19}$$

Durch Vergleich mit (3.18) folgt hieraus

$$(3.20) \qquad (-1)^{2m+2} \cdot \gamma \cdot \begin{vmatrix} u_1(\lambda_1) \dots u_1(\lambda_m) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_m(\lambda_1) \dots u_m(\lambda_m) \end{vmatrix} = -1.$$

Auf Grund der Definition 3.2 ergibt sich aus (3.20) einerseits

$$(3.21) \qquad \operatorname{sign} \gamma = -1,$$

anderseits folgt wegen $\lambda_m < \beta$ und (3.21) aus (3.19)

$$\operatorname{sign} \delta(\beta) = \operatorname{sign} \gamma = -1.$$

Damit ist (D) bewiesen.

Offenbar ist sowohl $d_m(t)$ als auch $\delta(t)$ in den Intervallen $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_2, \lambda_3), \dots, \dots, (\lambda_{m-2}, \lambda_{m-1})$ alternierend positiv, bzw. negativ. Um (E) zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß für jede $t \in (\lambda_{m-1}, \lambda_m)$:

$$\operatorname{sign} \delta(t) = \operatorname{sign} d_m(t)$$

ist. Da $d_m(\lambda_m) = 1$ und $d_m(t)$ im Intervall $(\lambda_{m-1}, \beta]$ nicht verschwindet, so ist für jede $t \in (\lambda_{m-1}, \beta]$:

$$\operatorname{sign} d_m(t) = 1.$$

Aber aus (3.19) folgt wegen $\gamma < 0$ und wegen der Definition 3.2, daß für jede $t \in (\lambda_{m-1}, \lambda_m)$: $\delta(t) > 0$ ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Bemerkung 3.6. (a) Auf Grund des Lemmas 3.1 kann man voraussetzen, daß in der Formel (2.1) $\lambda_m = \beta$ ist. Ist nämlich in (2.1) $\lambda_m < \beta$, so kann man wegen $\delta(\beta) < 0$ irgendeine λ_i mit β vertauschen, so daß dabei das Funktional (2.23) wächst.

(b) Ist in (2.1) $\lambda_m = \beta$, so gilt wegen (E) die folgende Behauptung: Vertauscht man in (2.1) dem Satz 2.1 entsprechend eine λ_i mit einer $\lambda \in [\alpha, \beta]$, für welche $\delta(\lambda) < 0$ ist, dann gilt $i \neq m$.

Setzen wir in (2.1) $\lambda_m = \beta$ voraus. Dann ist die Anzahl der Zahlen $\lambda_i \in [\alpha, \beta)$ gerade. Es seien diese Zahlen

$$(3.22) \qquad (\alpha \leqq)\, \lambda_1^{(0)} < \bar\lambda_1^{(0)} < \lambda_2^{(0)} < \bar\lambda_2^{(0)} < \dots < \lambda_s^{(0)} < \bar\lambda_s^{(0)} \, (< \beta),$$

$$(3.22) \qquad (\alpha \leqq)\, \lambda_1^{(0)} < \bar\lambda_1^{(0)} < \lambda_2^{(0)} < \bar\lambda_2^{(0)} < \dots < \lambda_s^{(0)} < \bar\lambda_s^{(0)} \, (< \beta),$$

wobei $s = (m-1)/2$. Nach dem Lemma 3.1 kann das Verhalten der Funktion $\delta(t)$ folgendermaßen beschrieben werden:

$$(3.23) \qquad \delta(t) = 0, \quad \text{falls} \quad t = \lambda_1^{(0)}, \bar\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_s^{(0)}, \bar\lambda_s^{(0)}, \beta;$$

$$(3.24) \qquad \delta(t) > 0, \quad \text{falls} \quad t \in [\alpha, \lambda_1^{(0)}) \cup (\bar\lambda^{(0)}, \beta) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s-1} (\bar\lambda_j^{(0)}, \lambda_{j+1}^{(0)}) \right);$$

Es sei nun eine Einteilungsfolge $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ des Intervalls $[\lambda_1^{(0)} \bar\lambda_s^{(0)}]$ gegeben, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Jede Einteilung (mit der Ausnahme der ersten) ist eine Verfeinerung der vorigen Einteilungen.

(ii)
$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=2,3,\dots,k_n} |\eta_j^{(n)} - \eta_{j-1}^{(n)}| = 0,$$

wobei $\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \dots, \eta_{k_n}^{(n)}$ die Teilungspunkte von π_n bezeichnen.

(iii) π_0 besteht aus den Punkten

$$\lambda_1^{(0)}, \bar{\lambda}_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \bar{\lambda}_2^{(0)}, \dots, \lambda_s^{(0)}, \bar{\lambda}_s^{(0)}.$$

Es bezeichne A_n die Matrix des Typs $m \times k_n$, deren Spaltenvektoren

$$\mathbf{u}(\eta_1^{(n)}), \mathbf{u}(\eta_2^{(n)}), \dots, \mathbf{u}(\eta_{k_n}^{(n)}), \mathbf{u}(\beta)$$

sind. Es bezeichne weiterhin ω_n den k_n-dimensionalen Vektor, der mit Hilfe der Funktion $\omega(t)$ ähnlich wie A_n gebildet werden kann. Löse man für $n=1$ mit Hilfe des Simplexalgorithmus die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} &A_n \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \qquad\qquad (3.26) \\ &\langle \boldsymbol{\omega}_n, \mathbf{x} \rangle \to \max, \end{aligned}$$

und dann gehe man auf den Fall $n=2$ über, der offenbar eine Erweiterung der für $n=1$ betrachteten Aufgabe ist. Ist (3.26) für $n=k>1$ gelöst, so gehe man auf den Fall $n=k+1$ über. (Hierbei kann man die für $n=k$ erhaltene Optimallösung benutzen.)

Aus der Konstruktion der Matrizen A_n und der Vektoren ω_n folgt, daß die Aufgabe (3.26) für jede n lösbar ist. Für beliebige n endet das Simplexalgorithmus dann, wenn

$$\delta(\eta_j^{(n)}) \geqq 0 \tag{3.27}$$

für $j=1, 2, \dots, k_n$ gilt. (Hierbei bezeichnet $\delta(\cdot)$ immer die mit Hilfe der aktuellen Basis entsprechend der Formel (2.5) gebildete Funktion.) Es ist klar, daß die Optimalbasis von (3.26), für die sich das Algorithmus (3.27) erfüllend beendet, für jede n die Gestalt

$$\mathbf{u}(\lambda_1^{(n)}), \mathbf{u}(\bar{\lambda}_1^{(n)}), \dots, \mathbf{u}(\lambda_s^{(n)}, \mathbf{u}(\bar{\lambda}_s^{(n)}), \mathbf{u}(\beta) \tag{3.28}$$

besitzt, wobei

$$\alpha \leqq \lambda_1^{(n)} < \bar{\lambda}_1^{(n)} < \dots < \lambda_s^{(n)} < \bar{\lambda}_s^{(n)} < \beta \tag{3.29}$$

und jede $\lambda_i^{(n)}$ bzw. $\bar{\lambda}_i^{(n)}$ soll gleich irgendeinem der Punkte $\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \dots, \eta_{k_n}^{(n)}$ sein. Da die Aufgabe (3.26) nur dann alternative Optimallösungen besitzt, wenn die Funktion $\delta(t)$ in einem von den Punkten (3.29) verschiedenen Punkt verschwindet, so folgt nach dem Lemma 3.1 — (E), daß die Basis (3.28) für jede n eindeutig bestimmt ist.

Auf Grund der Formel (3.28) läßt sich $\mathbf{b}$ für jede $n=0, 1, 2, \ldots$ in der Form

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{s} \varrho_j^{(n)} \mathbf{u}(\lambda_j^{(n)}) + \sum_{j=1}^{s} \bar{\varrho}_j^{(n)} \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)}) + \varrho^{(n)} \mathbf{u}(\beta) \tag{3.30}$$

darstellen, wobei $\varrho_j^{(n)}, \bar{\varrho}_j^{(n)}, \varrho^{(n)} \geqq 0$. Ist

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{s} \varrho_j \mathbf{u}(\lambda_j) + \varrho \mathbf{u}(\beta) \tag{3.31}$$

die obere Hauptdarstellung von $\mathbf{b}$, dann gilt der

Satz 3.5. *Für $n \to \infty$ gelten die folgenden Grenzübergänge:*

$$\lambda_j^{(n)} \to \lambda_j, \quad \bar{\lambda}_j^{(n)} \to \lambda_j, \quad \varrho_j^{(n)} + \bar{\varrho}_j^{(n)} \to \varrho_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \quad \varrho^{(n)} \to \varrho. \tag{3.32}$$

Beweis. Da die zu der Darstellung (3.30) gehörende Funktion $\delta(t)$ auf der Menge $\bigcup_{j=1}^{s} (\lambda_j^{(n)}, \bar{\lambda}_j^{(n)})$ negativ ist, so fällt wegen (3.27) keine der Teilungspunkten der Einteilung π_n in die Intervalle $(\lambda_j^{(n)}, \bar{\lambda}_j^{(n)})$. (Anderfalls hätte sich das Simplex-algorithmus bei der Basis (3.29) nicht beendet.) Daraus folgt wegen (ii)

$$\bar{\lambda}_j^{(n)} - \lambda_j^{(n)} \to 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.33}$$

falls $n \to \infty$. Es sei nun

$$\mathbf{b}_n = \sum_{j=1}^{s} (\varrho_j^{(n)} + \bar{\varrho}_j^{(n)}) \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)}) + \varrho^{(n)} \mathbf{u}(\beta). \tag{3.34}$$

Dann gilt offensichtlich $\mathbf{b}_n \to \mathbf{b}$, falls $n \to \infty$. Nämlich ist

$$\mathbf{b}_n = \sum_{j=1}^{s} (\varrho_j^{(n)} + \bar{\varrho}_j^{(n)}) \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)}) + \varrho^{(n)} \mathbf{u}(\beta) = \tag{3.35}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} (\varrho_j^{(n)} \mathbf{u}(\lambda_j^{(n)}) + \bar{\varrho}_j^{(n)} \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)})) + \varrho^{(n)} \mathbf{u}(\beta) - \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_j^{(n)} (\mathbf{u}(\lambda_j^{(n)}) - \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)})) =$$

$$= \mathbf{b} - \sum \varrho_j^{(n)} (\mathbf{u}(\lambda_j^{(n)}) - \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)}))$$

aber wegen (3.34) und wegen der Stetigkeit von $\mathbf{u}(t)$ und der Beschränktheit der Folgen $\varrho_j^{(n)}$ strebt $\sum_{j=1}^{s} \varrho_j^{(n)} (\mathbf{u}(\lambda_j^{(n)}) - \mathbf{u}(\bar{\lambda}_j^{(n)}))$ gegen 0, falls $n \to \infty$.

Die bezüglich $\mathbf{u}(t)$ streng positiven Vektoren sind die inneren Punkte der Menge $V(\mathbf{b})$ [6]. So ist $\mathbf{b}_n$ wegen $\mathbf{b}_n \to \mathbf{b}$ für jede n, die größer als gewisse n_0 ist, streng positiv. Da offenbar

$$\sum_{j=1}^{s} \varepsilon(\bar{\lambda}_j^{(n)}) + \varepsilon(\beta) = m$$

ist, so ist (3.25) für $n > n_0$ die obere Hauptdarstellung von b_n. Daraus erhalten wir auf Grund von Satz 3.3 die zu beweisende Behauptung.

Bemerkung 3.7. (a) Es ist klar, daß der Maximumwert der Zielfunktion von (3.26) gegen den Maximumwert des Funktionals $I(\sigma)$ konvergiert, falls $n \to \infty$.

(b) Es sei der Formel (3.30) entsprechend für $n=0, 1, \ldots$

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{s} \varrho_j^{(n)} e_{\lambda_j^{(n)}} + \sum_{j=1}^{s} \bar{\varrho}_j^{(n)} e_{\bar{\lambda}_j^{(n)}} + \varrho^{(n)} e_\beta. \tag{3.36}$$

Auf Grund des Satzes 3.5 ist es leicht zu zeigen, daß die durch (3.36) erklärte Folge schwach gegen die Funktion

$$\sigma = \sum_{j=1}^{s} \varrho_j e_{\lambda_j} + \varrho e_\beta$$

konvergiert.

(c) Ganz analoge Sätze gelten für den Fall des Minimums.

Abschließend sei Herrn Professor E. GESZTELYI für seine wertvollen Bemerkungen und Ratschläge wärmster Dank ausgesprochen.

Literatur

[1] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Linear Operators, Part I., *New York*, 1958.

[2] R. B. HOLMES, Geometric Functional Analysis and its Applications, *Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin*, 1975.

[3] S. J. KARLIN and W. J. STUDDEN, Tchebicheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics, *New York*, 1966.

[4] A. G. KUROS, Felsőbb algebra, *Tankönyvkiadó, Budapest*, 1971.

[5] Э. Гестеи, (E. GESZTELYI), Математические модели систем распознающих цвета, *Кибернетика, Киев*, (im Druck).

[6] M. Г. Крейн и А. А. Нудельман, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, *Издательство «Наука», Москва*, 1973.

(Eingegangen am 30. Dezember 1977.)