Über verschiedene geodätische Abweichungen in Weyl—Otsukischen Räumen

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

Einleitung

In den differentialgeometrischen Räumen bestimmt die geodätische (autoparallele) Abweichung[1]) die fundamentalen Torsions- und Krümmungsgrößen bzw. auf Grund der Theorie der Differentialgleichungen kann entschieden werden, ob die aus einem Punkt O ausgehenden geodätischen Kurven eine Hüllkurve besitzen, oder nicht. Sind die geodätischen (autoparallelen) Kurven die Extremalen eines Variationsproblems, so kann mit Hilfe der skalaren Form der geodätischen Abweichung entschieden werden, ob der Raum endlich oder unendlich, genauer: die aus dem Punkt O ausgehenden Extremalen endlich sind — wie z. B. im Falle der Kugel —, oder ihre Länge keinen endlichen Wert hat.

Die erste Arbeit in diesem Gegenstandskreis stammte wohl von LEVI CIVITA [1], der dieses Problem in den Riemannschen Räumen untersuchte. In den Finslerräumen bzw. in den allgemeinen Linienelementräumen wurde die geodätische (autoparallele) Abweichung von H. RUND (vgl. [6] und [7] Kap. IV. § 4.) bestimmt bzw. in unserer Arbeit [2] studiert.

Im folgenden wollen wir die geodätische Abweichung in einem WEYL—OTSUKISCHEN Raum bestimmen (vgl. [3] und [4]). Dieser Raum ist ein Raum, in dem die Übertragung eine solche Form hat, wie es von T. OTSUKI bestimmt wurde [5], aber die Übertragungsparameter sind von einem metrischen Grundtensor $g_{ik}(x)$ abgeleitet, ferner für $g_{ik}(x)$ ist die Otsukische kovariante Ableitung rekurrent.

Im § 1. werden wir die Fundamentalgrößen der Weyl—Otsukischen Räume nach den Resultaten von [3] und [5] zusammenstellen. Nach der Definition der geodätischen Linien, von denen in den Weyl—Otsukischen Räumen — wie wir es sehen werden — zwei Type möglich sind, werden wir in §§ 2. und 3. die geodätischen Abweichungen, die zu den verschiedenen Typen von geodätischen Kurven gehören, bestimmen. Es wird sich zeigen, daß die Torsions- und Krümmungstensoren mit den analogen Größen von [4] und [5] eng zusammenhängen. Im § 4. untersuchen wir einige explizite Beispiele, und im § 5. bestimmen wir endlich die

[1]) Geodätische und autoparallele Kurven sind im allgemeinen voneinander verschieden. Die von T. OTSUKI in [5] durch (4.7) gekennzeichneten Kurven sind im wesentlichen autoparallele Kurven, wir wollen aber Otsuki's Benennung: „geodätische Kurven" behalten.

skalare Form der geodätischen Abweichung. Wir werden ferner in diesem Paragraphen eine geometrische Anwendung der Theorie geben, indem wir eine analytische Bedingung für die Existenz der Hüllkurve der aus einem Punkt O ausgehenden geodätischen Kurven bestimmen.

§ 1. Fundamentalgrößen der Weyl—Otsukischen Räume

In seiner Arbeit [5] entwickelte T. Otsuki eine Übertragungstheorie, deren lokalen Teil wir zu Grunde legen wollen. Dementsprechend werden die kovarianten Ableitungen von kontra- bzw. kovarianten Vektoren mit verschiedenen Übertragungsparametern $'\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ bzw. $''\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ gebildet. Diese Übertragungsparameter hängen miteinander durch die Formel (vgl. [5], (3.13)):

$$\partial_k P_j^i + {}''\Gamma_t{}^i{}_k P_j^t - P_t^i\, {}'\Gamma_j{}^t{}_k = 0 \tag{1.1}$$

zusammen, wo der gemischte Tensor P_j^i einen Grundtensor des Otsukischen Raumes bedeutet; ferner nehmen wir noch an, daß P_j^i einen eindeutig bestimmten inversen Tensor Q_j^i hat (vgl. [5], P. 109).

Für einen beliebigen Tensor sind die fundamentalen kovarianten Ableitungen durch (vgl. [5], (3.7) und (3.8)):

$$V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q|k} := \partial_k V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + \sum_{t=1}^{p} {}'\Gamma_r{}^{i_t}{}_k V^{i_1\cdots i_{t-1} r i_{t+1}\cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots\cdots\cdots j_q} - \sum_{t=1}^{q} V^{i_1 i_2 \cdots\cdots\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{t-1} s j_{t+1}\cdots j_q}\, {}''\Gamma_{j_t}{}^s{}_k, \tag{1.2}$$

$$\nabla_k V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} := P^{i_1}_{t_1}\cdots P^{i_p}_{t_p} V^{t_1\cdots t_p}_{r_1\cdots r_q|k} P^{r_1}_{j_1}\cdots P^{r_q}_{j_q} \tag{1.3}$$

festgelegt[2]). Nach der Otsukischen Bezeichnungsweise werden wir die Bezeichnung $'\nabla_k$ bzw. $''\nabla_k$ benützen, fall seine kovariante Ableitung allein mit den Übertragungsparametern $'\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. $''\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildet werden soll. Für einen rein kovarianten Tensor ist z. B. nach (1.2)

$$V_{j_1\ldots j_q|k} = {}''\nabla_k V_{j_1\ldots j_q}.$$

Die zu (1.2) bzw. (1.3) gehörigen invarianten Differentiale sind die folgenden:

$$\overline{D} V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} := V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q|k}\, dx^k, \tag{1.4}$$

$$D V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} := \nabla_k V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\, dx^k. \tag{1.5}$$

Offenbar kann statt (1.5) auch die mit (1.5) äquivalente Formel

$$D V^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} := P^{i_1}_{t_1}\cdots P^{i_p}_{t_p} \overline{D} V^{t_1\cdots t_p}_{r_1\cdots r_q} P^{r_1}_{j_1}\cdots P^{r_q}_{j_q} \tag{1.6}$$

verwendet werden, wie das nach (1.3)—(1.5) unmittelbar verifiziert werden kann (vgl. [5], (4.9)). Wir benützen noch durchwegs die Bezeichnung $'\overline{D}$ bzw. $''\overline{D}$, die im folgenden das gewöhnliche mit $'\Gamma$ bzw. $''\Gamma$ gebildete affine invariante Differential bedeuten wird.

---

[2]) In [5] ist statt ∇_k die Bezeichnung: „$_{,k}$" verwendet. Wir benützen die Bezeichnung von [3].

In einer Otsukischen Raum sind somit die Grundgrößen die Übertragungsparameter $'\Gamma$ und $''\Gamma$, ferner der gemischte Tensor P^i_j, die aber miteinander durch die Formel (1.1) verbunden sind. Ist z. B. P^i_j und $''\Gamma_j{}^i{}_k$ angegeben, so ist $'\Gamma_j{}^i{}_k$ durch (1.1) eindeutig festgelegt. In einem Weyl—Otsukischen Raum, d. h. in einem Otsukischen Raum mit rekurrentem Maßtensor, den wir in [3] begründet hatten, ist $''\Gamma_j{}^i{}_k$ von einem symmetrischen metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ abgeleitet, der eine rekurrente kovariante Ableitung hat, d. h. es besteht:

$$\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}, \tag{1.7}$$

wo γ_k einen kovarianten Vektor bedeutet. Aus (1.7) erhält man (vgl. [3] (2.1a), (2.2a) und (2.3))

$$''\Gamma_r{}^t{}_k = \frac{1}{2} g^{ts}(\partial_k g_{rs} + \partial_r g_{sk} - \partial_s g_{rk} - (\gamma_k m_{rs} + \gamma_r m_{sk} - \gamma_s m_{rk})), \tag{1.8}$$

$$m_{rs} := g_{ij} Q^i_r Q^j_s. \tag{1.8a}$$

Die Formel (1.8) zeigt, daß $''\Gamma_j{}^i{}_k$ in einem W—O_n-Raum, was jetzt und im folgenden die kurze Bezeichnung des n-dimensionalen Weyl—Otsukischen Raumes sein soll, in den unteren Indizes symmetrisch ist. $'\Gamma_j{}^i{}_k$ kann dann aus (1.1) bestimmt werden, da P^i_j einen inversen Tensor hat. Wir benötigen noch im folgenden die Formel der kovarianten Ableitung des Kronecker-δ, was nach (1.2):

$$\delta^i_{j|k} = {'\Gamma_j{}^i{}_k} - {''\Gamma_j{}^i{}_k} \tag{1.9}$$

ist ([5], Formel (3.10)).

§ 2. Geodätische Abweichung vom kontravarianten Typ

Nehmen wir an, daß im folgenden im W—O_n-Raum für eine Kurve C: $x^i(t)$ der Parameter s immer die Bogenlänge bedeuten wird, d. h.

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ik}(x)\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt, \quad \dot{x}^i := \frac{dx^i}{dt}.$$

Als *geodätische (autoparallele) Kurve vom kontravarianten Typ* bezeichnen wir die durch

$$\frac{D}{ds}\frac{dx^b}{ds} = 0 \tag{2.1}$$

charakterisierten Kurven, die nicht unbedingt mit den geodätischen Linien von T. Otsuki (vgl. [5], (4.7)) übereinstimmen, da „s" nicht affiner Parameter sein muß, wie das in den Riemannschen Räumen der Fall ist. Auf Grund der Formeln (1.6), (1.4) und (1.2) bekommt man aus (2.1)

$$P^b_h\left(\frac{d^2x^h}{ds^2} + {'\Gamma_j{}^h{}_k}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right) = 0,$$

was nach einer Kontraktion mit dem inversen Tensor Q^i_b von P^b_h die Form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+'\Gamma_j{}^i{}_k(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{2.2}$$

haben wird.

Betrachten wir nun eine Schar der geodätischen Linien vom kontravarianten Typ, die durch einen Anfangspunkt O hindurchgehen. Die vom Punkt O gerechnete Bogenlänge sei der Parameter jeder Kurve der Kurvenschar. Die charakteristische Differentialgleichung der Kurve C sei eben (2.2), die einer Nachbarkurve C^* sei

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}+'\Gamma_j{}^i{}_k(\psi)\frac{d\psi^j}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma}=0, \tag{2.3}$$

wo der Parameter σ die von O gerechnete Bogenlänge von C^*, ferner

$$\psi^i(\sigma)=x^i(s)+\xi^i(s) \tag{2.4}$$

besteht. Ist $\xi^i(s)$ ein infinitesimaler Vektor, so ist C^* auf Grund von (2.3) und (2.4) eine nachbargeodätische Linie von C.

Zwischen den Parametern s und σ soll die Relation

$$\frac{d\sigma}{ds}=1+\lambda(s) \tag{2.5}$$

gelten wo $\lambda(s)$, und im folgenden auch $d\lambda/ds$, ferner ξ^i und $d\xi^i/ds$ infinitesimal und von derselben Größenordnung sein sollen. Wegen des Faktors $dx^j\,dx^k$ kommt in (2.2) und (2.3) offenbar nur der symmetrische Teil von $'\Gamma_j{}^i{}_k$, d. h.:

$$'\Gamma_{(j}{}^i{}_{k)}:=\frac{1}{2}('\Gamma_j{}^i{}_k+'\Gamma_k{}^i{}_j)$$

vor[3]).

Wegen (2.5) gilt:

$$\frac{d}{d\sigma}=\frac{ds}{d\sigma}\frac{d}{ds}=(1-\lambda(s))\frac{d}{ds}, \tag{2.6}$$

und somit wird nach (2.4)

$$\frac{d\psi^i}{d\sigma}=(1-\lambda(s))\frac{dx^i}{ds}+\frac{d\xi^i}{ds}, \tag{2.7}$$

wo jetzt und im folgenden die infinitesimalen Glieder, die in $\lambda, \xi^i, \ldots$ eine höhere Ordnung besitzen, vernachlässigt werden. Es folgt ferner aus (2.6) und (2.7):

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}=(1-2\lambda)\frac{d^2x^i}{ds^2}-\frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds}+\frac{d^2\xi^i}{ds^2}. \tag{2.8}$$

---

[3]) Für die Bezeichnung der symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil der Größen werden wir die Schoutensche Symbolik benützen.

Auf Grund der Definition (1.4) des invarianten Differentials wird

$$\frac{d\xi^i}{ds} = \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} - {}'\Gamma_t{}^i{}_k \xi^t \frac{dx^k}{ds}, \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2\xi^i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\frac{\bar{D}\xi^i}{ds} - \left(\partial_m {}'\Gamma_t{}^i{}_k \frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds} + {}'\Gamma_t{}^i{}_k \frac{d^2x^k}{ds^2}\right)\xi^t - \tag{2.10}$$
$$- {}'\Gamma_j{}^i{}_k \left(\frac{\bar{D}\xi^j}{ds} - {}'\Gamma_t{}^j{}_m \xi^t \frac{dx^m}{ds}\right)\frac{dx^k}{ds}.$$

Für die Berechnung von (2.3) benötigen wir noch die Formel:

$${}'\Gamma_j{}^i{}_k(\psi) \equiv {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x+\xi) = {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x) + \partial_m {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x)\xi^m. \tag{2.11}$$

Substituiert man nun die Formeln (2.7)—(2.11) in die Gleichung (2.3), beachtet man noch für d^2x^i/ds^2 die Formel (2.2) und die Identität

$${}'\Gamma_{(j}{}^i{}_{k)} \equiv {}'\Gamma_j{}^i{}_k - {}'T_j{}^i{}_k, \tag{2.12}$$

$${}'T_{[j}{}^i{}_{k]} := {}'\Gamma_{[j}{}^i{}_{k]} \equiv \frac{1}{2}({}'\Gamma_j{}^i{}_k - {}'\Gamma_k{}^i{}_j), \tag{2.13}$$

die im wesentlichen den symmetrischen Teil von $'\Gamma$ aus (2.3) eliminiert, so bekommt man:

$$\frac{\bar{D}^2\xi^i}{ds^2} + 2\,{}'T_j{}^i{}_k \frac{dx^j}{ds}\frac{\bar{D}\xi^k}{ds} + ({}'R_j{}^i{}_{km} + 2\,{}'\nabla_j {}'T_k{}^i{}_m)\xi^m \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds} = 0, \tag{2.14}$$

was schon die Gleichung der geodätischen Abweichung ist. Wir wollen aber aus dieser Formel das invariante Differential „$\bar{D}$" mit Hilfe von „D" ausdrücken[4]).

Nach (1.6) ist:

$$\bar{D}\xi^i = Q^i_r D\xi^r, \tag{2.15}$$

$$\bar{D}^2\xi^i = \bar{D}(Q^i_r D\xi^r) = ({}'\bar{D}Q^i_r)D\xi^r + Q^i_r \bar{D}D\xi^r \equiv \tag{2.16}$$
$$\equiv Q^i_r Q^r_t D^2\xi^t + Q^i_t Q^m_r (DQ^t_m - Q^t_j D\delta^j_m)D\xi^r,$$

wo wir für $'\bar{D}Q^i_r$ die folgende Rechnung benützt haben:

$${}'\bar{D}Q^i_r = dQ^i_r + ({}'\Gamma_t{}^i{}_k Q^t_r - {}'\Gamma_r{}^t{}_k Q^i_t)\,dx^k,$$

und dann beachteten wir die nach (1.9) folgende Relation

$$\bar{D}\delta^t_r = {}'\Gamma_r{}^t{}_k dx^k - {}''\Gamma_r{}^t{}_k dx^k; \tag{2.17}$$

somit haben wir die folgende Formel bekommen:

$${}'\bar{D}Q^i_r = \bar{D}Q^i_r - (\bar{D}\delta^t_r)Q^i_t = Q^i_t Q^m_r (DQ^t_m - Q^t_j D\delta^j_m), \tag{2.18}$$

was wir in (2.16) verwendet haben.

[4]) Wo es kein Mißverständnis vorkommen kann, schreiben wir nur $\bar{D}$ bzw. D statt $\bar{D}/ds$ bzw. D/ds.

Mit Hilfe von (2.15) und (2.16) kann man nun in (2.14) die Operation $\bar{D}/ds$ durch D/ds ersetzen. Wenn man mit Hilfe des Tensors P^a_b, der der inverse Tensor von Q^b_c ist, den Koeffizient von $D^2\xi^i$ auf Eins normiert, d. h. (2.15) und (2.16) in (2.14) substituiert und dann mit $P^a_i P^b_a$ multipliziert, so wird nach gewissen Veränderungen der Indizes:

$$(2.19)\qquad \frac{D^2\xi^i}{ds^2}+P^i_a Q^m_r\left(\frac{DQ^a_m}{ds}-Q^a_j\frac{D\delta^j_m}{ds}+2P^a_b{}'T_j{}^b{}_m\frac{dx^j}{ds}\right)\frac{D\xi^r}{ds}+$$

$$+P^i_a P^a_b('R_j{}^b{}_{km}+2'\nabla_j{}'T_k{}^b{}_m)\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-P^i_a P^a_b\frac{dx^b}{ds}\frac{d\lambda}{ds}=0.$$

Es gilt somit der

Satz 1. *Die geodätische (autoparallele) Abweichung vom kontravarianten Typ im W—O_n-Raum ist durch* (2.19) *bestimmt.*

In der Formel der geodätischen Abweichung hängt das in $D\xi^i$ lineare Glied von der Torsion ab, und das in ξ^i lineare Glied von der Krümmung des Raumes ab (vgl. z. B. [2], Formel (3.7)). In dem W—O_n-Raum kommt $'T_a{}^b{}_c$ z. B. in [4], (1.1) und (1.2) und in [5], (7.12) und (7.13) vor (abgesehen von dem unwesentlichen Faktor 1/2). Der Tensor $P^i_a P^a_b{}'R_j{}^b{}_{km}$ als Krümmungstensor kommt in [4], (1.3) und (1.4) vor, wärend der Krümmungstensor $'R_j{}^b{}_{km}$ in [5], (7.10) und (7.11) eingeführt wurde.

In diesem Paragraphen wollen wir noch $\lambda(s)$ berechnen. Nach (2.5) wird:

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=(1+\lambda(s))^2=g_{ik}(x+\xi)\left(\frac{dx^i}{ds}+\frac{d\xi^i}{ds}\right)\left(\frac{dx^k}{ds}+\frac{d\xi^k}{ds}\right).$$

Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in λ, ξ^i, $d\xi^i$, und unter Beachtung der Identität

$$g_{ik}(x)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=1$$

wird:

$$(2.20)\qquad \lambda(s)=g_{ik}\frac{dx^{(i}}{ds}\frac{d\xi^{k)}}{ds}+\frac{1}{2}\partial_m g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\xi^m.$$

Aus (1.7) erhält man nach (1.3) und (1.8a)

$$(2.21)\qquad \partial_m g_{ik}={}''\Gamma_{ikm}+{}''\Gamma_{kim}+\gamma_m m_{ik},$$

und wenn man noch (2.9) und die Symmetrie von $''\Gamma_{mik}$ in (m, k) beachtet, wird aus (2.20) nach (2.17):

$$(2.22)\qquad \lambda(s)=g_{ik}\frac{dx^i}{ds}Q^k_r\frac{D\xi^r}{ds}-g_{kr}\frac{\bar{D}\delta^r_m}{ds}\frac{dx^k}{ds}\xi^m+\frac{1}{2}m_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\gamma_j\xi^j.$$

§ 3. Geodätische Abweichung vom kovarianten Typ

Die der Gleichung

$$\frac{D}{ds}\left(g_{ij}(x)\frac{dx^j}{ds}\right)=0, \quad (x^i=x^i(s)) \tag{3.1}$$

genügenden Kurven bezeichnen wir als *geodätische (autoparallele) Kurven vom kovarianten Typ*. In einem Riemannschen Raum, wo $Dg_{ij}=0$ besteht, sind die der Gleichung (3.1) genügenden Kurven offenbar mit den der Gleichung (2.1) genügenden Kurven identisch. In einer W—O_n-Raum ist aber das im allgemeinen nicht der Fall. Beachten wir (1.6), so folgt aus (3.1), da P^i_j einen inversen Tensor hat:

$$\frac{\bar{D}}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{ds}\right)\equiv\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{ds}\right)-{}''\Gamma^{\,t}_{i\,m}g_{tk}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}=0.$$

(Das invariante Differential D kann offenbar immer mit $\bar{D}$ ausgedrückt werden). Beachten wir jetzt (2.21), so wird die Gleichung der geodätischen Kurven vom kovarianten Typ nach Heraufziehen des Indexes „i“:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0, \tag{3.2}$$

mit

$$\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k:=g^{ir}({}''\Gamma_{jrk}+m_{r(j}\gamma_{k)}). \tag{3.2a}$$

(3.2) *und* (3.2a) *bestimmen die geodätischen Linien vom kovarianten Typ*. Da $\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k$ im wesentlichen in (j,k) symmetrische Übertragungsparameter darstellt, ist die geodätische Abweichung der durch (3.2) gekennzeichneten Kurven:

$$\frac{\tilde{D}^2\xi^i}{ds^2}+\tilde{R}_j{}^i{}_{km}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\xi^m-\frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds}=0, \tag{3.3}$$

wo $\tilde{D}$ das mit $\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k$ gebildete gewöhnliche affine invariante Differential und $\tilde{R}_j{}^i{}_{km}$ den entsprechenden Krümmungstensor bedeuten.

Wir wollen aber die geodätische Abweichung mit den Größen des W—O_n-Raumes ausdrücken, genauer: mit dem invarianten Differential „D“ bestimmen. Statt der Umrechnung von (3.3) ist es leichter eine unmittelbare Herleitung anzugeben. Vor allem werden wir (3.2) etwas umformen. Auf Grund von (1.9) kann (3.2a) in der Form:

$$\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k={}'\Gamma_j{}^i{}_k+\gamma_j{}^i{}_k \tag{3.4}$$

$$\gamma_j{}^i{}_k:=-\delta^i_{j|k}+g^{ir}m_{r(j}\gamma_{k)} \tag{3.4a}$$

geschrieben werden; somit wird die Gleichung (3.2) der geodätischen Abweichung die Form

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+({}'\Gamma_j{}^i{}_k(x)+\gamma_j{}^i{}_k(x))\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{3.5}$$

haben. Für die späteren Rechnungen ist wichtig die folgende *Behauptung:* $({}'\Gamma_j{}^i{}_k + \gamma_j{}^i{}_k)$ *ist in* (j, k) *symmetrisch.* Diese Behauptung folgt unmittelbar aus (3.4) im Hinblick auf (3.2a) unter Beachtung von (1.8), was die Symmetrie von ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ in (j, k) zeigt.

Bemerkung. ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ ist in den W—O_n-Räumen immer symmetrisch.

Betrachten wir nun wieder eine Nachbargeodätische, die vom Punkt O (mit $s=0$) von (3.5) ausgeht und durch die Gleichung

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2} + \big({}'\Gamma_j{}^i{}_k(\psi) + \gamma_j{}^i{}_k(\psi)\big)\frac{d\psi^j}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma} = 0 \tag{3.6}$$

charakterisiert ist. Es sollen bezüglich σ und ψ^i die Gleichungen (2.4)—(2.7) bestehen.

Bei der Bestimmung der geodätischen Abweichung können wir nun ebenso verfahren, wie im vorigen Fall. Aus (3.6) folgt nach (2.7) und (2.8), wo aber jetzt d^2x^i aus (3.5) berechnet werden soll:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi^i}{ds^2} - \frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + ({}'\Gamma_j{}^i{}_k + \gamma_j{}^i{}_k)\left(\frac{dx^j}{ds}\frac{d\xi^k}{ds} + \frac{dx^k}{ds}\frac{d\xi^j}{ds}\right) + \\ + (\partial_m{}'\Gamma_j{}^i{}_k + \partial_m\gamma_j{}^i{}_k)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\xi^m = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Für $d\xi^i$ bzw. $d^2\xi^i$ verwenden wir nun die Formel (2.9) bzw. (2.10), wo aber d^2x^i/ds^2 wieder aus (3.5) ausgedrückt werden soll. Man erhält somit nach einer längeren, aber elementaren Rechnung:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{D}^2\xi^i}{ds^2} + 2({}'T_j{}^i{}_k + \gamma_{(j}{}^i{}_{k)})\frac{dx^j}{ds}\frac{\overline{D}\xi^k}{ds} + ({}'R_j{}^i{}_{km} - 2{}'\nabla_k{}'T_m{}^i{}_j + {}'\nabla_m\gamma_j{}^i{}_k + 2{}'T_m{}^i{}_t\gamma_j{}^t{}_k - \\ - 2{}'T_m{}^t{}_k\gamma_j{}^i{}_t - 2{}'T_m{}^t{}_j\gamma_t{}^i{}_k)\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds} = 0,\end{aligned} \tag{3.8}$$

wo noch auch die Definitionsgleichung (2.13) öfters benützt wurde. Es ist aber nach (1.9) und (2.13)

$${}'T_j{}^i{}_k \equiv \delta^i_{[j|k]} = -\delta^i_{[k|j]}, \tag{3.9}$$

womit nach (3.4a) der Koeffizient von $\overline{D}\xi^k$ in (3.8) vereinfacht werden kann. Beachten wir jetzt (2.15) und (2.16), so geht (3.8) nach einer Kontraktion mit $P^a_i P^b_a$ und nach gewissen Veränderungen der Indizes in:

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi^i}{ds^2} + P^i_t Q^k_r\left\{\frac{DQ^t_k}{ds} - Q^t_j\frac{D\delta^j_k}{ds} + 2P^t_b\gamma_k{}^b{}_j\frac{dx^j}{ds}\right\}\frac{D\xi^r}{ds} + \\ + P^i_a P^a_b\{{}'R_j{}^b{}_{km} + 2({}'\nabla_k{}'T_j{}^b{}_m + \gamma_j{}^t{}_k{}'T_m{}^b{}_t - \gamma_j{}^b{}_t{}'T_m{}^t{}_k - \gamma_t{}^b{}_k{}'T_m{}^t{}_j) + {}'\nabla_m\gamma_j{}^b{}_k\}\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \\ - P^i_a P^a_b\frac{dx^b}{ds}\frac{d\lambda}{ds} = 0\end{aligned} \tag{3.10}$$

über. Es gilt somit der

Satz 2. *Die geodätische (autoparallele) Abweichung vom kovarianten Typ im $W-O_n$-Raum ist durch* (3.3) *oder* (3.10) *bestimmt.*

Vergleichen wir (3.10) mit (2.19), so sieht man sofort, daß im kovarianten Fall die der Torsion $'T_j{}^b{}_m$ entsprechende Größe der durch (3.4a) bestimmte Tensor ist. Dieser Tensor hängt auch in expliziter Weise vom Rekurrenzvektor γ_m ab. — Auch die Krümmung, d. h. der Koeffizient von ξ^m veränderte sich mit dem Tensor $\gamma_j{}^b{}_k$ bzw. mit $'\nabla_m \gamma_j{}^b{}_k$.

§ 4. Untersuchung von Spezialfällen

1) Nehmen wir erstens an, daß

$$P^i_k = \varrho \delta^i_k \quad (\varrho = Konst.) \tag{4.1}$$

In diesem Fall ist nach (1.1) $'\Gamma_j{}^i{}_k \equiv {}''\Gamma_j{}^i{}_k$, und nach (1.9) besteht somit $\delta^i_{j|k}=0$; nach (3.9) ist $'T_j{}^i{}_k=0$, und der inverse Tensor von P^i_j wird: $Q^i_j=\varrho^{-1}\delta^i_j$. Aus (2.19) bekommt man in diesem Fall für die Gleichung der geodätischen Abweichung vom kontravarianten Typ

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2}+\varrho^2\,'R_j{}^i{}_{km}\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-\varrho^2\frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds}=0. \tag{4.2}$$

Benützen wir statt D/ds die Operation $\bar{D}/ds$, so würde nach (2.14) der Faktor ϱ ausfallen.

Die geodätische Abweichung vom kovarianten Typ bekommt man aus (3.10), wenn man $\gamma_j{}^t{}_k$ berechnet. Nach (3.4a) und (1.8a) wird

$$\gamma_j{}^i{}_k = g^{ir}Q^a_r Q^b_{(j}\gamma_{k)}g_{ab} = \varrho^{-2}\delta^i_{(j}\gamma_{k)}. \tag{4.3}$$

Aus (3.10) wird in diesem Fall

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2}+2\varrho^{-1}\delta^i_{(j}\gamma_{k)}\frac{dx^j}{ds}\frac{D\xi^k}{ds}+ \tag{4.4}$$

$$+(\varrho^2\,'R_j{}^i{}_{km}+{}'\nabla_m\gamma_{(k}\delta^i_{j)})\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-\varrho^2\frac{dx^i}{ds}\frac{d\lambda}{ds}=0.$$

Die Formeln (4.2) und (4.4) zeigen, daß *die beiden geodätischen Abweichungen auch in gewöhnlichen Weylschen Räume, d. h. im Fall $\varrho=1$ voneinander verschieden sind.*

Wir haben schon darauf hingewiesen, daß der Koeffizient von $D\xi^k$ als Torsion des Raumes betrachtet werden kann. Nach (4.3) und (4.4) folgt, daß jetzt im wesentlichen $\gamma_j{}^i{}_k$ als Torsionstensor betrachtet werden soll.

2) Nehmen wir jetzt an, daß

$$\gamma_j{}^i{}_k = 0 \tag{4.5}$$

ist. Bilden wir den schiefsymmetrischen Teil von $\gamma_j{}^i{}_k$, so folgt nach (3.4a) und (3.9), daß $'T_j{}^i{}_k=0$ gilt, folglich ist auch $'\Gamma_j{}^i{}_k$ in (j, k) symmetrisch; ferner es folgt noch nach (3.4), daß auch $\tilde{\Gamma}_j{}^i{}_k={}'\Gamma_j{}^i{}_k$ besteht. Somit gilt der

Satz 3. *In dem durch* (4.5) *charakterisierten Fall ist die affine Übertragung* $\tilde{\Gamma}$ *mit* $'\Gamma$ *identisch, und es stimmt ferner die durch* (3.3) *angegebene Gleichung der geodätischen Abweichung mit der durch* (3.8) *bestimmten überein.*

Stellen wir noch neben die Bedingung (4.5) auch die Annahme, daß g_{ij} ein Eigentensor des Raumes ist; es gilt also neben (4.5) auch

$$P_i^r P_j^t g_{rt} = \tau g_{ij}, \quad \tau = \tau(x) \neq 0, \tag{4.6}$$

oder nach einer Kontraktion mit $Q_a^i Q_b^j$ wird im Hinblick auf (1.8a):

$$m_{ab} = \tau^{-1} g_{ab}. \tag{4.6a}$$

Aus (3.4a) erhält man somit wegen der Annahme (4.5):

$$\tau^{-1}\delta^i_{(j}\gamma_{k)} = \delta^i_{j|k}. \tag{4.7}$$

Eine Verjüngung über i, j gibt nach $\delta^i_i=n$ und $\delta^i_{i|k}=0$

$$(n+1)\gamma_k = \tau\delta^i_{i|k} = 0,$$

woraus nach (4.7) wegen $\tau\neq 0$ die Relation $\delta^i_{j|k}=0$ folgt. Nach (1.9) folgt somit $'\Gamma={}''\Gamma$. Es gilt also der

Satz 4. *Aus* (4.5) *und* (4.6) *folgt* $'\Gamma={}''\Gamma$ *und* $\gamma_k=0$.

Bemerkung. Aus $'\Gamma={}''\Gamma$ und $\gamma_k=0$ folgt zwar nach (3.4a), daß $\gamma_j{}^i{}_k=0$ und nach (1.9) daß $\delta^i_{j|k}=0$ ist. Doch es muß die Bedingung (4.6) nicht bestehen.

§ 5. Skalare Form der geodätischen Abweichung

Die Form der geodätischen Abweichung war beim kontra- bzw. kovarianten Typ nach den Formeln (2.19) bzw. (3.10) bestimmt; beide hatten die Form:

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2}+2T^{*}_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{ds}\frac{D\xi^k}{ds}+R^{*}_j{}^i{}_{km}\xi^m\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}-P^i_t P^t_j\frac{dx^j}{ds}\frac{d\lambda}{ds}=0, \tag{5.1}$$

wo jetzt die Tensoren $T^{*}_j{}^i{}_k$ und $R^{*}_j{}^i{}_{km}$ die entsprechenden Koeffizienten von $D\xi^k$ und ξ^m bedeuten. Wir bemerken hier, daß für die folgenden auch die Formel (2.14) bzw. (3.8) verwendet werden könnte, wo statt der Operation D/ds die Operation $\bar{D}/ds$ vorhanden ist. —

Offenbar kann der Vektor ξ^i in der Form:

$$\xi^i = \xi X^i, \quad g_{ik}X^i X^k = 1 \tag{5.2}$$

bestimmt werden[5]), wo dann der Skalar ξ die Länge des Vektors ξ^i bedeutet. Aus

[5]) Die Bestimmung von ξ^i in dieser Form und die Umrechnung der Gleichung der geodätischen Abweichung kommt erstemal in [6] vor.

(5.2) folgt:

$$\frac{D\xi^i}{ds} = P^i_t \frac{\overline{D}}{ds}(\xi X^t) = \frac{d\xi}{ds} P^i_t X^t + \xi \frac{DX^i}{ds} \tag{5.3}$$

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = P^i_r \frac{{}'\overline{D}}{ds}\left(\frac{d\xi}{ds} P^r_t X^t + \xi \frac{DX^r}{ds}\right) =$$

$$= \frac{d^2\xi}{ds^2} P^i_r P^r_t X^t + \frac{d\xi}{ds} P^i_r \left\{\frac{{}'\overline{D}P^r_t}{ds} X^t + 2\frac{DX^r}{ds}\right\} + \xi \frac{D^2X^i}{ds^2}.$$

Beachten wir (1.9) und die Formeln (1.4) und (1.6) der invarianten Differentiale, so wird

$$P^i_r{}'\overline{D}P^r_t = Q^h_t DP^i_h - P^i_r Q^h_t D\delta^r_h,$$

womit bekommen wir:

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2} = P^i_r P^r_t X^t \frac{d^2\xi}{ds^2} + \left(Q^h_t X^t \frac{DP^i_h}{ds} - P^i_r Q^h_t X^t \frac{D\delta^r_h}{ds} + 2P^i_r \frac{DX^r}{ds}\right)\frac{d\xi}{ds} + \xi \frac{D^2X^i}{ds^2}. \tag{5.4}$$

Substituieren wir nun $D\xi^i$ und $D^2\xi^i$ von (5.3) und (5.4) in (5.1), so bekommen wir für die Gleichung der geodätischen Abweichung:

$$P^i_r P^r_t X^t \frac{d^2\xi}{ds^2} + \left\{\left(Q^h_t \frac{DP^i_h}{ds} - P^i_r Q^h_t \frac{D\delta^r_h}{ds} + 2T^{*i}_{j\;k} P^k_t \frac{dx^j}{ds}\right) X^t + 2P^i_r \frac{DX^r}{ds}\right\}\frac{d\xi}{ds} +$$

$$+ \left\{R^{*i}_{j\;km} X^m \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \frac{D^2X^i}{ds^2} + 2T^{*i}_{j\;k}\frac{dx^j}{ds}\frac{DX^k}{ds}\right\}\xi - P^i_t P^t_j \frac{dx^j}{ds}\frac{d\lambda}{ds} = 0.$$

Man kann leicht das $d^2\xi$ enthaltende Glied auf Eins normieren. Nach einer Überschiebung mit $Q^b_i Q^c_b g_{ce} X^e$ wird im Hinblick auf die zweite Formel von (5.2)

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \left\{\left(Q^c_b \frac{\overline{D}P^b_t}{ds} - \frac{\overline{D}\delta^c_t}{ds} + 2T^{*i}_{j\;k} Q^b_i Q^c_b P^k_t \frac{dx^j}{ds}\right) X^t + Q^c_b \frac{DX^b}{ds}\right\} g_{ce} X^e \frac{d\xi}{ds} + \tag{5.5}$$

$$+ Q^b_i Q^c_b g_{ce} X^e \left\{R^{*i}_{j\;km} X^m \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \frac{D^2X^i}{ds^2} + 2T^{*i}_{j\;k}\frac{dx^j}{ds}\frac{DX^k}{ds}\right\}\xi - g_{je}\frac{dx^j}{ds} X^e \frac{d\lambda}{ds} = 0.$$

Die Gleichung (5.5) *ist die skalare Form der Gleichung* (5.1). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann sogar in (5.5)

$$g_{je}\frac{dx^j}{ds} X^e = 0 \tag{5.6}$$

genommen werden, da die Bedingung (5.6) drückt nur soviel aus, daß die Punkte der nachbargeodätischen Linien C und C^* in solcher Weise zueinander geordnet sind, daß der Tangentenvektor dx^i/ds von C auf den Vektor X^i bzw. ξ^i senkrecht steht.

Nehmen wir also an, daß (5.6) besteht; somit geht (5.5) in die folgende Form über:

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}+2b(s)\frac{d\xi}{ds}+c(s)\xi=0, \tag{5.7}$$

wo $2b(s)$ bzw. $c(s)$ der längs der geodätischen Linie C: $x^i=x^i(s)$ definierte Koeffizient von $d\xi/ds$ bzw. $\xi(s)$ der Gleichung (5.5) bedeutet. Mit Hilfe der Transformation

$$\xi=\exp\left(-\int b(s)\,ds\right)\eta(s)$$

kann (5.7) auf die Form

$$\frac{d^2\eta}{ds^2}+\left(c(s)-b^2(s)-\frac{db}{ds}\right)\eta=0 \tag{5.8}$$

gebracht werden.

Die Formel (5.8) ist schon geeignet dazu, daß bezüglich der Existenz der Hüllkurve der aus einem Punkte O ausgehenden geodätischen Linien analoge Untersuchungen durchgeführt werden können, wie das z. B. in [2] gemacht wurde. Die Gleichung (5.8) hat nämlich ebensolche Form, wie (4.2) von [2]. Es kann somit ebenso, wie der Satz 4. von unserer Arbeit [2] der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 5. *Gilt für den längs jeder geodätischen Linie* C: $x^i=x^i(s)$ *definierten Skalar:*

$$K(s):=c(s)-b^2(s)-\frac{db}{ds}$$

die Ungleichung $K(s)>\frac{1}{A^2}$, $A=konst.>0$, *so haben die durch einen Punkt* O *gehenden geodätischen Linien eine Hüllkurve.*

Bezüglich des Beweises vgl. [2], § 4.

Literatur

[1] T. Levi-Civita, Sur l'écart géodésique. *Math. Ann.* **97** (1926), 291—320.
[2] Arthur Moór, Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen. *Publ. Math. (Debrecen)* **5** (1957), 102—118.
[3] Arthur Moór, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **40** (1978), 129—142.
[4] Djerdji Nadj, On curvatures of the Weyl—Otsuki spaces. *Publ. Math. (Debrecen)*, **28** (1981), 59—73.
[5] T. Otsuki, On general connections I. *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1959—60), 99—164.
[6] Hanno Rund, Eine Krümmungstheorie der Finslerschen Räume. *Math. Ann.* **125** (1952), 1—18.
[7] Hanno Rund, The differential geometry of Finsler spaces. Springer-Verlag, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1959.

(Eingegangen am 7. Juni 1978.)