

# Les extensions et les schémas non-commutatifs

Par A. VERSCHOREN (Anvers) \*)

## Résumé

A tout anneau peut être associé un schéma affine. L'emploi des extensions au sens de PROcesi fonde une géométrie algébrique dont le formalisme est très proche du commutatif. Exemple: le sorite des sous-schémas et des schémas réduits.

## 0. Introduction

Cette note a pour but de montrer comment les extensions au sens de PROcesi [6] peuvent servir à définir une géométrie algébrique non-commutative. Ailleurs nous étudierons les produits fibrés, les variétés algébriques, les groupes algébriques et leur applications. Comme nous y utiliserons des techniques assez différentes de celles introduites ici, comme la localisation des bimodules et l'emploi des anneaux à identité polynomiale, nous nous limiterons dans cette note aux constructions et aux premières applications.

Nous indiquons d'abord, en nous inspirant de [5] et [7], comment associer à un anneau non nécessairement commutatif un schéma affine ayant des propriétés assez proches de celles rencontrées dans le cas commutatif. Le comportement de ce schéma est optimal si en plus l'on suppose que l'anneau de base est «géométrique»; dans ce cas, il est assez facile de définir à la façon de Grothendieck des «schémas» à propriétés raisonnables, même dans le cas non-commutatif. Comme première application et en guise d'exemple nous étudierons ensuite les schémas réduits et les sous-schémas fermés. Cela nous montrera que le formalisme géométrique est le même que dans le cas commutatif et nous permettra dans une note ultérieure d'introduire des variétés algébriques.

Je tiens à remercier le professeur F. VAN OYSTAEYEN de l'université d'Anvers pour son intérêt et ses suggestions constructives, sans lesquelles ce travail n'aurait jamais vu le jour.

## 1. Bimodules et algèbres

Dans cette section nous rappelons quelques résultats et définitions de [1].

1.1. Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module bilatère. Son *centre* est défini par

$$Z_A(M) = \{m \in M; \forall a \in A, am = ma\}.$$

---

(\*) L'auteur bénéficie d'une bourse de la N. F. W. O. à l'université d'Anvers, contrat A2/35.

On dit que le module  $M$  est un  $A$ -module dans le sens de Artin ou simplement un  $A$ -bimodule s'il n'y a pas d'ambiguïté, si  $M$  est engendré en tant que  $A$ -module par  $Z_A(M)$ . Si l'anneau  $A$  est commutatif, un  $A$ -bimodule est simplement un module dans le sens habituel. Un morphisme  $\varphi: M \rightarrow N$  de  $A$ -bimodules est par définition un homomorphisme de  $A$ -modules bilatères. L'on a bien-sûr  $\varphi(Z_A(M)) \subseteq Z_A(N)$ . Réciproquement, si  $\varphi$  est un homomorphisme  $A$ -linéaire à gauche (ou à droite) pour lequel  $\varphi(Z_A(M)) \subseteq Z_A(N)$ , cet homomorphisme est un morphisme de  $A$ -bimodules. Ceci définit une catégorie  $\underline{b}(A)$  ayant pour objets les  $A$ -bimodules et pour morphismes les morphismes de  $A$ -bimodules. Elle est additive, mais en général non-abelienne. Notons que pour tout couple  $M, N$  de  $A$ -bimodules l'ensemble  $\text{Hom}_{\underline{b}(A)}(M, N)$  est muni de façon canonique d'une structure de  $Z(A)$ -module, où  $Z(A)$  dénote le centre de  $A$ . Il est enfin clair que  $A$  lui-même est un  $A$ -bimodule.

1.2. D'après PROCESI [6] on appelle *extension* un homomorphisme d'anneaux  $f: A \rightarrow B$  qui munit  $B$  d'une structure de  $A$ -bimodule. Cela signifie que  $B$  est engendré en tant que  $A$ -module par

$$Z_A(B) = \{b \in B; \forall a \in A: f(a)b = bf(a)\}$$

ou que l'anneau  $B$  est engendré par  $f(A)$  et  $Z_A(B)$ . On dit aussi que  $B$  est une  $A$ -algèbre. L'exemple générique d'une  $A$ -algèbre est l'algèbre  $A\{X_i\}$  des polynômes non-commutatifs en  $X_i$  à coefficients dans  $A$ , c'est-à-dire les variables  $X_i$  ne commutent pas entre-elles, mais commutent avec les éléments de  $A$ . Cela signifie que les  $X_i$  sont dans  $Z_A(A\{X_i\}) = Z(A)\{X_i\}$ . De plus, on voit facilement que toute  $A$ -algèbre est isomorphe à un quotient d'une algèbre de polynômes par un idéal (bilatère).

L'algèbre  $B$  est centrale si elle est engendrée comme  $A$ -bimodule par son centre  $Z(B) = Z_B(B)$ . Ici l'exemple principal est l'algèbre  $A[X_i]$  des polynômes commutatifs en  $X_i$  à coefficients dans  $A$ . Les variables commutent entre-elles et avec les scalaires. Notons que toute  $A$ -algèbre centrale est isomorphe à un quotient d'une algèbre  $A[X_i]$ . Il est évident qu'on définit ainsi des catégories  $\underline{Alg}_A$  resp.  $\underline{Alg}_A^c$  ayant pour objets les  $A$ -algèbres, resp. les  $A$ -algèbres centrales. Des catégories sont des cas particuliers de catégories dites «monoidales».

Remarquons que nous pouvons toujours supposer que les extensions considérées sont injectives:

**1.3. Lemme.** Soit  $f: A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1.3.1.)  $f$  est une extension;

(1.3.2.) l'injection canonique  $i: f(A) \hookrightarrow B$  est une extension.

En effet, il est évident que (1.3.2.) implique (1.3.1.),  $A \rightarrow f(A)$  étant surjectif donc une extension; d'autre part, si  $f$  est une extension,  $Z_A(B) \subseteq Z_{f(A)}(B)$  implique  $B = Z_A(B)f(A) = Z_{f(A)}(B)i(f(A))$ .  $\square$

## 2. Schémas affines associés à un anneau

Tous les anneaux considérés dans la suite sont noethériens à gauche.

2.1. Le spectre ou spectre premier d'un anneau unitaire  $A$  est par définition l'ensemble  $X = \text{Spec}(A)$  des idéaux premiers (bilatères) propres de  $A$ . À un idéal  $I$  de  $A$  on associe l'ensemble  $V(I) = \{P \in X, P \supset I\}$  qui dépend seulement du radical  $\text{rad } I$  de  $I$ . Nous dénotons le complément de  $V(I)$  dans  $\text{Spec}(A)$  par  $X_I$ . On vérifie facilement que les ensembles  $X_I$  définissent une topologie sur  $X$  qu'on appelle la *topologie de Zariski*.

Un homomorphisme  $\varphi: A \rightarrow B$  d'anneaux non nécessairement commutatifs n'induit généralement pas de morphisme

$${}^a\varphi = \text{Spec}(\varphi): \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

comme dans le cas commutatif. Ainsi, en général  $\text{Spec}$  ne définira pas d'objets géométriques.

Néanmoins nous avons la proposition suivante:

**2.2. Proposition (PROCESI).** Soit  $\varphi: A \rightarrow B$  une extension, alors

(2.2.1.)  $P \in \text{Spec}(B)$ , on a  $\varphi^{-1}(P) \in \text{Spec}(A)$ ;

(2.2.2.) Le morphisme induit

$${}^a\varphi: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

est continu.  $\square$

2.3. On obtient ainsi un foncteur contravariant  $\text{Spec}$  de la catégorie  $\underline{\mathcal{E}}$  des anneaux unitaires et des extensions dans  $\underline{\text{Top}}$ , la catégorie des espaces topologiques et des applications continues. Nous pouvons relativiser ce foncteur à  $\underline{\text{Alg}}_A = \underline{\mathcal{E}}/A$ , où  $A$  est un anneau arbitraire. On obtient alors un foncteur contravariant

$$\text{Spec}: \underline{\text{Alg}}_A \rightarrow \underline{\text{Top}}/\text{Spec}(A)$$

où  $\underline{\text{Top}}/\text{Spec}(A)$  et la catégorie des espaces topologiques sur  $\text{Spec}(A)$ .

2.4. Rappelons quelques définitions.

Un *espace annelé* est un couple  $\mathcal{X} = (X, \underline{\mathcal{O}}_X)$ , où  $X$  est un espace topologique et  $\underline{\mathcal{O}}_X$  un faisceau d'anneaux sur  $X$ . Un *morphisme d'espaces annelés*

$$\Phi: \mathcal{X} = (X, \underline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow \mathcal{Y} = (Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$$

est une paire  $(\varphi, \theta)$ , où  $\varphi: X \rightarrow Y$  est une application continue entre les espaces topologiques sous-jacents, et où  $\theta: \underline{\mathcal{O}}_Y \rightarrow \varphi_* (\underline{\mathcal{O}}_X)$  est un morphisme de faisceaux. Notons que le faisceau induit  $\varphi_* (\underline{\mathcal{O}}_X)$  sur  $Y$  est défini comme habituellement par

$$\Gamma(U, \varphi_* (\underline{\mathcal{O}}_X)) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \underline{\mathcal{O}}_X)$$

pour tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $Y$ . On obtient de cette façon la *catégorie des espaces annelés*, qu'on dénote par  $\underline{\mathcal{R}}$ . Un exemple bien connu est le spectre d'un anneau commutatif muni de son faisceau structurel canonique.

Si  $\mathcal{X}$  est un espace annelé, nous dénotons par  $\underline{\mathcal{R}}/\mathcal{X}$  la catégorie des espaces annelés au-dessus de  $\mathcal{X}$ .

**2.5. Lemme.** Soient  $(\varphi_1, \theta_1)$  et  $(\varphi_2, \theta_2)$  deux morphismes entre les espaces annelés  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$ . Ces morphismes induisent pour chaque  $x \in X, y = \varphi(X)$ , des morphismes

$$\theta_{i,x}: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \quad (i = 1, 2)$$

entre les fibres correspondantes. Supposons que pour tout  $x \in X$  ces morphismes coïncident, alors  $(\varphi_1, \theta_1) = (\varphi_2, \theta_2)$ .

En effet, il suffit de prouver que pour tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $X$  les morphismes  $\theta_1(U)$  et  $\theta_2(U): \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$  coïncident. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$(2.5.1.) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(U) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_1(U)} \\ \xrightarrow{\theta_2(U)} \end{array} & \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)) \\ \downarrow \rho_Y^U & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\theta_{1,x} = \theta_{2,x}} & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

Prenons  $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ , nous avons alors

$$(\varrho_x^{\varphi^{-1}(U)} \circ \theta_1(U))(s) = (\varrho_x^{\varphi^{-1}(U)} \circ \theta_2(U))(s);$$

ainsi, il existe un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$  contenu dans  $\varphi^{-1}(U)$  pour lequel

$$(2.5.2.) \quad \varrho_{V_x}^{\varphi^{-1}(U)}(\theta_1(U))(s) = \varrho_{V_x}^{\varphi^{-1}(U)}(\theta_2(U))(s).$$

Comme ceci peut être réalisé pour chaque  $x \in \varphi^{-1}(U)$  nous pouvons recouvrir  $\varphi^{-1}(U)$  par une famille  $(V_x)_{x \in \varphi^{-1}(U)}$  telle que nous avons (2.5.2.) pour tout  $x$ ; mais comme  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau, cela donne  $\theta_1(U)(s) = \theta_2(U)(s)$ , d'où la conclusion.  $\square$

2.6. Soit  $\mathcal{R}$  la catégorie des espaces annelés. Nous voulons définir un foncteur contravariant

$$\text{Spec}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$$

resp. un foncteur

$$\text{Spec} = \underline{\text{Alg}}_A \rightarrow \mathcal{R}/\text{Spec}(A).$$

Dans ce but, associons à tout anneau noethérien à gauche  $A$  un «schéma» affine de la façon suivante:

L'espace topologique sous-jacent est l'espace  $\text{Spec}(A)$  muni de la topologie de Zariski. Afin de construire un faisceau structurel sur  $\text{Spec}(A)$ , nous ferons

correspondre à tout idéal  $I$  de  $A$  le filtre localisant  $\mathcal{F}(I)$  formé de idéaux à gauche contenant un idéal  $I$  tel que  $\text{rad } I \supseteq I$  ou, ce qui revient au même, qui est formé des idéaux à gauche  $L$  tels que  $L \supseteq I^n$  pour un entier positif  $n$ . Comme  $\mathcal{F}(I)$  admet une base formée d'idéaux, ce filtre définit un foncteur noyau symétrique  $\sigma_I$ :

$$\sigma_I(M) = \{m \in M; \exists L \in \mathcal{F}(I), Lm = 0\}$$

pour tout  $R$ -module à gauche  $M$ .

En utilisant des techniques de localisation comme exposées dans [4], nous associons alors à tout sous-ensemble ouvert non-vide  $X_I$ , c'-à-d. pour lequel  $I \not\subseteq \text{rad } 0$ , l'anneau de fractions  $Q_I(A)$  de  $A$  par rapport à  $\sigma_I$ . Ceci est bien défini, puisque  $X_I$  et  $\mathcal{F}(I)$  ne dépendent clairement que du radical de  $I$ . On vérifie que l'on définit ainsi un préfaisceau d'anneaux séparé  $\underline{\mathcal{Q}}^0(A)$  sur  $\text{Spec}(A)$  avec des morphismes de restriction évidents. Si  $A$  est un anneau premier on constate avec joie que  $\underline{\mathcal{Q}}^0(A)$  est un faisceau d'anneaux. Dans le cas général nous dénotons par  $\underline{\mathcal{Q}}(A)$  ou  $\underline{A}$  le faisceau associé à  $\underline{\mathcal{Q}}^0(A)$ . Ce faisceau s'appelle le *faisceau structural* de  $\text{Spec}(A)$  et le couple  $(\text{Spec}(A), \underline{\mathcal{Q}}(A)) = \text{Spec}(A)$  est le *schéma affine associé* à  $A$ .

2.7. Plus généralement nous pouvons définir pour tout  $M \in A\text{-mod}$ , la catégorie des  $A$ -modules à gauche, un préfaisceau de  $\underline{\mathcal{Q}}^0$ -modules à gauche sur  $\text{Spec}(A)$ , en mettant sur  $X_I$ , le module de fractions  $Q_I(M)$  de  $M$  par rapport à  $\sigma_I$  et en utilisant [9] où l'on a prouvé que  $\{\sigma_I\}$  définit un foncteur noyau "local" sur  $\text{Spec}(A)$ . On dénote par  $\underline{\mathcal{Q}}_A(M)$  le faisceau associé. Cette construction produit un foncteur covariant

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{Q}}_A(-) : A\text{-mod} &\rightarrow \sigma(\underline{\mathcal{Q}}_A) \\ M &\rightarrow \underline{\mathcal{Q}}_A(M) \end{aligned}$$

où  $\sigma(\underline{\mathcal{Q}}_A)$  est la catégorie des faisceaux de  $\underline{\mathcal{Q}}_A$ -modules à gauche. Ce foncteur est exact si  $\text{Spec}(A)$  possède une base d'ensembles parfaits, c'-à-d. d'ensembles ouverts  $X_I$  tels que  $\sigma_I$  détermine une localisation parfaite et que tout idéal  $\sigma_I$ -fermé  $K$  de  $A$  se prolonge en un idéal propre de  $Q_I(A)$ .

Pour tout idéal  $I$  de  $A$  tel que  $A$  est  $\sigma_I$ -parfait (cf. [7]) l'espace annelé  $(X_I, \underline{\mathcal{Q}}_A|_{X_I})$  est isomorphe à  $\text{Spec}(Q_I(A))$ . De même on a  $\underline{\mathcal{Q}}_{Q_I(A)}(Q_I(M)) = \underline{\mathcal{Q}}_A(M)|_{X_I}$  pour tout  $A$ -module à gauche  $M$ .

**2.8. Proposition.** *Soit  $\text{Spec } A$  un schéma affine, alors on a pour tout  $A$ -module à gauche  $M$  absolument sans torsion*

$$\Gamma(\text{Spec}(A), \underline{\mathcal{Q}}_A(M)) \cong M.$$

En effet, comme  $\underline{\mathcal{Q}}_A^0(M)$  est séparé, on a clairement  $\underline{\mathcal{Q}}_A^0(M) \hookrightarrow \underline{\mathcal{Q}}_A(M)$  et on déduit qu'il suffit de prouver que  $\Gamma(\text{Spec}(A), \underline{\mathcal{Q}}_A^0(M)) \cong M$ . Mais  $V(A) = \emptyset$ , donc  $\text{Spec}(A) = X_A$  et sur  $X_A$  on a mis  $Q_A(M)$ , la localisation par rapport à  $\sigma_A$ . Le foncteur noyau  $\sigma_A$  étant associé au filtre localisant  $\mathcal{F}(A)$  qui ne contient que l'anneau  $A$  lui-même. Pour tout  $M$  la torsion est donc  $\sigma_A M = \{m \in M; Am = 0\} = 0$ , ainsi  $Q_A(M) \cong M$ .  $\square$

2.9.  $A$  un idéal premier  $P$  de  $A$  on associe un foncteur noyau symétrique  $\sigma_{A-P}$  comme suit. Pour tout  $M \in A\text{-mod}$  on définit  $\sigma_{A-P} M = \{m \in M; \exists s \in A - P, sAm = 0\}$ . Ce foncteur noyau est associé au filtre localisant  $\mathcal{F}(A - P)$  qui est formé des idéaux

de  $A$  qui contiennent un idéal principal  $(s) = sA$  engendré par un élément  $s \in A - P$ . Notons que nous devons supposer que  $A$  est noethérien à gauche,  $\sigma_{A-P}$  n'étant pas nécessairement idempotent au cas contraire.

**2.10. Proposition.** (cf. [7]). Si  $P \in X = \text{Spec}(A)$ , on a

$$(2.10.1.) \quad \sup \{ \sigma_I; P \in X_I \} = \sigma_{A-P};$$

$$(2.10.2.) \quad \varinjlim_{P \in X_I} Q_I(A) = Q_{A-P}(A). \quad \square$$

Cette proposition décrit complètement les fibres du faisceau structurel  $\underline{Q}_A$  sur  $\text{Spec}(A)$ .

### 3. Comportement fonctoriel

**3.1. Lemme.** Pour tout idéal premier  $P$  de  $A$  on a  $\sigma_{A-P}A \subset P$ .

C'est évident, puisqu'un élément  $x \in A$  est contenu dans  $\sigma_{A-P}A$  si et seulement si pour un certain élément  $s \in A - P$  on a  $sAx = 0$ ; mais alors  $AsA \cdot Ax = 0 \subset P$ , c'-à-d.  $AsA \subseteq P$  ou  $AxA \subseteq P$  et le premier étant impossible, on conclut  $x \in P$ .  $\square$

**3.2. Lemme.** Soit  $P$  un idéal premier de  $A$  et soit  $j_{P,A} = j_P: A \rightarrow Q_{A-P}(A)$  le morphisme canonique, alors

$$j_P^{-1}(Q_{A-P}(P)) = P.$$

En effet, dénotons d'abord par  $\delta(P)$  l'ensemble  $\{x \in A; Kx \subseteq P \text{ pour un idéal à gauche } K \text{ dans } \mathcal{L}(A-P)\}$ . Si  $x \in j_P^{-1}(Q_{A-P}(P))$ , alors  $j_P(x) \in Q_{A-P}(A)j_P(P) \cap j_P(A)$ , il existe  $q_i \in Q_{A-P}(A)$  et  $p_i \in j_P(P)$  tel que  $j_P(x) = \sum' q_i p_i$ . Choisissons  $K \in \mathcal{F}(A-P)$  tel que  $Kq_i \subseteq j_P(A)$  et remarquons que  $Kj_P(x) \subseteq j_P(P)$ , puisque  $Kj_P(x) \subseteq \sum' Kq_i p_i \subseteq \sum' j_P(A)p_i \subseteq j_P(P)$ ; de plus  $Kx \subseteq P + \sigma_{A-P}P = P$ , donc  $x \in \delta(P)$ , ce qui prouve que  $j_P^{-1}(Q_{A-P}(P)) \subseteq \delta(P)$ .

Démontrons maintenant que  $\delta(P) = P$ . L'inclusion  $\delta(P) \supseteq P$  est évidente; réciproquement soit  $x \in \delta(P)$ , il existe alors  $K \in \mathcal{F}(A-P)$  tel que  $Kx \subseteq P$  et nous pouvons choisir  $K = (s)$  pour un élément  $s \in A - P$ , donc  $AsA \cdot Ax \subseteq P$ , d'où  $x \in P$ .

Finalement, il est clair que  $P \subseteq j_P^{-1}(Q_{A-P}(P))$ . En effet, considérons le diagramme commutatif suivant:

$$(3.2.1.) \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & A \\ \downarrow j_{P,P} & & \downarrow j_{P,A} \\ Q_{A-P}(P) & \xrightarrow{Q_{A-P}(i)} & Q_{A-P}(A) \end{array}$$

où  $i$  est l'inclusion canonique. Pour  $x \in P$  on a  $j_P(x) = (j_{P,A} \circ i)(x) = (Q_{A-P}(i) \circ j_{P,P})(x)$ , donc  $j_P(x) \in Q_{A-P}(P)$ .  $\square$

**3.3. Lemme.** Soient  $\varphi: A \rightarrow B$  une extension et  $I$  un idéal de  $A$ . Pour tout sous-ensemble  $H$  de  $B$  dénotons par  $(H)$  l'idéal de  $B$  engendré par  $H$ . Alors pour tout entier positif  $n$  on obtient:

$$(\varphi(I))^n = (\varphi(I^n)).$$

Il suffit de le prouver pour  $n=2$ , et dans ce cas on a

$$\begin{aligned} (\varphi(I))^2 &= B\varphi(I)B\varphi(I)B = B\varphi(I)\varphi(A)Z_A(B)\varphi(I)B = \\ &= B\varphi(IA)\varphi(I)Z_A(B)B = B\varphi(I)^2B = (\varphi(I)^2). \quad \square \end{aligned}$$

**3.4. Corollaire.** Soient  $\varphi: A \rightarrow B$  une extension,  $N$  un  $A$ -module à gauche,  $M$  un  $B$ -module à gauche et  $\psi: N \rightarrow M$  un morphisme de modules, semi-linéaire par rapport à  $\varphi$ . On a l'inclusion suivante

$$\varphi(\sigma_I N) \subseteq \sigma_J M$$

où  $J = (\varphi(I))$ .

En effet, si  $n \in \sigma_I N$ , il existe un entier positif  $p$  telque  $I^p n = 0$ , donc

$$0 = \psi(I^p n) = \varphi(I^p)\psi(n) = \varphi(I)^p \psi(n)$$

d'où  $(\varphi(I)^p)\psi(n) = 0$ , puisque

$$\begin{aligned} B\varphi(I^p)B\psi(n) &= B\varphi(I^p)\varphi(A)Z_A(B)\psi(n) = \\ &= B\varphi(I^p)Z_A(B)\psi(n) = BZ_A(B)\varphi(I^p)\psi(n) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, du lemme précédent il résulte que

$$J^p \psi(n) = (\varphi(I))^p \psi(n) = (\varphi(I^p))\psi(n) = 0, \quad \text{c'-à-d.} \quad \psi(n) \in \sigma_J M. \quad \square$$

**3.5.** DELALE a cité dans [2] les résultats suivants: soit  $\varphi: A \rightarrow B$  une extension centrale, chaque foncteur noyau  $\sigma$  dans  $A$ -mod induit un foncteur noyau  $\varphi_* \sigma$  dans  $B$ -mod en définissant pour tout  $M \in B$ -mod la torsion par  $(\varphi_* \sigma)(M) = \sigma(M_A)$  où  $M_A$  est le  $A$ -module de  $M$  par restriction de scalaires. Visiblement le filtre localisant de  $\varphi_* \sigma$  est donné par

$$\mathcal{F}(\varphi_* \sigma) = \{I \text{ idéal de } B, \varphi^{-1}(I) \in \mathcal{F}(\sigma)\}.$$

En démontrant que  $[Q_{\varphi_* \sigma}(B)]_A = Q_\sigma(B_A)$ , il prouve que le morphisme

$$Q_\sigma(\varphi): Q_\sigma(A) \rightarrow Q_\sigma(B)$$

est une extension (centrale !). Dans [10] nous avons démontré que le même résultat

reste valable pour une extension non nécessairement centrale mais en supposant, soit que  $\sigma$  induit une localisation parfaite, soit que  $\varphi$  est un morphisme plat.

Dans ce qui suit l'on suppose toujours que l'une de ces conditions au moins est satisfaite. Ceci ne causera aucun problème géométrique. En effet, la restriction:  $\varphi$  est centrale sera en pratique toujours réalisable,  $B$  étant alors de la forme  $A[X_i]/I$ ; en ce qui concerne la perfection de  $\sigma$  on réfère au paragraphe suivant, en remarquant que l'on supposera souvent que  $\text{Spec}(A)$  possède une base formée d'ensembles  $X_I$  tels que  $\sigma_I$  est parfait (= ouvert spécial) et que pour déduire les propriétés qui suivent, il suffit de les prouver pour une base de la topologie de Zariski sur  $\text{Spec}(A)$ ; enfin la platitude s'interprète géométriquement comme au commutatif.

Si on applique les résultats ci-dessus à une extension  $\varphi: A \rightarrow B$  où l'on prend  $\sigma = \sigma_I$ , comme dans (2.1), on obtient une extension  $\varphi_I: Q_I(A) \rightarrow Q_I(B)$ .

Sur  $B\text{-mod}$  vivent alors deux foncteurs noyau:  $\varphi_*\sigma_I$  et  $\sigma_J$ , où  $J = (\varphi(I))$  l'idéal engendré par  $\varphi(I)$ .

**3.6. Proposition.** *Avec les hypothèses qu'on vient de formuler, et que l'on supposera satisfaites dans ce qui suit, les foncteurs  $\varphi_*\sigma_I$  et  $\sigma_J$  coïncident.*

En effet, prenons  $M \in B\text{-mod}$ , alors  $m \in \varphi_*\sigma_I M$  ssi il existe un idéal  $K \subset \mathcal{F}(\varphi_*\sigma_I)$  pour lequel  $Km = 0$ . Prouvons que  $K \in \mathcal{F}(\sigma_J) = \mathcal{F}(J)$ . Si  $K \in \mathcal{F}(\varphi_*\sigma_I)$ , il existe par définition un entier positif  $n$  tel que  $\varphi^{-1}(K) \supseteq I^n$ ; mais alors  $K \supseteq \varphi(\varphi^{-1}(K)) \supseteq \varphi(I^n) = \varphi(I)^n$ , d'où  $K \supseteq (\varphi(I)^n)$ ; il suffit maintenant d'appliquer le Lemme (3.3.) pour trouver que  $K \supseteq J^n$  c'-à-d.  $K \in \mathcal{F}(J)$ .

Réciproquement, si  $K \in \mathcal{F}(J)$ , il existe un entier positif  $n$  tel que  $K \supseteq J^n$ ; en plus nous pouvons supposer  $K$  bilatère. Ainsi  $\varphi^{-1}(K) \supseteq \varphi^{-1}(J^n) \supseteq \varphi^{-1}(J)^n \supseteq I^n$ . En effet, l'inclusion au milieu est correcte comme on le voit de la façon suivante: prenons  $x \in \varphi^{-1}(J)^n$ , alors  $x = \sum_i' x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$  avec  $x_{j,i} \in \varphi^{-1}(y_{j,i})$  pour certains  $y_{j,i} \in J$ , d'où

$$\varphi(x) = \sum_i' \varphi(x_{1,i}), \dots, \varphi(x_{n,i}) = \sum_i' y_{1,i}, \dots, y_{n,i} \in J^n$$

et  $x \in \varphi^{-1}(J^n)$ . Finalement  $I^n \subseteq \varphi^{-1}(K)$  signifie que  $\varphi^{-1}(K) \in \mathcal{F}(I)$ , c'-à-d.  $K \in \mathcal{F}(\varphi_*\sigma_I)$ .  $\square$

**3.7. Corollaire.** *Avec les notations de (3.5.) on trouve une isomorphisme*

$$\gamma_B: Q_I(B) =: Q_{\varphi_*\sigma_I}(B) \xrightarrow{\cong} Q_J(B).$$

Ce n'est qu'une reformulation.

**3.8. Théorème.** *Toute extension  $\varphi: A \rightarrow B$  définit un morphisme d'espaces annelés.*

$$\Phi = ({}^a\varphi, \theta): \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A).$$

Notons  $X$  (resp.  $Y$ ) pour  $\text{Spec}(A)$  (resp.  $\text{Spec}(B)$ ). L'application  ${}^a\varphi: Y \rightarrow X$  a déjà été définie ci-dessus, elle est donnée par  $({}^a\varphi)(P) = \varphi^{-1}(P)$ , pour tout  $P \in Y$ . Elle est continue, car  $({}^a\varphi)^{-1}(X_I) = X_J$ , si  $J = (\varphi(I))$ .



On peut construire l'application  $\theta: \underline{\mathcal{Q}}_A \rightarrow ({}^a\varphi)_*(\underline{\mathcal{Q}}_B)$  en la définissant pour les préfaisceaux  $\underline{\mathcal{Q}}_A$  et  $({}^a\varphi)_*(\underline{\mathcal{Q}}_B)$  et (si nécessaire) sur une base formée d'ouverts spéciaux. Ainsi, si  $X_I$  et un ouvert spécial de  $X$ , on a  $\Gamma(X_I, \underline{\mathcal{Q}}_A) = \mathcal{Q}_I(A)$  et  $\Gamma(X_I, ({}^a\varphi)_*(\underline{\mathcal{Q}}_B)) = \Gamma(Y_J, \underline{\mathcal{Q}}_B) = \mathcal{Q}_J(B)$ , donc nous devons construire de façon fonctorielle un morphisme

$$\theta_I: \mathcal{Q}_I(A) \rightarrow \mathcal{Q}_J(B).$$

Ce morphisme est l'application composée

$$\theta_I: \mathcal{Q}_I(A) \xrightarrow{\varphi_I} \mathcal{Q}_I(B) \xrightarrow{\gamma_B} \mathcal{Q}_J(B)$$

cf. (3.5.) et (3.7.). La vérification de la fonctorialité en  $I$  est un exercice facile que nous laissons au lecteur.  $\square$

3.9. Pour tout idéal premier  $P$  de  $A$  on définit  $k(P) = \mathcal{Q}_{A-P}(A) / \mathcal{Q}_{A-P}(P)$ . Un morphisme  $(\varphi, \theta): \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  est local si pour tout  $P \in \text{Spec } B$ ,  $Q = \varphi(P) \in \text{Spec } A$ , le morphisme des fibres  $\theta_P: \mathcal{Q}_{A-Q}(A) \rightarrow \mathcal{Q}_{B-P}(B)$  induit un morphisme injectif  $k(Q) \hookrightarrow k(P)$ . Notons toutefois qu'en général  $\mathcal{Q}_{A-P}(A)$  n'est pas un anneau local; c'est le cas par exemple si  $\mathcal{Q}_{A-P}$  est une localisation parfaite. Nous reviendrons à cette question plus loin.

3.10. **Théorème.** *Le morphisme  $({}^a\varphi, \theta)$  construit dans (3.8.) est local.*

Notons d'abord que le morphisme  $\theta_P: \mathcal{Q}_{A-Q}(A) \rightarrow \mathcal{Q}_{B-P}(B)$  applique  $\mathcal{Q}_{A-Q}(Q)$  dans  $\mathcal{Q}_{B-P}(P)$ , comme  $\varphi_*\sigma_{A-Q} \cong \sigma_{B-P}$ . Cette dernière inégalité peut être contrôlée de la façon suivante: soit  $I$  un idéal bilatère dans  $\mathcal{F}(\varphi_*\sigma_{A-Q})$  c'-à-d.  $\varphi^{-1}(I) \in \mathcal{F}(A-Q)$ ; comme  $\varphi^{-1}(I)$  est lui-aussi bilatère, il existe  $s \in A-Q$  tel que  $s \in \varphi^{-1}(I)$ . Mais ceci implique  $I \in \mathcal{F}(B-Q)$ , car si  $\varphi(s) \in P$ , on a  $s \in \varphi^{-1}(P) = Q$ , contradiction. Donc une base de  $\mathcal{F}(\varphi_*\sigma_{A-Q})$  est contenue dans  $\mathcal{F}(B-Q)$ , ce qui démontre notre assertion. Considérons maintenant les diagrammes commutatifs suivants:

$$(3.10.1.) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_{A-Q}(A) & \xrightarrow{\Phi_P} & \mathcal{Q}_{B-P}(B) \\ \downarrow \mathcal{P}_Q & & \downarrow \mathcal{P}_P \\ \mathcal{Q}_{A-Q}(A) / \mathcal{Q}_{A-Q}(Q) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{Q}_{B-P}(B) / \mathcal{Q}_{B-P}(P) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{k}(Q) & & \mathbb{k}(P) \end{array}$$

$$(3.10.2.) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_Q} & A/Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_{A-Q}(A) & \xrightarrow{\pi_Q} & Q_{A-Q}(A/Q) \\ & \searrow \pi_Q & \uparrow \alpha \\ & & Q_{A-Q}(A)/Q_{A-Q}(Q) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi_P} & B/P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_{B-P}(P) & \xrightarrow{\pi_P} & Q_{B-P}(B/P) \\ & \searrow \pi_P & \uparrow \beta \\ & & Q_{B-P}(B)/Q_{B-P}(P) \end{array}$$

où l'existence de  $\alpha$  et  $\beta$  découle de la semi-exactitude à gauche de  $Q$ .

$$(3.10.3.) \quad \begin{array}{ccc} Q_{A-Q}(A) & \xrightarrow{\varphi_P} & Q_{B-P}(B) \\ \pi_Q \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ Q_{A-Q}(A/Q) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_P} & Q_{B-P}(B/P) \end{array}$$

Le morphisme  $\bar{\varphi}_P$  est injectif; en effet, c'est le morphisme unique qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$(3.10.4.) \quad \begin{array}{ccccc} A/Q & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & B/P & & \\ \downarrow j_{Q,A} & & \downarrow j_{Q,B} & \searrow j_P & \\ Q_{A-Q}(A/Q) & \xrightarrow{Q_{A-Q}(\bar{\varphi})} & Q_{A-Q}(B/P) & \xrightarrow{\tau} & Q_{B-P}(B/P) \end{array}$$

Dans ce diagramme  $\bar{\varphi}$  est injectif car  $\varphi^{-1}(P)=Q$ , donc  $Q_{A-Q}(\bar{\varphi})$  l'est aussi; comme  $B/P$  est sans  $\sigma_{B-P}$ -torsion, cf. lemme (2.10.),  $Q_{B-P}(B/P)$  est l'enveloppe  $\sigma_{B-P}$ -injective de  $B/P$ , d'où l'injectivité de  $j_P$ ; comme  $\varphi_*\sigma_{A-Q} \cong \sigma_{B-P}$ , le module  $B/P$  est sans  $\sigma_{A-Q}$ -torsion, donc le morphisme  $j_{Q,B}$  est injectif lui-aussi. De l'essentialité de  $Q_{B-P}(B/P)$  sur  $B/P$ , on conclut que  $\tau$  est injectif. Supposons en effet le contraire, alors  $\tau$  a un noyau, disons  $K$ , qui est différent de zéro. Mais alors  $K \cap B/P \neq 0$ ,

c'-à-d. il existe  $b \neq 0$  dans  $B/P$  tel que  $\tau \circ j_{Q,B}(b) = 0$ , donc  $j_P(b) = 0$  et  $b = 0$ , puisque  $j_P$  est injectif; ceci contredit notre hypothèse.

Considérons maintenant les identités suivantes:

$$\beta \circ \gamma \circ p_Q \stackrel{(1)}{=} \beta \circ p_Q \circ \varphi_P \stackrel{(2)}{=} \pi_P \circ \varphi_P \stackrel{(3)}{=} \bar{\varphi}_P \circ \pi_Q \stackrel{(2)}{=} \bar{\varphi}_P \circ \gamma \circ p_Q$$

où (—) renvoie au diagramme commutatif qui fournit l'identité considérée; comme  $P_Q$  est surjectif, on conclut  $\beta \circ \gamma = \bar{\varphi}_P \circ \alpha$ , c'-à-d. le diagramme suivant est commutatif:

$$(3.10.5.) \quad \begin{array}{ccc} \text{lk}(Q) & \xrightarrow{\gamma} & \text{lk}(P) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ Q_{A-Q}(A/Q) & \xrightarrow{\bar{\varphi}_P} & Q_{B-P}(B/P) \end{array}$$

Mais  $\beta \circ \gamma = \bar{\varphi}_P \circ \alpha$  est injectif, car  $\bar{\varphi}_P$  et  $\alpha$  le sont, donc  $\gamma$  est injectif, ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

3.11. Soit  $\mathcal{A}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{R}$  formée des schémas affines  $\text{Spec}(A)$  et ayant comme morphismes les morphismes locaux  $(\varphi, \theta): \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$  tels que  $\theta(\text{Spec}(B)): B \rightarrow A$  soit une extension. Le théorème précédent nous fournit un foncteur

$$\text{Spec}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$$

et un foncteur

$$\text{Spec}: \underline{\text{Alg}}_A \rightarrow \underline{\mathcal{A}}/\text{Spec}(A).$$

3.12. **Théorème.** Pour tout  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{E}$  il y a correspondance bijective entre  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, A)$  et  $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B))$ .

En effet, dans (3.10.) nous avons construit une application  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, A) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(\text{Spec}(A), \text{Spec}(B))$ . Construisons maintenant une application réciproque. Soit  $(\psi, \theta): (X = \text{Spec}(A), \underline{\mathcal{A}}_A) \rightarrow (Y = \text{Spec}(B), \underline{\mathcal{A}}_B)$ . Pour tout idéal premier  $P \in \text{Spec}(A)$  et  $Q = \psi(P) \in \text{Spec}(B)$ , ceci nous donne un morphisme local

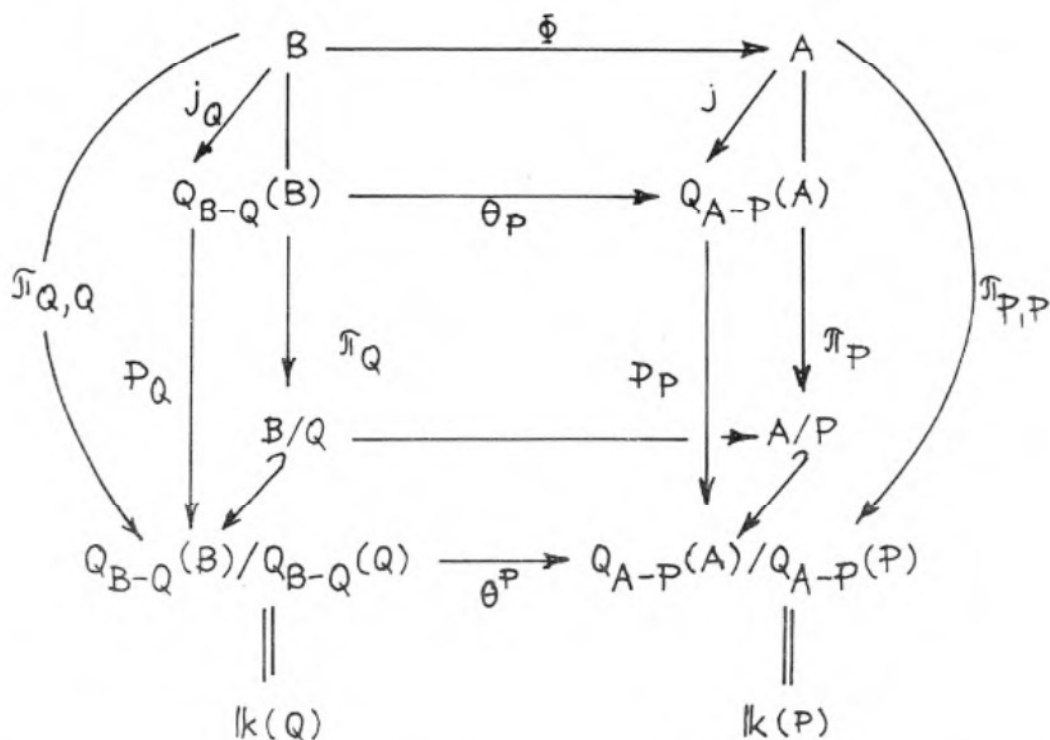
$$\theta_P: Q_{B-Q}(B) \rightarrow Q_{A-P}(A)$$

et d'autre part un morphisme entre les sections globales

$$\varphi = \theta(\text{Spec}(B)): B \rightarrow A.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant, dans lequel nous employons les mêmes notations que ci-dessus :

(3.12.1.)



Du lemme (3.2.) on déduit que les morphismes  $A/P \rightarrow Q_{A-P}(A)/Q_{A-P}(P)$  et  $B/Q \rightarrow Q_{B-Q}(B)/Q_{B-Q}(Q)$  sont injectives. De plus, si nous dénotons par  $\pi_{P,P}$  (resp.  $\pi_{Q,Q}$ ) l'application  $A \xrightarrow{\pi_P} A/P \rightarrow k(P)$  (resp.  $B \xrightarrow{\pi_Q} B/Q \rightarrow k(Q)$ ) il est clair que  $a \in P$  ssi  $\pi_P(a) = 0$  donc ssi  $\pi_{P,P}(a) = 0$  (resp.  $a \in Q$  ssi  $\pi_{Q,Q}(a) = 0$ ).

Prouvons maintenant que pour tout  $P \in \text{Spec}(A)$ ,  $\varphi^{-1}(P) = Q$ . Cela se voit comme suit: il est clair que:

$$\theta^P \pi_{Q,Q} = \theta^P p_Q j_Q = p_Q \theta_P j_Q = p_P j_P \varphi = \pi_{P,P} \varphi$$

et par hypothèse l'application  $\theta^P$  est injective (c'est exactement dire que  $(\psi, \theta)$  est un morphisme local) d'où

$$\begin{aligned} a \in \varphi^{-1}(P) &\Leftrightarrow \varphi(a) \in P \Leftrightarrow \pi_{P,P}(\varphi(a)) = 0 \Leftrightarrow \theta^P(\pi_{Q,Q}(a)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \pi_{Q,Q}(a) = 0 \Leftrightarrow a \in Q. \end{aligned}$$

Finalement,  $\varphi$  induit un morphisme de fibres  $\varphi_P: Q_{B-Q}(B) \rightarrow Q_{A-P}(A)$ , cf. (3.10.) et comme il y a un homomorphisme unique  $Q_{B-Q}(B) \rightarrow Q_{A-P}(A)$  rendant le dia-

gramme suivant commutatif

$$(3.12.2.) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow j_Q & & \downarrow j_P \\ Q_{B-Q}(B) & \longrightarrow & Q_{A-P}(A) \end{array}$$

nous pouvons conclure que pour tout  $P \in \text{Spec}(A)$ , les morphismes  $\varphi_P$  et  $\theta_P$  coïncident. Mais alors le Lemme (2.5.) nous donne  $\varphi = \theta$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$

#### 4. Schémas

4.1. Les résultats présentés jusqu'ici présentent deux lacunes. Tout d'abord, comme il n'y a pas aucune raison pour laquelle  $Q_{A-P}(P)$  serait un idéal de  $Q_{A-P}(A)$ , en général  $k(P)$  ne sera pas un anneau. D'autre part l'anneau  $Q_{A-P}(A)$  n'est pas nécessairement un anneau local, c'-à-d. à idéal maximal unique. On peut remédier à ces problèmes de la façon suivante.

Nous dirons qu'un sous-ensemble ouvert  $X_I$  de  $X = \text{Spec}(A)$  est un ensemble parfait si le filtre localisant  $\mathcal{F}(I)$  associé à  $X_I$  induit une localisation parfaite et si tout idéal  $\sigma_I$ -fermé  $K$  de  $A$  définit en localisant un idéal propre  $Q_I(K)$  de  $Q_I(A)$ . L'anneau  $A$  sera dit *géométrique* si son spectre premier  $\text{Spec}(A)$  possède une base consistant d'ensembles parfaits. C'est un problème tantalissant en théorie des anneaux que de caractériser de façon plus intrinsèque les anneaux géométriques.

4.2. Un type d'anneaux géométriques assez courant est ce que F. VAN OYSTAEYEN [8] appelle un *anneau Zariski-central*. Ces anneaux sont caractérisés par une des propriétés équivalentes suivantes:

(4.2.1.) L'ensemble  $\mathcal{B} = \{X_I; I \text{ idéal de } A \text{ tel que } I = A(I \cap Z(A))\}$  est une base pour la topologie de Zariski sur  $\text{Spec}(A)$ ;

(4.2.2.) Pour tout idéal  $I$  de  $A$  on a  $I \subseteq \text{rad } A(I \cap Z(A))$ ;

(4.2.3.) Pour tout idéal premier  $P$  de  $A$  on a  $P = \text{rad } A(P \cap Z(A))$ .

Pour la démonstration du fait que tout anneau Zariski-central est géométrique, nous renvoyons le lecteur à [8]. Remarquons que les anneaux Zariski-centraux généralisent de façon naturelle les anneaux commutatifs ou d'Azumaya.

4.3. Soient  $\gamma$  la catégorie ayant pour objets les anneaux géométriques et comme morphismes les extensions d'anneaux,  $\underline{\gamma}_A$  la catégorie relative par rapport à un anneau fixé  $A$ ,  $\underline{\mathcal{G}}$  la catégorie des espaces géométriques c'-à-d. les objets sont les espaces annelés en anneaux locaux et les morphismes induisent des extensions locales dans le sens habituel entre les fibres, finalement soit  $\underline{\mathcal{G}}_A$  la catégorie  $\underline{\mathcal{G}}/\text{Spec}(A)$ .

#### 4.4. Théorème.

(4.4.1.) Nous avons un foncteur:

$$\mathbf{Spec}: \underline{\mathcal{G}} \rightarrow \underline{\mathcal{G}}$$

et pour tout anneau géométrique  $A$  un foncteur relatif

$$\mathbf{Spec}: \underline{\mathcal{G}}_A \rightarrow \underline{\mathcal{G}}_A.$$

(4.4.2.) Ces foncteurs sont pleinement fidèles.

En effet, afin de démontrer (4.4.1.) il suffit de remarquer d'abord que si  $A$  est un anneau  $\sigma$ -parfait pour un foncteur noyau symétrique arbitraire  $\sigma$ , alors tout idéal premier  $P$  de  $A$  qui est  $\sigma$ -fermé localise en un idéal premier  $Q_\sigma(P)$  de  $Q_\sigma(A)$ , ce qui est assez simple à prouver. Ensuite remarquons qu'un anneau géométrique  $A$  est  $\sigma_{A-P}$ -parfait pour tout idéal premier  $P \in \mathbf{Spec}(A)$ ; en effet dire que  $A$  est géométrique équivaut à dire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de la topologie de Zariski, telle que  $A$  soit  $\sigma_I$ -parfait pour tout  $X_I \in \mathcal{B}$ . La proposition (2.10.) et le fait que l'ensemble des foncteurs noyaux symétriques pour lesquels  $A$  est parfait est fermé pour le supremum, démontrent notre assertion. La seconde assertion (4.4.2.) se démontre de façon analogue à (3.12.)  $\square$

4.5. Nous dirons qu'un espace géométrique  $(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  est un *schéma affine* si la condition suivante est satisfaite:

(4.5.1.) Il existe un anneau géométrique  $A$  tel que  $\mathbf{Spec}(A) \xrightarrow[\cong]{(\psi, \theta)} (X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  dans le sens suivant:  $\theta$  induit des isomorphismes (locaux):

$$\theta_x: \underline{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow Q_{A-\psi(x)}(A)$$

qui prolonge l'isomorphe global  $\Gamma(X, \underline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow A$  et  $\psi$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $\mathbf{Spec}(A)$ .

4.6. Un *schéma* est un espace géométrique  $(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  qui possède un recouvrement par des sous-ensembles ouverts  $U_\alpha$  de  $X$  tel que tout espace géométrique induit  $(U_\alpha, \underline{\mathcal{O}}_X|_{U_\alpha})$  soit affine. La sous-catégorie pleine de  $\underline{\mathcal{G}}$  formée des schémas est notée Sch. Nous laissons le relativisation au lecteur.

Soit  $(\varphi, \theta): (X, \underline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow (Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$  un morphisme de schémas. Pour tout  $x \in X$ ,  $y = \varphi(x) \in Y$ , le morphisme  $\theta_x: \underline{\mathcal{O}}_{Y,y} \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_{X,x}$  induit un morphisme injectif  $k(y) \hookrightarrow k(x)$  où  $k(z) = \underline{\mathcal{O}}_z / \underline{m}_z$ , si  $\underline{m}_z$  dénote l'idéal maximal unique de la fibre  $\underline{\mathcal{O}}_z$ . Notons que  $k(z)$  est simple, mais non nécessairement artinien.

Comme dans le cas commutatif nous obtenons pour tout anneau géométrique et tout schéma  $\mathcal{X} = (X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  une bijection

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathcal{X}, \mathbf{Spec}(A)) \cong \mathbf{Hom}_{\underline{\mathcal{G}}}(A, \Gamma(X, \underline{\mathcal{O}}_X)).$$

### 5. Sous-schémas fermés

5.1. Comme dans le cas commutatif un *sous-schéma fermé* de  $\mathcal{X}$  est par définition un couple  $(\mathcal{Y}, \pi)$ , où  $\mathcal{Y}=(Y, \mathcal{O}_Y)$  est un schéma tel que  $Y$  est fermé dans  $X$  avec inclusion canonique  $i: Y \hookrightarrow X$  et  $\pi: \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$  un morphisme de faisceaux surjectif. Si  $\pi$  est déterminé par le contexte, nous dirons simplement que  $\mathcal{Y}$  est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{X}$ . A un sous-schéma fermé  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{X}$  nous associons un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  de la façon suivante:  $\mathcal{I}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \text{Ker } \pi$ . Il est clair que  $\mathcal{I}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  détermine  $\mathcal{Y}$  à isomorphisme près. Réciproquement, tout faisceau  $\mathcal{I}$  d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  ne détermine pas nécessairement un sous-schéma fermé de  $\mathcal{X}$  — il nous faut imposer une condition de cohérence sur  $\mathcal{I}$ !

5.2. Un morphisme de schémas  $(\varphi, \theta): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une *immersion fermée* si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (5.2.1.)  $\varphi$  est fermé et injectif sur les espaces topologiques sous-jacents;
- (5.2.2.) pour tout  $x \in X, y = \varphi(x)$  l'application induite

$$\theta_x: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

est surjective.

Cela signifie que  $(\varphi, \theta)$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{Y}$  sur un sous-schéma fermé de  $\mathcal{X}$ . Nous pouvons généraliser au noncommutatif la proposition classique suivante:

**5.3. Proposition.** Soient  $A$  un anneau géométrique et  $I$  un idéal de  $A$ . La surjection canonique  $\pi: A \rightarrow A/I = \bar{A}$  définit une immersion fermée  $({}^a\pi, \theta): \text{Spec}(\bar{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ , et le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}$  associé à cette immersion satisfait a

$$(5.3.1.) \quad \Gamma(X_I, \mathcal{I}) = \mathcal{Q}_I(I) = I\mathcal{Q}_I(A)$$

$$(5.3.2.) \quad \mathcal{I}_x = I(\mathcal{Q}_A)_x, \quad \text{c'-'à-d.} \quad \forall P \in \text{Spec}(A): \mathcal{I}_P = I \cdot \mathcal{Q}_{A-P}(A) = \mathcal{Q}_{A-P}(I).$$

En effet, l'application  ${}^a\pi$  définit une bijection entre  $\text{Spec}(A/I)$  et  $V(I)$ , l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  qui contiennent  $I$ . Plus généralement, si  $J \supset I$  est un idéal de  $A$  et  $\bar{J} = J/I$ , alors  ${}^a\pi$  applique  $V(\bar{J})$  sur  $V(J)$ , c'-'à-d., cette application est fermée. Que tous les  $\theta_P$  sont surjectifs se déduit sans peine du fait que  $\theta_P$  est une localisation de  $\pi: A \rightarrow A/I$ : si  $\bar{P} = \pi(P) \in \text{Spec}(A/I)$ , on obtient  $\mathcal{Q}_{A, {}^a\pi(P)} = \mathcal{Q}_{A-P}(A)$  et  $(\mathcal{Q}_{A/I, P})_A = (\mathcal{Q}_{\bar{A}-\bar{P}}(\bar{A})) = \mathcal{Q}_{A-P}(\bar{A}) = \mathcal{Q}_{A-P}(A)/\mathcal{Q}_{A-P}(I)$  donc  $\theta_P: \mathcal{Q}_{A-P}(A) \rightarrow \mathcal{Q}_{A-P}(A)/\mathcal{Q}_{A-P}(I)$ , d'où (5.3.2.) L'assertion (5.3.1.) découle de

$$\begin{aligned} \Gamma(X_I, \mathcal{I}) &= \text{Ker}(\Gamma(X_I, \mathcal{O}_A) \rightarrow \Gamma(X_I, \mathcal{O}_A)) = \text{Ker}(\mathcal{Q}_I(A) \rightarrow \mathcal{Q}_{\pi(I)}(A/I)) = \\ &= \text{Ker}(\mathcal{Q}_I(A) \rightarrow \mathcal{Q}_I(A/I)_A), \quad \text{comme } \mathcal{Q}_I(A/I) \hookrightarrow \mathcal{Q}_{\pi(I)}(A/I), \\ &= \mathcal{Q}_I(I) = I\mathcal{Q}_I(A), \quad \text{puisque } 0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0 \quad \text{est exact.} \quad \square \end{aligned}$$

**5.4. Théorème.** Soit  $A$  un anneau géométrique et soit  $\mathcal{Y}$  un sous-schéma fermé de  $\underline{\text{Spec}}(A)$ . Si  $\mathcal{F}$  est le sous-faisceau de  $\underline{\mathcal{O}}_A$  définissant  $\mathcal{Y}$  et  $I = \Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{F})$ , on a  $\mathcal{Y} = \underline{\text{Spec}}(A/I)$ , c'-à-d. nous obtenons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} y \subset & \xrightarrow{i} & \text{Spec}(A) \\ & \searrow \sim & \nearrow \\ & & \text{Spec}(A/I) \end{array}$$

Notons d'abord qu'on peut supposer  $I=0$ , c'-à-d. l'application induite  $i^*: A \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$  est injective. En effet, de (4.6.) il découle que  $i$  factorise à travers  $\underline{\text{Spec}}(A/I)$ , comme  $i^*: A \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$  factorise par  $A/I$ . L'espace  $\text{Spec } A$  étant quasi-compact,  $Y$  l'est aussi, donc il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines  $\{\text{Spec}(S_i)\}$ . Nous devons démontrer en premier lieu que  $i$  est un homéomorphisme; comme  $i$  est fermé il suffit de vérifier la surjectivité, mais puisque  $i(Y)$  est un sous-ensemble fermé de  $\text{Spec}(A)$  nous trouvons que  $Y = V(K)$  pour un idéal  $K$  de  $A$ . Clairement  $i^*s = 0$  en tout point de  $Y$ , donc en particulier, on trouve des restrictions:

$$\text{res}_{Y, \text{Spec}(S_i)}(i^*s) = \sigma_i \in S_i$$

tels que pour tout  $P \in \text{Spec}(S_i)$  le morphisme composé

$$S_i \rightarrow S_i/P \rightarrow Q_{S_i-P}(S_i)/Q_{S_i-P}(P) = k(P)$$

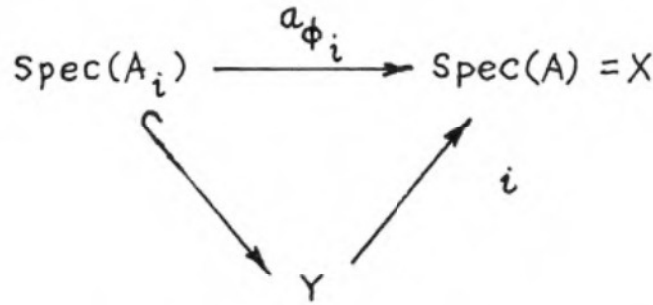
annule  $\sigma_i$ , c'-à-d.  $\sigma_i \in \text{rad}(0)$ . Ceci démontre que les  $\sigma_i$  sont fortement nilpotents. Montrons que  $i^*s$  est fortement nilpotent. Soit  $\{s_n\}$  une suite telle que  $s_0 = i^*s$  et  $s_{n+1} = s_n b_n s_n$  avec  $b_n \in \Gamma(Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$ ; pour chaque indice  $i$  nous obtenons une suite  $\{\text{res}_{Y, \text{Spec}(S_i)}(s_n)\} =: \{s_{n,i}\}$  avec  $s_{0,i} = \sigma_i$ ,  $s_{n,i} = s_{n+1,i} b_i s_{n+1,i}$ ;  $b_i \in S_i$ , donc pour chaque  $i$  il existe un entier positif  $k_i$  tel que  $s_{n,i} = 0$  pour tout  $n \geq k_i$ .  $k = \max\{k_i\}$ , on obtient pour tout  $n \geq k$  que  $s_{n,i} = 0$ . Comme  $\underline{\mathcal{O}}_Y$  est un faisceau et que  $\{\text{Spec}(S_i)\}_i$  recouvre  $Y$ , nous trouvons  $s_n = 0$ , d'où la régularité forte de  $i^*s$ . Finalement,  $s \in \text{rad } 0$  découle de l'injectivité de  $i^*: A \rightarrow \Gamma(Y, \underline{\mathcal{O}}_Y)$  et comme ceci signifie  $K \subset \text{rad } 0$  on obtient  $Y = V(K) = V(0) = \text{Spec}(A)$ . Nous avons donc prouvé que l'on peut supposer qu'on a un seul espace topologique muni de deux faisceaux d'anneaux  $\underline{\mathcal{O}}_X$  et  $\underline{\mathcal{O}}_Y$  et d'un homomorphisme surjectif. Démontrons en conclusion que cet homomorphisme est alors injectif. Prenons  $y \in Y$ ,  $j(y) = P \in \text{Spec } A$ . Nous voulons démontrer que l'application

$$\theta_y: \underline{\mathcal{O}}_{X,P} = Q_{A-P}(A) \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_{Y,y}$$

est injective. Supposons le contraire: il existe  $a \in A$  dans le noyau de  $\theta_y$ . Considérons



de nouveau un recouvrement ouvert, fini  $\{\text{Spec}(A_i) = X^{(i)}\}$  de  $Y$  et des extensions  $\varphi_i: A \rightarrow A_i$  telles que le diagramme suivant soit commutatif:



Nous savons que pour tout  $y \in Y$  les restrictions  $\varrho_y^Y j(a)$  s'annulent, donc il existe un ouvert  $X_I, I \subset P$  tel que pour tout  $y \in U = i^{-1}(X_I)$  nous ayons  $\varrho_y^Y j(a) = 0$ . Si nous dénotons par  $I^{(i)}$  l'idéal  $(\varphi_i(I))$  de  $A_i$ , cela donne  $U \cap X^{(i)} = X_{I^{(i)}}^{(i)}$  et  $\Gamma(X_{I^{(i)}}^{(i)}, \underline{\mathcal{O}}_Y) = \mathcal{Q}_{I^{(i)}}(A_i)$ . Pour chaque indice  $i$ ,  $j(a)$  s'annule dans  $\mathcal{Q}_{I^{(i)}}(A_i)$ . Choisissons pour tout  $i$  un  $\alpha_i \in A_i$  qui représente  $j(a)$  sur  $\text{Spec}(A_i)$ , on obtient des entiers positifs  $n_i$  tels que

$$[I^{(i)}]^{n_i} \alpha_i = 0$$

et comme le nombre d'  $X^{(i)}$  est fini, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i$

$$[I^{(i)}]^k \alpha_i = 0.$$

Mais alors, pour tout indice  $i$ , les restrictions  $\varrho_{A_i}^A(j(I^k a))$  de  $j(I^k a)$  à  $\text{Spec}(A_i)$  s'annulent, d'où:  $j(I^k a) = 0$ , et comme  $j$  est injectif on obtient  $I^k a = 0$ , c'-à-d.  $a \in \sigma_{A-P} A$ , ce qui démontre l'injectivité de  $\theta_y$ .  $\square$

**5.5. Corollaire.** Soit  $(\varphi, \theta): \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  un morphisme de schémas. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(5.5.1.)  $(\varphi, \theta)$  est une immersion fermée;

(5.5.2.) pour tout sous-ensemble ouvert affine  $U$  de  $X$  l'ensemble  $\varphi^{-1}(U)$  est affine et l'application  $\Gamma(U, \underline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U), \underline{\mathcal{O}}_Y)$  est surjective;

(5.5.3.) il existe un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}$  de  $X$  tel que pour tout indice  $\alpha$  l'ensemble  $\varphi^{-1}(U_\alpha)$  est affine et l'application  $\Gamma(U_\alpha, \underline{\mathcal{O}}_X) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U_\alpha), \underline{\mathcal{O}}_Y)$  est surjective.

**5.6. Corollaire.** Soient  $\mathcal{X}$  un schéma,  $\mathcal{I}$  un sous-faisceau d'idéaux de  $\underline{\mathcal{O}}_X$  et  $Y = \{y \in X, \underline{\mathcal{O}}_{X,x} \neq \mathcal{I}_x\}$ ; le conoyau **Coker**  $(\mathcal{I}^c \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_X)$  s'annule en dehors de  $Y$ , donc peut-être considéré comme un faisceau d'anneaux  $\underline{\mathcal{O}}_Y$  sur  $Y$ . Équivalentes:

(5.6.1.)  $\mathcal{Y}$  est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{X}$ ;

(5.6.2.)  $\mathcal{I}$  est quasi-cohérent.

Cela se démontre exactement comme dans le cas commutatif.

5.7. Un schéma  $(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  est *réduit* si pour tout  $U$  de  $X$ , l'anneau  $\Gamma(U, \underline{\mathcal{O}}_X)$  est semi-premier, c'-à-d.  $\text{rad}(\Gamma(U, \underline{\mathcal{O}}_X))=0$ . Cela équivaut à:  $\Gamma(U, \underline{\mathcal{O}}_X)$  est un produit sous-direct d'anneaux premiers ou: pour toute paire d'idéaux, leur produit est zéro si et seulement si leur intersection l'est. En particulier ceci implique que les fibres de  $\underline{\mathcal{O}}_X$  sont des anneaux semi-simples.

### 5.8. Proposition.

(5.8.1.) Soient  $\mathcal{X}=(X, \underline{\mathcal{O}}_X)$  un schéma et  $Z \subseteq X$  un sous-ensemble fermé; parmi les sous-schémas fermés  $\mathcal{X}_1=(Z, \underline{\mathcal{O}}_X/\underline{\mathcal{I}}_1)$  de  $\mathcal{X}$  il existe un unique sous-schéma réduit, disons  $\mathcal{X}_1=(Z, \underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{I}}_0)$ .

(5.8.2.) Si  $\mathcal{X}_1=(Z, \underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{I}}_1)$  est un autre sous-schéma de  $\mathcal{X}$ , alors  $\underline{\mathcal{I}}_1 \subseteq \underline{\mathcal{I}}_0$  et  $\underline{\mathcal{I}}_0 = \underline{\text{rad}}(\underline{\mathcal{I}}_1)$ , où  $\Gamma(U, \underline{\text{rad}}(\underline{\mathcal{I}}_1)) = \text{rad}(\Gamma(U, \underline{\mathcal{I}}_1))$  pour les ouverts affines  $U$  de  $X$ .

Encore une démonstration analogue au cas commutatif.  $\square$

5.9. On dénote par  $\mathcal{X}_{\text{red}}$  l'unique sous-schéma fermé réduit de  $\mathcal{X}$  avec le même espace topologique sous-jacent et on vérifie facilement qu'on définit ainsi un foncteur  $(\ )_{\text{red}}$  jouissant des propriétés bien connues. Ce foncteur nous permettra d'introduire des *variétés* en géométrie algébrique noncommutative, ce sera l'objet d'une note ultérieure.

### Références

- [1] M. ARTIN, On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, *J. Algebra*, **11**, (1969) 532—563.
- [2] J.-P. DELALE, Sur le Spectre d'un anneau non commutatif, *Sém. d'Alg. non comm.* **44**, *Publ. Math. d'Orsay* (1973).
- [3] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1971.
- [4] O. GOLDMAN, Rings and Modules of Quotients, *J. of Algebra* **13** (1969), 10—47.
- [5] D. C. MURDOCH, F. VAN OYSTAEYEN, Noncommutative Localization and Sheaves, *J. of Algebra* **35** (1975), 500—515.
- [6] C. PROCESI, Rings with Polynomial Identities, Marcel Dekker Inc., New York, 1973.
- [7] F. VAN OYSTAEYEN, Prime Spectra in Noncommutative Algebra, *Lecture Notes in Math.* **444**, Springer-Verlag, 1975.
- [8] F. VAN OYSTAEYEN, Zariski Central Rings, *Communications in Algebra*, à paraître
- [9] F. VAN OYSTAEYEN, A. VERSCHOREN, Localization of Presheaves of Modules, *Indag. Math.* **79** (4) (1976), 335—348.
- [10] F. VAN OYSTAEYEN, A. VERSCHOREN, Relative Localization and Bimodules, à paraître.

(Reçu le 13 mai 1978.)