Bemerkung zur Konvergenz der Teilreihen von Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI (Szeged)

1. In der Arbeit [1] haben wir die folgende Behauptung gezeigt.

A. Ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

für jedes orthonormiertes System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$, im Intervall $(0,1)$ fast überall konvergent, und gilt $|b_n|\leqq|a_n|$ $(n=1,2,\ldots)$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$$

auch für jedes orthonormiertes System φ fast überall.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus den folgenden zwei Behauptungen.

B. Die Reihe (1) konvergiert für jedes orthonormiertes System φ im Intervall $(0,1)$ fast überall dann und nur dann, wenn

$$\|a\| = \sup_{\varphi} \sqrt{\int_0^1 \sup_{1\leqq i\leqq j} \left(\sum_{k=i}^{k} a_k\varphi_k(x)\right)^2 dx}$$

besteht, wobei das Supremum für jedes orthonormiertes System φ im Intervall $(0,1)$ gebildet wird.

C. Gilt $|b_n|\leqq|a_n|$ $(n=1,2,\ldots)$, dann ist $\|b\|\leqq\|a\|$.

Aus dem Satz A bzw. aus dem Satz B folgt unmittelbar:

D. Ist die Reihe (1) für jedes orthonormiertes System φ in $(0,1)$ fast überall konvergent, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \varphi_{k_i}(x) \tag{2}$$

für jede Indexfolge $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ und für jedes orthonormiertes System φ in $(0,1)$ fast überall.

E. Für jede Indexfolge $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ gilt $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty\|\leqq\|\{a_k\}_1^\infty\|$.

Ähnliche Behauptungen sind für gleichmäßig beschränkte orthonormierte Systeme bewiesen (s. [2]). In [2] wurde das Problem aufgeworfen, ob ähnliche Sätze auch im Falle gültig sind, wenn die Lebesgueschen Funktionen der Systeme φ gewisse Beschränktheitsbedingung befriedigen.

2. Für ein orthonormiertes System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ setzen wir

$$L_n(\varphi; x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right| dt.$$

Es sei $\lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ eine nichtabnehmende Folge von pozitiven Zahlen, und mit $\Omega^*(\lambda)$ bezeichnen wir die Klasse der orthonormierten Systeme φ in $(0, 1)$ mit

$$\int_0^1 \sup_n \frac{L_n(\varphi; x)}{\lambda_n}\, dx \leqq 1.$$

Weiterhin sei $M^*(\lambda)$ die Klasse der Folgen $a=\{a_k\}_1^\infty$ für die die Reihe (1) bei jedem System $\varphi\in\Omega^*(\lambda)$ in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. Für eine Folge a setzen wir

$$\|a; \lambda\|^* = \sup_{\varphi\in\Omega^*(\lambda)} \int_0^1 \sup_{1\leqq i\leqq j} \left|\sum_{k=i}^j a_k\varphi_k(x)\right| dx.$$

In der Arbeit [3] haben wir gezeigt:

F. $a\in M^*(\lambda)$ gilt dann und nur dann, wenn $\|a; \lambda\|^*<\infty$. Weiterhin gibt es im Falle $\|a; \lambda\|^*=\infty$ ein System $\varphi\in\Omega^*(\lambda)$ derart, daß die Reihe (1) in $(0, 1)$ fast überall divergiert.

Das Analogon der Behauptung E kann leicht gezeigt werden.

Satz I. *Gilt* $a\in M^*(\lambda)$, *dann ist* $\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty\in M^*(\lambda)$ *für jede Indexfolge* $k_1<\ldots$ $\ldots<k_i<\ldots$.

Beweis des Satzes I. Es sei nähmlich für eine Indexfolge $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ $\{a_{k_i}\}_{i=1}^\infty\notin M^*(\lambda)$. Auf Grund der Behauptung F. gibt es ein System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty\in\Omega^*(\lambda)$ derart, daß die Reihe (2) in $(0, 1)$ fast überall divergiert. Anderseits ist die Reihe (1) in $(0, 1)$ fast überall konvergent.

Es sei

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & k = k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ -\varphi_k(x), & k \neq k_i, \quad i = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Es is klar, daß $\psi=\{\psi_k(x)\}_1^\infty\in\Omega^*(\lambda)$, und so ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\psi_k(x)$$

in $(0, 1)$ fast überall konvergent. Daraus folgt, daß

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^\infty a_k\psi_k(x) = 2\sum_{i=1}^\infty a_{k_i}\varphi_{k_i}(x)$$

in $(0, 1)$ fast überall konvergent, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus der Behauptung F. und aus Satz I folgt, daß im Falle $\|a;\lambda\|^*<\infty$ $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty};\lambda\|^*<\infty$ für jede Indexfolge $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ gilt. Man kann auch eine schärfere Behauptung beweisen.

Satz II. *Es gibt eine von der Folge a unabhängige pozitive Zahl C derart, daß für jede Indexfolge* $k_1<\ldots<k_i<\ldots$

$$\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty};\lambda\|^*\leqq C\|a;\lambda\|^*$$

gilt.

Beweis des Satzes II. Wir werden gewisse Eigenschaften der Norm $\|\cdot;\lambda\|^*$ benützen. Für jede Folge a gelten:

$$\|\{a_k\}_1^N;\lambda\|^*\leqq\|\{a_k\}_1^{N+1};\lambda\|^*\quad(N=1,2,\ldots),$$
$$\|\{a_k\}_1^N;\lambda\|^*\nearrow\|a;\lambda\|^*\quad(N\nearrow\infty),$$

und für beliebige Folgen a, b besteht

$$\|a+b;\lambda\|^*\leqq\|a;\lambda\|^*+\|b;\lambda\|^*,$$

weiterhin für jede Folge a ist (s. [3])

$$C\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right\}^{1/2}\leqq\|a;\lambda\|^*\leqq\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

Die Behauptung werden wir ad Absurdum beweisen. Gilt die Behauptung nicht, dann gibt es für jede natürliche Zahl n eine Folge a mit $\|a;\lambda\|^*\leqq 1$, und eine Indexfolge $l_1<\ldots<l_i<\ldots$ mit

$$\|\{a_{l_i}\}_{i=1}^{\infty};\lambda\|^*>n.$$

Durch Induktion werden wir Folgen $\{a_k(m)\}_{k=1}^{\infty}$ $(m=1,2,\ldots)$, Indexfolgen $l_1(m)<\ldots<l_i(m)<\ldots$ $(m=1,2,\ldots)$, und noch eine Indexfolge $(0=)\,N_1<\ldots<N_s<\ldots$ definieren mit folgenden Eigenschaften: für jede natürliche Zahl m gelten:

$$\begin{aligned}&\|a(m);\lambda\|^*\leqq\frac{1}{2^m},\\ &\|\{a_{l_i}(m);\,N_m<l_i\leqq N_{m+1}\};\lambda\|^*\geqq 2^m.\end{aligned}\tag{3}$$

Nach der Voraussetzung gibt es eine Folge a mit $\|a;\lambda\|^*\leqq 1$ und eine Indexfolge $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ mit $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty};\lambda\|^*>2^2$. Es sei N_2 eine natürliche Zahl, für die

$$\|\{a_{k_i};\,1\leqq k_i\leqq N_2\};\lambda\|^*>2^2.$$

Dann setzen wir $l_i(1)=k_i$ $(i\colon 1\leqq k_i\leqq N_2)$ und $a_k(1)=a_k/2$ $(k=1,\ldots,N_2)$. Es ist klar, daß (3) für $m=1$ erfüllt sind. Es sei s_0 eine natürliche Zahl, und nehmen wir an, daß $\{a_k(m)\}_1^{\infty}$, $\{l_i(m)\}_{i=1}^{\infty}$ $(m=1,\ldots,s_0)$ und $N_1,\ldots,N_{s_0+1}$ schon derart definiert sind, daß (3) für $m=1,\ldots,s_0$ erfüllt werden. Dann gibt es eine Folge b und eine Indexfolge $\varkappa_1<\ldots<\varkappa_i<\ldots$ derart, daß $\|b;\lambda\|^*\leqq 1$ und

$$\|\{b_{\varkappa_i}\}_{i=1}^{\infty};\lambda\|^*>2^{s_0+1}(N_{s_0+1}+2^{s_0+1})$$

erfüllt werden. Dann ist aber

$$\|\{b_{\varkappa_i};\ N_{s_0+1} < \varkappa_i\};\ \lambda\|^* \geqq \|\{b_{\varkappa_i}\}_{i=1}^{\infty};\ \lambda\|^* - N_{s_0+1},$$

und so gibt es eine natürliche Zahl $N_{s_0+2}(>N_{s_0+1})$ mit

$$\|\{b_{\varkappa_i};\ N_{s_0+1} < \varkappa_i \leqq N_{s_0+2}\};\ \lambda\|^* > (2^{s_0+1})^2.$$

Es sei

$$a_k(s_0+1) = b_k/2^{s_0+1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad l_i(s_0+1) = \varkappa_i \quad (i\colon\ N_{s_0+1} < \varkappa_i \leqq N_{s_0+2}).$$

Es ist klar, daß (3) für $m=s_0+1$ erfüllt wird. Damit ist die vollständige Induktion richtig. Es sei endlich

$$a_k = a_k(m), \quad N_m < k \leqq N_{m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$k_i = l_i(m), \quad i\colon\ N_m < l_i(m) \leqq N_{m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Dann gilt

$$\|a;\ \lambda\|^* \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \|\{a_k(m)\}_{N_m+1}^{N_{m+1}};\ \lambda\|^* \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty. \tag{4}$$

Andererseits ist

$$\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty};\ \lambda\|^* \geqq \|\{a_{k_i};\ i\colon\ N_m < k_i \leqq N_{m+1}\};\ \lambda\|^* \geqq 2^m$$

für jede natürliche Zahl m, d. h. $\|\{a_{k_i}\}_{i=1}^{\infty};\ \lambda\|^* = \infty$ gilt. Auf Grund des Satzes I und der Behauptung F widerspricht diese Gleichung der Ungleichung (4).

Ob die Analoga der Behauptungen A and C richtig sind, ist es noch ein offenes Problem.

Schriftenverzeichnis

[1] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math., Szeged,* **25** (1964), 219—232.

[2] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III, *Publ. Math. (Debrecen)*, **12** (1965), 127—157.

[3] K. Tandori, Über den Einfluß der Lebesgueschen Funktionen auf die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **19** (1972), 249—258.

[4] K. Tandori, Eine Bemerkung Über das Maximum von Summen orthogonaler Funktionen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **20** (1973), 89—92.

(Eingegangen am 21. Oktober 1978.)