О представлениях бесконечной группы диэдра

С. Д. БЕРМАН (Харьков)—К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Хорошо известно, что теория представлений бесконечной циклической группы $H=(a)$ над произвольным полем K эквивалентна теории модулей над кольцом $K[x]$. Это позволяет дать полное описание всех конечно-порождённых KH-модулей.

В связи с этим возникает естественная задача изучения K-предствалений неабелевых групп F, являющихся расширениями бесконечной циклической группы H с помощью конечной группы. Простейшей из таких групп является бесконечная группа диэдра G, причём задача описания K-представлений любой группы F указанного типа, как легко видеть, почти всегда содержит такую же задачу для группы G.

В настоящей статье мы дадим полное описание всех конечно-порождённых KG-модулей, где K-поле, характеристика которого отлична от 2. Это описание основано на том, что всякий конечно-порождённый KG-модуль разлагается в прямую сумму циклических подмодулей, несмотря на то, что групповая алгебра KG не является кольцом (односторонних) главных идеалов.

§ 1.

Пусть G — полупрямое произведение бесконечной циклической группы $H=(a)$ и циклической группы (b) порядка 2:

$$G=(a)\cdot(b), \quad b^{-1}ab=a^{-1}, \quad b^2=1.$$

Пусть K — произвольное поле, характеристика которого отлична от числа 2, а KG — групповая алгебра группы G над полем K. Элементы поля K будут неизменно обозначаться малыми греческими буквами, а под KG-модулями понимаются левые унитарные KG-модули.

В этом параграфе даётся полное описание всех конечнопорождённых KG-модулей без KH-кручения.

Сделаем сначала ряд предварительных замечаний, и докажем вспомогательные утверждения.

Хорошо известно, что алгебра KH является целостным кольцом главных идеалов, а обратимые элементы этой алгебры имеют вид λa^i, где $\lambda\in K$, $a^i\in H$. Отображение φ: $\sum\lambda_i a^i\to\sum\lambda_i a^{-i}$ является автоморфизмом над K алгебры KH. Для элемента $p\in KH$ положим $\bar{p}=\varphi(p)$. Ясно, что $\overline{(\bar{p})}=p$. Как обычно, наибольший общий делитель элементов $p_1,p_2\in KH$ будет обозначаться через (p_1,p_2). Элемент $p\in KH$ будем называть симметричным, если имеет место равенство главных идеалов: $(p)=(\bar{p})$. Очевидно, элемент $p\in KH$ симметричен тогда и только тогда, когда $\bar{p}=\lambda a^i p$.

Лемма 1. *Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — ненулевые симметричные элементы алгебры KH, $p=(p_1, \ldots, p_s)$, $p_i=p\cdot p_i'$ $(i=1, \ldots, s)$. Тогда элементы $p, p_1', \ldots, p_s'$ также симметричны.*

Доказательство. Имеем

$$p = q_1 p_1+\ldots+q_s p_s, \quad p_i = pp_i' \quad (q_i\in KH)$$

$$\bar{p} = \bar{q}_1\bar{p}_1+\ldots+\bar{q}_s\bar{p}_s, \quad \bar{p}_i = \bar{p}\cdot\bar{p}_i' \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Так как элементы p_i — симметричны, то $\bar{p}_i=t_i p_i$, где t_i — обратимый элемент в KH $(i=1, \ldots, s)$. Следовательно,

$$\bar{p} = \bar{q}_1 t_1 p_1+\ldots+\bar{q}_s t_s p_s, \quad p_i = t_i^{-1}\bar{p}\bar{p}_i,$$

и, значит

$$\bar{p} = (p_1, \ldots, p_s), \quad (\bar{p}) = (p).$$

Далее,

$$(\bar{p}_i) = (\bar{p})\cdot(\bar{p}_i'), \quad (p_i) = (p)\cdot(p_i'),$$

и так как

$$(\bar{p}_i) = (p_i), \quad (\bar{p}) = (p),$$

то

$$(\bar{p}_i') = (p_i') \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $p=(q, \bar{q})$ $(q\in KH)$. *Тогда* $(\bar{p})=(p)$.

Доказательство. Из равенств

$$q = pq_1, \quad \bar{q} = pq_2, \quad p = t_1 q+t_2\bar{q}$$

вытекает, что

$$\bar{q} = \bar{p}\bar{q}_1, \quad q = \bar{p}\cdot\bar{q}_2, \quad \bar{p} = \bar{t}_1\bar{q}+\bar{t}_2 q.$$

Следовательно, $\bar{p}=(q, \bar{q})$ и $(\bar{p})=(p)$. Лемма доказана.

Каждый элемент $g\in G$ порядка 2 имеет вид $g=a^i b$. С помощью этого элемента можно получить разложение единицы алгебры KG в сумму двух ортогональных ненулевых идемпотентов

$$1 = \frac{1}{2}(1+g)+\frac{1}{2}(1-g). \tag{1}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon=\pm 1$, $g=a^i b$, $e=\frac{1}{2}(1+\varepsilon g)$, *а M-произвольный KG-модуль без KH-кручения. Для любого элемента $x\in M$, такого, что $ex\neq 0$, подмодуль $N=KGex$ является также свободным циклическим KH-модулем: $N=KHex$. При этом естественный KH-изоморфизм свободных KH-модулей KHe и $KHex$:*

$$\Theta\colon te \to tex \quad (t\in KH)$$

является одновременно KG-изоморфизмом модулей KGe и N.

Доказательство. Так как

$$b(1+\varepsilon a^i b)=\varepsilon a^{-i}(1+\varepsilon a^i b),$$

то

$$KGe=KHe, \quad KGex=KHex.$$

Модуль $KHex$ есть свободный KH-модуль, ибо $ex\neq 0$ и M является модулем без KH-кручения.

Так как алгебра KG есть KG-модуль без KH-кручения, то модуль KGe — также свободный KH-модуль, и отображение θ: $te\to tex$ есть KH-изоморфизм KGe на $KGex$.

Пусть $y\in KG$. Тогда $y(te)=t_1e$ $(t, t_1\in KH)$, и

$$\Theta(yte)=\Theta(t_1e)=t_1\Theta(e)=t_1ex=(yte)x=y(tex)=y\Theta(te).$$

Следовательно, Θ — KG-изоморфизм модуля KGe на N. Лемма доказана,

Следствие. *Если $p\in KH, p\neq 0$, а e-идемпотент, участвующий в лемме 3, то $KGep$ есть свободный циклический KH-модуль, изоморфный модулю KGe.*

Доказательство. KG является модулем без KH-кручения, и $ep\neq 0$.

Лемма 4. *Имеют место KG-изоморфизмы*

$$KG(1+\varepsilon a^{2i}b)\cong KG(1+\varepsilon b),$$

$$KG(1+\varepsilon a^{2i+1}b)\cong KG(1+\varepsilon ab), \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

Доказательство. Имеем

$$(1') \qquad (1+\varepsilon b)a^{-i}(1+\varepsilon a^{2i}b)=(a^{-i}+\varepsilon a^i b)\cdot(1+\varepsilon a^{2i}b)=$$
$$=(a^{-i}+\varepsilon a^i\cdot\varepsilon a^{-2i})(1+\varepsilon a^{2i}b)=2a^{-i}(1+\varepsilon a^{2i}b);$$

$$(1'') \qquad (1+\varepsilon ab)a^{-i}(1+\varepsilon a^{2i+1}b)=(a^{-i}+\varepsilon a^{1+i}b)\cdot(1+\varepsilon a^{2i+1}b)=$$
$$=(a^{-i}+\varepsilon a^{1+i}\cdot\varepsilon a^{-2i-1})(1+\varepsilon a^{2i+1}b)=2a^{-i}(1+\varepsilon a^{2i+1}b).$$

Так как каждый из модулей $KG(1+\varepsilon a^{2i}b)$ и $KG(1+\varepsilon a^{2i+1}b)$ порождаются также соответственно элементами $2a^{-i}(1+\varepsilon a^{2i}b)$ и $2a^{-i}(1+\varepsilon^{2i+1}b)$, то утверждение леммы сразу вытекает из формул (1′), (1″) и леммы 3.

Пусть

$$(2) \qquad e_1=\frac{1}{2}(1+b), \quad e_2=\frac{1}{2}(1-b), \quad e_3=\frac{1}{2}(1+ab), \quad e_4=\frac{1}{2}(1-ab),$$

$$I_j=KGe_j \quad (j=1, 2, 3, 4).$$

Лемма 5. *KG-модули I_1, I_2, I_3, I_4 попарно неизоморфны над KG.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{I}_j$ KG-подмодуль модуля I_j, порождённый всевозможными элементами $(1+\bar{b})x$, $x\in I_j$ $(j=1, \dots, 4)$. Так как по лемме 3 I_j-свободный KH-модуль, порождённый элементом e_j, то каждый из подмодулей $\bar{I}_j$ $(j=1, \dots, 4)$ также является свободным циклическим KH-

модулем. Имеем

$$(1+b)e_1 = 2e_1,$$
$$(1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_2 = \sum_i \lambda_i(a^i - a^{-i})e_2,$$
$$(1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_3 = \sum_i \lambda_i(a^i + a^{-i-1})e_3,$$
$$(1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_4 = \sum_i \lambda_i(a^i - a^{-i-1})e_4.$$

Из этих формул следует, что

$$\bar I_1 = I_1;\quad \bar I_2 = KH(a^2-1)e_2;\quad \bar I_3 = KH(a+1)e_3;\quad \bar I_4 = KH(a-1)e_4.$$

Тогда для фактор-модулей $I_j/\bar I_j$ как для KH-модулей имеет место KH-изоморфизм

$$(2')\qquad I_1/\bar I_1 \cong (0);\quad I_2/\bar I_2 \cong KH/(a^2-1);$$
$$I_3/\bar I_3 \cong KH/(a+1);\quad I_4/\bar I_4 \cong KH(a-1).$$

Формулы (2′) показывают, что различеные модули I_j попарно неизоморфны над KG, ибо из KG-изоморфизма модулей I_i и I_j $(i\neq j)$ вытекал бы KH-изоморфизм фактор-модулей $I_i/\bar I_i$ и $I_j/\bar I_j$. Лемма доказана.

Мы также используем формулы (2′) в последующих рассуждениях.

Заметим, что KG-модули I_j $(j=1, \dots, 4)$ являются неразложимыми циклическими KG-модулями без KH-кручения.

Предложение 1. *Каждый неразложимый циклический KG-модуль без KH-кручения изоморфен одному из модулей I_j $(j=1, \dots, 4)$. Модули I_1, I_2, I_3, I_4 неразложимы и попарно неизоморфны.*

Доказательство. Пусть M-циклический KG-модуль. Тогда M изоморфен фактор-модулю KG/J, где J-некоторый левый идеал алгебры KG. Произвольный элемент $x\in J$ записывается в виде

$$(3)\qquad x = p+qb,\quad (p, q\in KH).$$

Если x пробегает идеал J, то элемент $p(q)$ в (3) пробегает идеал $V_0(V_1)$ в KH. Так как $bx=\bar q+\bar p b\in J$, то легко видеть, что $V_1=\bar V_0$. Пусть $V_0=(p_0)$. Тогда $V_1=(\bar p_0)$.

Идеал J, в частности, содержит элемент

$$(4)\qquad y = p_0+t\bar p_0 b.$$

Предположим теперь, что M—неразложимый KG-модуль без KH-кручения. Тогда $J\neq(0)$, ибо алгебра KG разлагается в прямую сумму левых идеалов (см. (1)). Следовательно, в (4) имеет место $p_0\neq 0$. Покажем, что в (4) также

$$(5)\qquad (p_0, \bar p_0) = 1,\quad t=\pm a^i.$$

В самом деле, пусть $(p_0, \bar p_0)\neq 1$. Тогда

$$p_0 = p\cdot p_0',\quad \bar p_0 = p\cdot p_1',\quad \text{где}\quad p_0'\not\equiv 0 \pmod{p_0}.$$

Значит
$$y = p(p_0'+p_1'b),$$
где $(p_0'+p_1'b)\notin J$ (см. определение идеала V_0). Таким образом, ненулевой элемент $(p_0'+p_1'b)+J$ фактор-модуля $M=KG/J$ аннулируется при умножении на элемент $p\in KH$, $p\neq 0$, а это противоречит тому, что M—модуль без KH-кручения. Следовательно, $(p_0, \bar{p}_0)=1$.

Имеем
$$y = p_0+t\bar{p}_0 b = (1+tb)p_0,$$
$$(1-tb)(1+tb) = 1-(tb)^2 = 1-t\cdot\bar{t}.$$
Если $1-t\bar{t}\neq 0$, то
$$(1-tb)y = (1-t\bar{t})p_0\in J,$$
откуда
$$(1-t\bar{t})p_0(1+J) = J,$$
а это снова противоречит условию, что $M-KG$-модуль без KH-кручения.

Значит $t\bar{t}=1$. Но тогда t—обратимый элемент в KH, и имеет вид $t=\lambda a^i$. Тогда
$$t\bar{t} = \lambda a^i\cdot\lambda a^{-i} = \lambda^2 = 1,$$
то есть $\lambda=\pm 1$ и $t=\pm a^i$. Мы доказали отношение (5).

Произвольный элемент $x\in J$ записывается в виде
$$x = (p_0 q_1+q_2 t\bar{p}_0 b).$$
Тогда
$$x-q_1 y = (q_2 t\bar{p}_0-q_1 t\bar{p}_0)b\in J.$$
Если $q_2\neq q_1$, то снова получаем, что M есть модуль с KH-кручением. Следовательно, $q_2=q_1$, и

(6) $$J = KGy = KG(1+\varepsilon a^i b)p_0,$$

где $\varepsilon=\pm 1$, а элемент $p_0\in KH$ удовлетворяет условию (5): $(p_0, \bar{p}_0)=1$. Тогда для некоторых $q_2, q_1\in KH$ выполняется
$$q_1 p_0+q_2\bar{p}_0 = 1,$$
откуда
$$\bar{q}_1\bar{p}_0+\bar{q}_2\cdot p_0 = 1.$$
Последние два равенства дают соотношение

(7) $$\frac{q_1+\bar{q}_2}{2}\cdot p_0+\frac{q_2+\bar{q}_1}{2}\bar{p}_0 = 1,$$

что имеет смысл, так как $\mathrm{Char}\, K\neq 2$.

Полагая в (7) $\frac{q_1+\bar{q}_2}{2}=q$, получаем, что существует такой элемент $q\in KH$, что

(8) $$p_0 q+\bar{p}_0\bar{q} = 1.$$

Положим теперь

(9) $$z = (1-\varepsilon a^i b)q,$$

и докажем, что имеет место прямое разложение

$$KG = KGz \dotplus KGy. \tag{10}$$

Как было показано выше, каждый элемент $x \in KH(1 \pm \varepsilon a^i b)$ однозначно записывается в виде $t(1 \pm \varepsilon a^i b)$ $(t \in KH)$.

Пусть $p_1 + p_2 b$ $(p_1, p_2 \in KH)$ — произвольный элемент алгебры KG. Докажем, что существуют такие однозначно определённые элементы $t_1, t_2 \in KH$, что

$$p_1 + p_2 b = t_1(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q} + t_2(1 + \varepsilon a^i b) p_0. \tag{11}$$

Равенство (11) эквивалентно системе уравнений относительно t_1, t_2:

$$\begin{aligned} \bar{q} t_1 + p_0 t_2 &= p_1 \\ -\varepsilon a^i q t_1 + \varepsilon a^i \bar{p}_0 t_2 &= p_2 \end{aligned} \tag{12}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} \bar{q} & p_0 \\ -\varepsilon a^i q & \varepsilon a^i \bar{p}_0 \end{vmatrix} = \varepsilon a^i (\bar{p}_0 \bar{q} + p_0 q),$$

который, в силу (8), равн $\varepsilon a^i = \pm a^i$. Так как εa^i — обратимый элемент в KH, то система (12) имеет единственное решение (t_1, t_2), $t_1, t_2 \in KH$, что доказывает прямое разложение (10).

Ввиду (10)

$$M = KG/J \cong KGz = KG(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q}.$$

В силу следствия из леммы 3 и леммы 4, модуль $KG(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q}$ изоморфен модулю $KG(1 - \varepsilon b)$, если $i = 2n$, и модулю $KG(1 - \varepsilon ab)$, если $i = 2n + 1$.

Итак, каждый неразложимый циклический KG-модуль M KG-изоморфен одному из модулей I_j $(j = 1, \ldots, 4)$.

Так как KH — целостное кольцо главный идеалов, то свободные циклические KH-модули I_j неразложимы в прямую сумму KH-модулей и, тем более, KG-модулей. Далее, по лемме 5, различные модули I_j попарно неизоморфны. Предложение доказано.

Лемма 6. *Пусть KG-модуль M есть прямая сумма циклических KG-модулей*

$$M = (u_1) \dotplus \ldots \dotplus (u_s),$$

где $KGu_i = KHu_i$ — свободный KH-модуль, и $bu_i = t_i u_i$, где t_i — обратимый в KH элемент $(i = 1, \ldots, s)$. Пусть

$$u = p_1 u_1 + \ldots + p_s u_s \quad (p_i \in KH,\ p_i \neq 0;\ i = 1, \ldots, s),$$

и $N = KGu = KHu$. Если

$$p = (p_1, \ldots, p_s), \quad p_i = p \cdot p_i' \quad (i = 1, \ldots, s),$$

то

$$KG(p_1' u_1 + \ldots + p_s' u_s) = KH(p_1' u_1 + \ldots + p_s' u_s).$$

Доказательство. Покажем сначала, что $p_1, \ldots, p_s$ — симметричные элементы алгебры KH. Действительно,

$$b(p_1 u_1 + \ldots + p_s u_s) = \bar{p}_1 t_1 u_1 + \ldots + \bar{p}_s t_s u_s,$$

где по условию t_i обратимы в KH. Предположим, что $(\bar{p}_i)\neq(p_i)$ для некоторого i $(1\leqq i\leqq s)$. Тогда идеал $(q)=(p_i, \bar{p}_i)$ собственным образом содержит идеал (p_i). Так как

$$p_1u_1+\ldots+p_su_s, \quad \bar{p}_1t_1u_1+\ldots+\bar{p}_st_su_s\in N,$$

и

$$q=q_1p_i+q_2\bar{p}_it_i \quad (q_1, q_2\in KH),$$

то подмодуль N содержит элемент вида $\ldots+qu_i+\ldots$. Это противоречит тому, что все элементы модуля N имеют вид $t(p_1u_1+\ldots+p_su_s)$. Значит, $(\bar{p}_i)=(p_i)$ для всех $i=1, \ldots, s$. В силу леммы 2 теперь получаем, что $(\bar{p})=(p)$, $(\bar{p}_i')=(p_i')$ $(i=1, \ldots, s)$. Следовательно

$$\bar{p}=fp, \quad \bar{p}_i'=p_i'f_i, \tag{13}$$

где f, f_i $(i=1, \ldots, s)$ — обратимые элементы алгебры KH. Ввиду (13) и условий леммы, имеем

$$b(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s)=d_1p_1'u_1+\ldots+d_sp_s'u_s, \tag{14}$$

где $d_1, \ldots, d_s$ — обратимые элементы в KH. На основании (13) и (14),

$$\begin{aligned} b(p_1u_1+\ldots+p_su_s) &= bp(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s)= \\ &= \bar{p}(d_1p_1'u_1+\ldots+d_sp_s'u_s). \end{aligned} \tag{15}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} bp(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s) &= tp(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s)= \\ &= t\bar{p}f^{-1}(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s), \quad (t\in KH). \end{aligned} \tag{16}$$

Сравнивая (14), (15) и (16), получим

$$b(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s)=tf^{-1}(p_1'u_1+\ldots+p_s'u_s).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Каждый конечно-порождённый KG-модуль без KH-кручения разлагается в прямую сумму циклических модулей, каждый из которых изоморфен одному из модулей I_j $(j=1, \ldots, 4)$.*

Доказательство. Пусть модуль M порождается элементами $x_1, \ldots, x_n$. Так как $1=e_1+e_2$, то

$$KGx_i=KGe_1x_i+KGe_2x_i.$$

При этом, по лемме 3, $KGe_jx_i\cong KGe_j$, если $e_jx_i\neq 0$. Таким образом, модуль M есть сумма (не прямая) циклических модулей, изоморфных I_j $(1\leqq j\leqq 4)$:

$$M=(v_1)+\ldots+(v_k), \tag{17}$$

где

$$(v_i)\cong I_j \quad (1\leqq j\leqq 4). \tag{18}$$

Будем доказывать теорему индукцией по числу слагаемых k в сумме (17). Рассмотрим сначала случай $k=1, 2$.

Если в (17) $k=1$, то теорема очевидна. Пусть

$$M = (v_1)+(v_2).$$

Если $(v_1)\cap(v_2)=0$, то теорема также очевидна. Предположим, что $(v_1)\cap\cap(v_2)\neq 0$. Тогда, в силу (18) и леммы 3, M как KH-модуль есть сумма двух непересекающихся свободных KH-модулей. На основании известных теорем о модулях над кольцом главных идеалов M тогда является свободным KH-модулем, и, следовательно, M-неразложимый циклический KG-модуль. Применяя предложение 1, получим, что M изоморфен одному из модулей I_j $(1\leqq\leqq j\leqq 4)$.

Предположим теперь, для чисел $k\leqq n$ уже показано, что сумма (17) может быть записана в виде прямой суммы $r\leqq k$ циклических модулей, каждый из которых изоморфен одному из модулей I_j $(1\leqq j\leqq 4)$.

Пусть

$$M = (v_1)+\ldots+(v_n)+(v_{n+1}).$$

В силу индуктивного предположения сумма $(v_1)+\ldots+(v_n)$ может быть записана в виде прямой суммы $r\leqq n$ неразложимых циклических KG-модулей. Если $r<n$, то M удовлетворяет индуктивному предположению. Поэтому можно записать, что

$$M = L+(v_{n+1}),$$

где

$$L = (v_1)\dotplus\ldots\dotplus(v_n),$$

и

$$(v_i)\cong I_{j_i},\quad e_{j_i}v_i = v_i\quad (i=1,\ldots,n+1;\ 1\leqq j_i\leqq 4). \tag{19}$$

Если $L\cap(v_{n+1})=0$, то теорема уже доказана. Пусть

$$N = L\cap(v_{n+1})\neq 0.$$

Так как (v_{n+1}) — свободный циклических KH-модуль, то N — также свободный циклический KH-модуль:

$$N = KH(p_1v_1+\ldots+p_nv_n). \tag{20}$$

Если в (20), например, $p_1=0$, то

$$M = [(v_2)+\ldots+(v_{n+1})]\dotplus(v_1),$$

где подмодуль $(v_2)+\ldots+(v_{n+1})$ удовлетворяет предположению индукции, и тогда для M индуктивное предположение также доказано. Поэтому мы будем предполагать, что в (20) $p_i\neq 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Пусть

$$p=(p_1,\ldots,p_n),\quad p_i = pp_i'\quad (i=1,\ldots,n).$$

Положим

$$u = p_1'v_1+\ldots+p_n'v_n.$$

Тогда, по лемме 6

$$N_1 = KHu = KGu.$$

Так как $(p_1',\ldots,p_n')=1$, то, в силу известных теорем о модулях над кольцами главных идеалов, элемент u можно дополнить до KH-базиса модуля L и, следовательно, фактор-модуль $\bar{L}=L/N_1$ есть KG-модуль без KH-кручения.

Покажем, что модуль $\bar{L}$ удовлетворяет предположению индукции. Действительно,

$$\bar{L} = KG(v_1+N_1)+\ldots+KG(v_n+N_1),$$

где, ввиду (19)

$$e_{j_i}(v_i+N_1) = v_i+N_1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, по лемме 3 ненулевой модуль $KG(v_i+N_1)$ изоморфен модулю I_{j_i}. На основании предположения индукции модуль $\bar{L}$ разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных модулям I_j. Так как каждый модуль I_j — проективный KG-модуль, то $\bar{L}$ — также проективный KG-модуль. Значит, N_1 выделяется в L прямым слагаемым:

$$L = N_1 \dotplus L_1.$$

Так как $L_1 \neq \bar{L}$, то KH-ранг модуля L_1 равен точно $n-1$ и L_1 есть прямая сумма $n-1$ неразложимых циклических KH-модулей:

$$L_1 = (u_1) \dotplus \ldots \dotplus (u_{n-1}),$$

а

$$M = L_1 \dotplus T,$$

где

$$T = N_1+(v_{n+1}).$$

Так как $N_1 \cap (v_{n+1}) \neq 0$, то, в силу доказанного индуктивного предположения для $k=2$, T есть неразложимый циклический KG-модуль. Это завершает индукцию и доказательство теоремы.

В силу теоремы 1, конечно-порождённые KG-модули без KH-кручения — это в точности конечно-порождённые проективные KG-модули. Эта теорема не даёт полную систему инвариантов проективного модуля, так как для разложений в прямую сумму неразложимых проективных модулей не выполняется теорема Круля—Шмидта. Например

$$KG = I_1 \dotplus I_2 = I_3 \dotplus I_4. \tag{21}$$

Из последних результатов будет видно, что все остальные соотношения неоднозначности для прямых сумм проективных (конечно-порождённых) KG-модулей являются следствиями соотношения (21).

В последующих записях нам будет удобно отождествлять изоморфные между собой модули. Запись

$$A = n_1 B \dotplus n_2 C$$

будет означать, что в прямое разложение модуля A модуль B входит с кратностью n_1, а модуль C — с кратностью n_2.

Теорема 2. *Пусть M_1 и M_2 — конечно-порождённые KG-модули без KH-кручения, а $\overline{M}_i$ — подмодуль модуля M_i, порождённый всевозможными элементами $(1+b)x$, $x \in M_i$ $(i=1, 2)$. Модули M_1 и M_2 KG-изоморфны тогда и только тогда, когда они KH-изоморфны, и, кроме того, KH-изоморфны модули $M_1/\overline{M}_1$ и $M_2/\overline{M}_2$.*

Доказательство. Пусть M — произвольный конечно-порождённый проективный KG-модуль. Произведём, согласно теореме 1, разложение модуля M в прямую сумму модулей, изоморфных модулям I_j $(1 \leqq j \leqq 4)$:

$$M = n_1 I_1 \dotplus n_2 I_2 \dotplus n_3 I_3 \dotplus n_4 I_4. \tag{22}$$

Пусть S — свободный циклический KG-модуль $(S \cong KG)$. Применяя несколько раз соотношения $S = I_1 \dotplus I_2$ и $S = I_3 \dotplus I_4$ (см. (21)), мы приведём равенство (22) к одному из следующих видов:

$$\begin{cases} M^{(1)} = mS + m_1 I_1 + m_3 I_3 \\ M^{(2)} = mS + m_1 I_1 + m_4 I_4 \\ M^{(3)} = mS + m_2 I_2 + n_3 I_3 \\ M^{(4)} = mS + m_2 I_2 + m_4 I_4. \end{cases} \tag{23}$$

KH-ранг r_i модулей M^i $(i = 1, \ldots, 4)$ соответственно равен

$$\begin{cases} r_1 = 2m + m_1 + m_3; \quad r_2 = 2m + \dot{m}_1 + m_4 \\ r_3 = 2m + m_2 + m_3; \quad r_4 = 2m + m_2 + m_4. \end{cases} \tag{24}$$

В силу (23) и (2′) каждый из модулей $M^{(i)}/\overline{M}^{(i)}$ как KH-модуль разлагается в прямую сумму одномерных над K KH-модулей $KH/(a+1)$ и $KH/(a-1)$.

Обозначим через $n_{i1}(n_{i2})$ кратность вхождения модуля $KH/(a+1)$ (соответственно $KH/(a-1)$) в модуль $M^{(i)}/\overline{M}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Тогда из (23) и (2′) вытекают формулы

$$\begin{cases} n_{11} = m + m_3; & n_{12} = m; \\ n_{21} = m; & n_{22} = m + m_4; \\ n_{31} = m + m_2 + m_3; & n_{32} = m + m_2; \\ n_{41} = m + m_2; & n_{42} = m + m_2 + m_4. \end{cases} \tag{25}$$

Заметим, что числа r_i $(i = 1, \ldots, 4)$ и числа n_{ij} $(i = 1, \ldots, 4;\ j = 1, 2)$ являются инвариантами модуля M, не зависящими от выбора прямого разложения (22).

Оказывается, эти числа позволяют однозначно восстановить каждое из разложений (23). В самом деле, из (23), (24) и (25) вытекает, что модули $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ и $M^{(4)}$ характеризуются условиями соответственно:

$$\begin{cases} r_1 \geqq n_{11} + n_{12}; & n_{11} \geqq n_{12}; \\ r_2 \geqq n_{21} + n_{22}; & n_{21} \leqq n_{22}; \\ r_3 \leqq n_{31} + n_{32}; & n_{31} \geqq n_{32}; \\ r_4 \leqq n_{41} + n_{42}; & n_{41} \leqq n_{42}. \end{cases} \tag{26}$$

При этом для $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$ выполняются соответственно

$$\begin{cases} m_1 = r_1 - (n_{11} + n_{12}); & m_3 = n_{11} - n_{12}; \\ m_1 = r_2 - (n_{21} + n_{22}); & m_4 = n_{22} - n_{21}; \\ m_2 = (n_{31} + n_{32}) - r_3; & m_3 = n_{31} - n_{32}; \\ m_2 = (n_{41} + n_{42}) - r_4; & m_4 = n_{42} - n_{41}. \end{cases} \tag{27}$$

Формулы (26) и (27) показывают, что KH-ранг модуля M и инварианты фактор-модуля $M/\overline{M}$ однозначно восстанавливают разложение (23) модуля M.

Значит из KH-изоморфизма модулей M_1 и M_2, а также модулей $M_1/\overline{M}_1$ и $M_2/\overline{M}_2$ вытекает KG-изоморфизм модулей M_1 и M_2. Очевидно, что KG-изоморфизм модулей M_1 и M_2 влечёт за собой их KH-изоморфизм, а также KH-изоморфизм модулей $M_1/\overline{M}_1$ и $M_2/\overline{M}_2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 показывает, что полную систему инвариантов произвольного конечно-порождённого KG-модуля M без KH-кручения даёт вектор

$$\alpha(M) = (r, n_1, n_2), \tag{28}$$

где r — KH-ранг модуля M, n_1 — кратность вхождения в индуцированный KH-модуль $M/\overline{M}$ модуля $KH/(a+1)$, а n_2—модуля $KH/(a-1)$. Вектор $\alpha(M)$ очевидным образом обладает свойством аддитивности по отношению к прямой сумме модулей, то есть, если $M = M_1 \dotplus M_2$, то $\alpha(M) = \alpha(M_1) + \alpha(M_2)$.

Отсюда, и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. *Для конечно-порождённых KG-модулей без KH-кручения выполняется свойство сокращения, то есть $M+N = M+N_1$ тогда и только тогда, когда $N_1 = N_2$.*

Замечание 2. Из рассуждений теоремы 2 следует, что всякое соотношение вида

$$m_1 I_1 + m_2 I_2 + m_3 I_3 + m_4 I_4 = m_1' I_1 + m_2' I_2 + m_3' I_3 + m_4' I_4 \tag{29}$$

является следствием соотношения (21): $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

В самом деле, как показано при доказательстве теоремы 2, разложение вида (23) проективного конечно-порождённого модуля M однозначно определяется вектором $\alpha(M)$ (см. (26) и (27)). Значит, правая и левая части (29) должны приводиться к одному и тому же виду (25), а такое приведение можно осуществить с помощью соотношения $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

Из замечания 2 вытекает

Теорема 4. *Группа $K \circ (KG)$* есть свободная абелева группа ранга 3.*

Доказательство. Так как все соотношения вида (29) являются следствиями соотношения $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$, то группа $K \circ (KG)$ есть фактор-группа свободной абелевой группы A с базой a_1, a_2, a_3, a_4 по циклической подгруппе $B = (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$. Легко подсчитать, что A/B есть свободная абелева группа ранга 3. Теорема доказана.

Теорема 3 является ослабленным аналогом теоремы Круля—Шмидта для конечно-порождённых проективных KG-модулей. Если бы для этих модулей выполнялась теорема Круля—Шмидта, то группа $K \circ (KG)$ была бы свободной абелевой группой ранга 4. На самом деле, $K \circ (KG)$ есть свободная абелева группа ранга 3.

---

* Группа $K \circ (KG)$ определяется стандартным в алгебраической K-теории способом как фактор-группа свободной абелевой группы, натянутой на модули I_1, I_2, I_3, I_4 по подгруппе этой группы, соответствующей всевозможным соотношениям вида (29).

Замечание 3. Групповая алгебра KG не является кольцом односторонних главных идеалов.

В самом деле, рассмотрим левый идеал

$$I=(a+1,\, b+1).$$

Для любых $p_0, p_1 \in KH$ имеем

$$(p_0+p_1b)(a+1)-(p_0a-p_1)(1-a^{-1}b)= \\ =(p_0+p_1)(1+b). \tag{30}$$

Так как p_0, p_1 — произвольные элементы алгебры KH, то из (30) вытекает, что

$$KG(1-a^{-1}b)\subset I. \tag{31}$$

Проивоьный элемент $x\in I$ записывается в виде

$$(p_0+p_1b)(a+1)+q(1+b) \quad (p_0, p_1, q\in KH).$$

Отсюда, и из (30), (31) получаем, что

$$I=KG(1-a^{-1}b)+KG(1+b). \tag{32}$$

Сумма (32) — прямая, ибо

$$q_1(1-a^{-1}b)\neq q_2(1+b)$$

при $q_1\neq 0$. Так как по лемме 4

$$KG(1-a^{-1}b)\cong KG(1-ab),$$

то (32) показывает, что идеал I изоморфен прямой сумме модулей I_1 и I_4. Значит, I — не главный идеал, ибо тогда был бы свободным циклическим KG-модулем S, и выполнялось бы соотношение

$$S=I_1+I_4$$

противоречащее единственности разложения (23).

§ 2.

Теперь дадим описание всех конечномерных неразложимых представлений группы G над полем K, характеристика которого отлична от 2.

Полином $f(x)$ степени m над полем K будем называть симметричным, если $f(x)=x-1$, или если $f(x)=x^m f(x)$.

Таорема 5. *Любой неразложимый над полем K KG-модуль M соответствует некоторому полиному $f(x)^n$, где $f(x)=x^m+\dots$ — нормированный над K полином. Если $f(x)$ — неприводимый над K полином, отличный от полиномов $x+1$, $x-1$, то каждому полиному $\varphi=f(x)^n$ (n-произвольное натуральное число) с точностью до изоморфизма соответствует точно один неразложимый KG-модуль M_φ.*

Пусть I — главный идеал алгебры KH, порождённый элементом $\varphi(a)$. Если полином $f(x)$ не симметричный, то модуль $M\varphi$ есть индуцированный

KG-модуль $(KH/I)^G$. *Если* $f(x)$ — *симметричный полином, то модуль* M_φ *изоморфен любому из идеалов* $A(e_1+I)$, $A(e_2+I)$ *фактор-алгебры* $A=KG/I$, *где* $e_1=\frac{1}{2}(1+b)$, $e_2=\frac{1}{2}(1-b)$, *а* $I=KG\varphi(a)$ — *двухсторонний идеал алгебры* KG, *порождённый элементом* $\varphi(a)$. *Если* $f(x)=x+1$ (*или* $x-1$), *то каждому полиному* $\varphi=(x+1)^n$ (*соответственно* $(x-1)^n$) *соответствуют точно два изоморфных модуля* $M\varphi$, *один из которых есть идеал* $A(e_1+I)$, *а второй — идеал* $A(e_2+I)$ *фактор-алгебры* $A=KG/((a+1)^n)$ (*соответственно фактор-алгебры* $KG/((a-1)^n)$). *Различным полиномам* $f_1(x)^n$, $f_2(x)^n$ (f_1, f_2 — *неприводимые нормированные полиномы*) *соответствуют неизоморфные неразложимые KG-модули M*.

Доказательство. В силу ограничения на характеристику поля, по теореме Хигмана ([1]), каждый неразложимый конечномерный KG-модуль M есть прямая компонента модуля, индуцированного неразложимым конечномерным KH-модулем N.

Так как KH-кольцо главных идеалов, то каждый неразложимый конечномерный KH-модуль KH-изоморфен факторкольцу KH/I, где I-идеал, порождённый степенью простого злемента p колца KH: $I=(p^\alpha)$, причём любой KH-модуль $KH/(p^\alpha)$ (p-простой элемент кольца KH) неразложим. KH-модули $KH/(p_1^{\alpha_1})$ и $KH/(p_2^{\alpha_2})$ (p_1, p_2-простые элементы кольца KH) изоморфны тогда и только тогда, когда $(p_1)=(p_2)$ и $\alpha_1=\alpha_2$. Классы ассоциироbанных между собой простых элементов $p\in KH$ взаимно однозначно соответсвуют нормированным неприводимым полиномам над полем K.

Пусть $N=KH/(p^\alpha)$ (p-простой элемент из KH). Индуцированный KG-модуль M имеет вид

$$M = N \dotplus bN \tag{33}$$

(прямая сумма KH-модулей). Легко видеть, что KH-модуль bN изоморфен модулю $KH/(\bar{p}^\alpha)$. Могут представиться два случая:

1. $(\bar{p}) \neq (p)$;
2. $(\bar{p}) = (p)$.

Покажем, что в первом случае модуль M неразложим. Действительно, в этом случае подмодули N и $N_1=bN$ определяются в M абсолютно однозначно. N (соответственно N_1) есть подмодуль KH-модуля M, состоящий из всех элементов модуля M, аннулирующихся элементом p^α (соответственно элементом $\bar{p}^\alpha$).

Пусть KG-модуль M разложим:

$$M = M_1 \dotplus M_2. \tag{34}$$

Тогда (34) является также разложением M так KH-модуля. Но прямое разложение KH-модуля абсолютно однозначно, то есть M_1 совпадает с одним из KH-модулей N, N_1. Так как M_1—KG-модуль, то M_1 содержит оба модуля N, N_1, что даёт противоречие.

Пусть $(\bar{p})=(p)$. Тогда $KG(p^\alpha)$ есть двухсторонний идеал в KG, а индуцированный KG-модуль M изоморфен (как KG-модуль) фактор-алгебре

$KG/(p^2)=A$. Элементы $\tilde{e}_1=e_1+I$ и $\tilde{e}_2=e_2+I$ $\big(I=(p^2)\big)$ являются ненулевыми ортогональными идемпотентами алгебры A, и поэтому алгебра A разлагается в прямую сумму двух левых идеалов

$$A = A_1 \dotplus A_2 \tag{35}$$

где $A_i=A\tilde{e}_i$ $(i=1, 2)$.

Легко видеть, что KG-модули A_1 и A_2 неразложимы. В самом деле, в силу (34) модуль M (как KH-модуль) есть прямая сумма двух неразложимых KH-модулей. Так как разложение M в прямую сумму неразложимых KH-модулей однозначно с точностью до изоморфизма, то идеалы A_i неразложимы как KH-модули, а, значит, они есть неразложимые KG-модули.

Покажем, что $A_1\cong A_2$, если с простым элементом p ассоциирован неприводимый полином степени, большей чем 1, и что $A_1\not\cong A_2$, если этот полином первой степени. Для этого исследуем сначала неприводимые A-модули. Рассмотрим нильпотентный двухсторонний идеал $B=(p+I)$ алгебры A. Очевидно, $B^{p^\alpha}=I$. Легко видеть, что

$$A/B \cong KG/(p).$$

Покажем, что алгебра $C=KG/(p)$ разлагается в прямую сумму двух минимальных идеалов. Действительно, C как KH-модуль, согласно (34), разлагается в прямую сумму двух простых KH-модулей, изоморфных $KH/(p)$. Следовательно, любое разложение C как KG-модуля в прямую сумму будет разложением в прямую сумму простых KH-модулей, а, следовательно, и простых KG-модулей. Таким образом, B — радикал алгебры A, а

$$C = C_1 \dotplus C_2,$$

где $C_1=C\big(e_1+(p)\big)$, $C_2=C\big(e_2+(p)\big)$ есть разложение алгебры C в прямую сумму двух минимальных левых идеалов. В силу известных результатов теории полупростых алгебр, идеалы C_1 и C_2 не изоморфны тогда и только тогда, когда C_1 и C_2 являются телами, или, что то же самое, когда $e_1+(p)$, $e_2+(p)$ — единицы соответствующих идеалов C_1 и C_2. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что e_2+C аннулирует каждый элемент идеала C_1. В частности, должно быть $e_2ae_1+(p)=(p)$, или

$$(1-b)\,a\,(1+b) = (a-a^{-1})(1+b)\in(p). \tag{36}$$

Каждый элемент двухстороннего идеала (p) в KG имеет вид q_0+q_1b, где $q_i\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ $(i=0, 1)$. Следовательно, из (36) вытекает, что $(a^2-1)\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$ в KH. Но простые делители элемента a^2-1 в KH ассоциированы только с $a+1$ и $a-1$. Следовательно, если p не ассоциирован с элементом $a-1$ или $a+1$, то идеалы C_1 и C_2 между собой изоморфны. Если же p ассоциирован с $a-1$ или $a+1$, то алгебра C двумерна над K, идеалы C_1 и C_2 одномерны над K, а e_i — единица в C_i $(i=1, 2)$. В этом случае $C_1\not\cong C_2$, ибо в идеалах C_1 и C_2 реализуются одномерные K-представления $a\to 1, b\to 1$; $a\to 1, b\to -1$ (соответственно представления $a\to -1, b\to 1$; $a\to -1, b\to -1$) группы G. В силу известной теоремы артиновых колец, число неразложимых проективных модулей над конечномерной алгеброй равно числу неприводимых модулей над этой алгеброй. Следовательно, идеалы A_1 и A_2 KG-изоморфны, если простой элемент p ассоциирован с неприводимым полиномом степени, большей чем 1, и не изоморфны, если p ассоциирован с $a-1$ или $a+1$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Каждый конечно-порождённый KG-модуль M разлагается в прямую сумму неразложимых циклических подмодулей. Неразложимые конечномерные над K циклические KG-модули описываются теоремой 5 и определены с точностью до изоморфизма, а каждый неразложимый бесконечномерный над K циклический модуль изоморфен одному из проективных модулей KGe_i $(i=1, \ldots, 4)$* (см. (2)), *причём прямые суммы проективных неразложимых циклических KG-модулей, участвующих в разложении M, описываются теоремами § 1, применительно к фактор-модулю M/M_0, где M_0 — подмодуль модуля M, состоящий из всех элементов этого модуля, имеющих нулевые аннуляторы в KH.*

Доказательство. Пусть M — конечно-порождённый KG-модуль, а M_0 — KH-подмодуль модуля M, указанный в формулировке теоремы. Тогда M_0 — KG-подмодуль модуля M. Действительно, пусть $x\in M_0$, $q_0+q_1b\in KG$, $q_0, q_1\in KH$ и $tx=0$ для некоторого $t\neq 0, t\in KH$. Тогда $t\cdot\bar{t}\neq 0$ и

$$t\bar{t}(q_0+q_1b)x=(q_0+q_1b)t\bar{t}x=0,$$

то есть $(q_0+q_1b)x\in M_0$.

Образуем фактор-модуль M/M_0. Тогда M/M_0 — KG-модуль без KH-кручения. Кроме того, модуль M/M_0 — конечно-порождён как фактор-модуль конечно-порождённого модуля. В силу теоремы 1, M/M_0 — проективный KG-модуль и, следовательно, имеет место разложение

$$M=L\dotplus M_0,$$

где $L\cong M/M_0$. В свою очередь M_0 — конечно-порождённый KG-модуль. Следовательно, M_0 — конечно-порождённый периодический KH-модуль, и разлагается в прямую сумму примарных KH-модулей. Так как последние конечномерны над K, то M_0 — конечномерный KG-модуль. Тогда к M_0 применима классическая теорема Круля—Шмидта, в силу которой M_0 однозначно с точностью до изоморфизма слагаемых разлагается в прямую сумму неразложимых KG-модулей. Последние описываются теоремой 5. В частности, они цикличны.

По теореме 1, модуль L разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных проективным модулям KGe_i $(i=1, \ldots, 4)$. Разлагая L и M_0 в прямые суммы неразложимых циклических KG-модулей, получим разложение M в прямую сумму неразложимых циклических подмодулей. Так как подмодуль M_0 определён в M абсолютно однозначно, то прямые суммы проективных циклических модулей в разложении M описываются теоремами § 1 в применении к фактор-модулю M/M_0. Теорема доказана.

Литература

[1] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. *Изд. Наука, Москва* 1969.

[2] А. Картан—С. Эйленберг, Гомологическая алгебра. *Изд. Иностранной Литературы, Москва* 1960.

(Поступило 5. VI. 1978.)