Über eine Charakterisierung des hyperbolischen Flächeninhaltes und eine Funktionalgleichung

Von WALTER BENZ (Hamburg)

1. Versieht man die offene Kreisscheibe

$$\mathbf{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \tag{1}$$

mit der Riemannschen Metrik

$$ds^2 = \frac{(1-y^2)\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (1-x^2)\,dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}, \tag{2}$$

so hat man bekanntlich (s. K. STRUBECKER [6], S. 159) die hyperbolische Metrik des Cayley—Klein-Modells vor sich. (Zum Cayley—Klein-Modell s. etwa L. RÉDEI [4]). Berechnet man zum vorliegenden Fundamentaltensor g_{ik} die Größe $\sqrt{g}$, so werden also bekanntlich hyperbolische Flächeninhalte durch das Integral

$$F(M) = \iint_M \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}} \tag{3}$$

gemessen. In der Literatur über hyperbolische Geometrie findet man zwar die folgenden grundlegenden Eigenschaften, denen der hyperbolische Flächeninhalt genügt (s. H. SCHWERDTFEGER [5], S. 159): Solche Flächeninhalte sind nichtnegativ, additiv und invariant gegenüber hyperbolischen Bewegungen. Dem Autor ist aber keine Stelle in der Literatur bekannt (Herr Schwerdtfeger äußerte sich ebenso), wo untersucht wird, inwieweit die genannten grundlegenden Eigenschaften den Flächeninhalt (3) charakterisieren. Diese Frage ist Gegenstand der vorliegenden Note. (s. den in Abschnitt **3** formulierten Satz).

2. Wir schildern die folgende Aufgabe, deren Lösung in O. PERRON [3] angegeben ist: Es sei Δ die Menge aller (nichtkollinearen) Dreiecke von $\mathbf{H}^2$ und es sei

$$F\colon \Delta \to \mathbf{R}^+,$$

$\mathbf{R}^+ := \{r \in \mathbf{R} \,|\, r \geqq 0\}$, eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) Ist σ hyperbolische Bewegung und ist $D \in \Delta$, so gilt $F(D^\sigma) = F(D)$.

(ii) Wird ein Dreieck D in die paarweise sich nicht überlappenden Dreiecke $D_1, \ldots, D_r$ zerlegt, so gilt

$$F(D) = \sum_{i=1}^{r} F(D_i).$$

Ordnet man nun jedem Dreieck D seinen Defekt ∂D zu, $\partial D=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, wo α, β, γ die hyperbolisch gemessenen Winkel im Dreieck D sind, so gilt: Es existiert eine reelle Zahl $k\geqq 0$ mit $F(D)=k\cdot\partial D$ für alle $D\in\Delta$.

Zum Beweis siehe 0. Perron, loc. cit.

Die folgenden Hinweise, die wir unabhängig von 0. Perron angeben, führen unmittelbar zum Beweis der Aussage:

a) Sei $0<x<\pi$. Ist dann D ein Dreieck mit $\partial D=x$, so setze man $g(x):=F(D)$. Ist D' ein anderes Dreieck mit dem gleichen Defekt x, so sind D, D' zerlegungsgleich (Baldus—Löbell [2], S. 117): Beide besitzen je nicht überlappende Zerlegungen $D_1, \ldots, D_r$ bzw. $D_1', \ldots, D_r'$ in Teildreiecke so, daß D_i hyperbolisch kongruent zu D_i' ist für alle $i=1, \ldots, r$. Also gilt mit (i), (ii)

$$F(D)=\sum_{i=1}^{r} F(D_i)=\sum_{i=1}^{r} F(D_i')=F(D')$$

und $g(x)$ ist eindeutig definiert.

b) Es kann $g(x+y)=g(x)+g(y)$ hergeleitet werden für alle $x, y\in\mathbf{R}$ mit $0<x, y, x+y<\pi$. Dies über ein Dreieck vom Defekt $x+y$, das vermöge einer Transversalen in zwei Teildreiecke der Defekte x, y zerlegt wird.

c) Ist $g\colon]0,\pi[\to\mathbf{R}^+$ eine Funktion, die der Gleichung b) genügt, so existiert ein $k\geqq 0$ mit $g(x)=kx$ für alle $x\in]0,\pi[$. (J. Aczél [1], S. 48).

3. Eine Menge $M\subset\mathbf{H}^2$ heißt hyperbolisch beschränkt (kurz h-beschränkt), wenn es einen hyperbolischen Kreis gibt, der M in seinem Innern enthält. Es sei nun Ω die Menge aller Riemann-meßbaren und h-beschränkten Teilmengen von $\mathbf{H}^2$. An dieser Stelle sei gesagt, daß Ω ein für die üblichen Zwecke der hyperbolischen Geometrie hinreichend großes System von Mengen ist. Natürlich kann man einen Begriff h-meßbar entwickeln und so den euklidischen Begriff Riemann-meßbarkeit vermeiden.

Satz. *Gegeben sei eine Funktion*

$$F\colon \Omega\to\mathbf{R}^+ \tag{4}$$

mit den Eigenschaften

(i) *Ist σ hyperbolische Bewegung und ist $M\in\Omega$, so gilt $F(M^\sigma)=F(M)$.*

(ii) *Ist $M_1, M_2\in\Omega$, so daß $M_1\cap M_2$ den Riemannschen Inhalt Null besitzt, so gilt*

$$F(M_1\cup M_2)=F(M_1)+F(M_2).$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $k\geqq 0$ mit $F(M)=k\iint\limits_M \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}$ für alle $M\in\Omega$.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten!

1) Mit $\Delta\subset\Omega$ weiß man nach Abschnitt 2, daß ein $k\geqq 0$ existiert, so daß $F(D)=k.\ \partial D$ gilt für jedes Dreieck $D\in\Delta$. Ist aber D ein Dreieck, so zeigt eine elementare Rechnung der Analysis (D stehe auch für das Dreiecksinnere mitsamt Rand)

$$\partial D=\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}. \tag{5}$$

Damit gilt

$$F(M)=\Phi(M):=k\cdot\iint\limits_M\frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}\quad\text{für jedes}\quad M\in\Delta. \tag{6}$$

2) Ein achsenparalleles euklidisches Rechteck $V\subset\mathbf{H}^2$ wird durch eine Diagonale in zwei Teildreiecke D_1, D_2 zerlegt.

Also gilt mit (ii)

$$F(V)=F(D_1)+F(D_2)=\Phi(D_1)+\Phi(D_2)=\Phi(V).$$

3) Sei $M\in\Omega$. Im Folgenden betrachten wir achsenparallele euklidische Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbf{N}$, so daß kein solches Quadrat sowohl Punkte von M als auch Randpunkte des Einheitskreises enthält: Da M h-beschränkt ist, ist dies für alle n ab einem n_0 erreichbar. Da zu M ein $0<\varrho<1$ existiert mit $M\subset\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,x^2+y^2<\varrho^2\}$, können wir ab einem n_0 sogar erreichen (und wir wollen dies von nun ab auch voraussetzen), daß keines der achsenparallelen Quadrate der Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$, $n>n_0$, sowohl Punkte von M als auch Randpunkte des Kreises $x^2+y^2=\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^2$ enthält. Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ finden wir nun Quadratnetze M_1, M_2, bestehend aus endlich vielen Quadraten und so, daß jedes Quadrat von M_1 auch Quadrat von M_2 ist (die Quadrate seien nicht überlappend), so daß gilt

$$M_1\subset M\subset M_2 \tag{7}$$

und

$$\mu(M_1)\leqq\mu(M)\leqq\mu(M_2), \tag{8}$$

$$0\leqq\mu(M_2)-\mu(M_1)\leqq\varepsilon, \tag{9}$$

wo μ den Riemannschen Inhalt bezeichnet.

Da M_1, M_2, M, $M\setminus M_1$, $M_2\setminus M$ Riemann-meßbar sind, gilt mit (ii) und (4)

$$F(M)=F(M_1)+F(M\setminus M_1)\geqq F(M_1),$$

$$F(M_2)=F(M)+F(M_2\setminus M)\geqq F(M),$$

d. h.

$$F(M_1)\leqq F(M)\leqq F(M_2).$$

Aufgrund des Beweisschrittes 2) und (ii) gilt also

$$\Phi(M_1)\leqq F(M)\leqq\Phi(M_2).$$

Nun ist aber trivialerweise wegen (7)

$$\Phi(M_1)\leqq\Phi(M)\leqq\Phi(M_2).$$

Beachten wir noch

$$0\leqq\Phi(M_2)-\Phi(M_1)=k\iint\limits_{M_2\setminus M_1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}\leqq k\sup\frac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}(\mu(M_2)-\mu(M_1)),$$

wo das Supremum sich über den Kreis

$$\left\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 | x^2+y^2 \leqq \left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^2\right\}$$

erstreckt, so erhalten wir

$$|\Phi(M)-F(M)| \leqq \Phi(M_2)-\Phi(M_1) \leqq K\varepsilon$$

mit einem festen (von ε unabhängigen) $K \geqq 0$. Also gilt $F(M)=\Phi(M)$.

Bemerkung. Wie der Beweis zeigt, kann die Voraussetzung (i) des Satzes noch abgeschwächt werden, indem (i) nur für Dreiecke M gefordert wird.

4. H. Schwerdtfeger, loc. cit., führt den h. Flächeninhalt von vornherein über ein Integral $\iint\limits_M \varphi(x, y)\, dx\, dy$ ein, $\varphi\colon \mathbf{H}^2 \to \mathbf{R}^+$, wobei er — die Invarianz gegenüber h. Bewegungen ausnutzend — eine Funktionalgleichung für φ aufstellt, die er unter der Voraussetzung der Existenz der partiellen Ableitungen φ_x, φ_y in $\mathbf{H}^2$ auflöst. Wir wollen zeigen, daß diese Bestimmung der Funktionen φ auch ohne Forderung der Existenz der genannten partiellen Ableitungen gelingt. Einzige Voraussetzung ist die Existenz des Integrals $\iint\limits_M \varphi(x, y)\, dx\, dy$ für jede Riemann-meßbare und h-beschränkte Teilmenge M von $\mathbf{H}^2$, daneben natürlich Nicht-negativität und Invarianzeigenschaft. In [5] wird in einem Poincaré-Modell gearbeitet, wir verbleiben im Cayley—Klein-Modell.

Sei $\sigma[x'=f(x, y), y'=g(x, y)]$ eine orientierungstreue h. Bewegung und sei $M_n \subset \mathbf{H}^2$ eine folge konzentrischer und sich auf den Punkt (x, y) zusammenziehonder Kreise. Dann gilt

$$\iint\limits_{M_n} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{M_n^\sigma} \varphi(x', y')\, dx'\, dy' = \iint\limits_{M_n} \varphi\big(f(x, y),\ g(x, y)\big) \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy,$$

d. h. bei Division durch $\mu(M_n)$ und Grenzübergang

$$\varphi(x, y) = \varphi\big(f(x, y),\ g(x, y)\big) \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}. \tag{10}$$

Läßt man σ eine gewöhnliche Drehung um den Ursprung (0, 0) sein, so ist die Funktionaldeterminante 1, und (10) zeigt, daß $\varphi(x, y)$ nur eine Funktion von x^2+y^2 ist, $\varphi(x, y)=\psi(x^2+y^2)$. Betrachtet man für $a\in\mathbf{R}$ und $|a|<1$ die orientierungstreue h. Bewegung

$$f(x, y) = \frac{x-a}{ax-1}$$

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{1-a^2}-y}{ax-1},$$

so ergibt (10)

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\frac{x-a}{ax-1}, \frac{\sqrt{1-a^2}\,y}{ax-1}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-ax}\right)^3.$$

Mit $x=a, y=0$ und $\varphi(0, 0)=:k$ ergibt sich

$$\psi(x^2) = k\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)^3 = \frac{k}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Also ist allgemein

$$\varphi(x, y) = \psi(x^2+y^2) = \frac{k}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}}.$$

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, Lectures on Functional Equations and Their Applications. *Academic Press,* 1966.
[2] R. Baldus, F. Löbell, Nichteuklidische Geometrie, *Sammlg. Göschen, 3. Aufl.* 1953.
[3] O. Perron, Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. *Stuttgart* 1962.
[4] L. Rédei, Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien. *Budapest* 1965.
[5] H. Schwerdtfeger, Geometry of Complex Numbers. *Toronto* 1962.
[6] K. Strubecker, Differentialgeometrie III, *Sammlg. Göschen, 2 Aufl.* 1969.

(Eingegangen am 24. Juni 1978.)