Об инвариантах пар конечных абелевых групп

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

В работах [3], [4] рассматриваются вопросы, связанные с совместной разложимостью абелевой группы G с её подгруппой H (так называемой «пары» (G, H) группы G с подгруппой H).

В настоящей заметке исследуется вопрос, поставленный С. Д. Берманом: какими инвариантами описывается пара (G, H), где G — абелева группа, H — её подгруппа. Доказывается, что если G — конечная абелева группа, $H \subseteqq G$-циклическая группа, то пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар характеризуется инвариантами фактор-группы G/H.

Определение 1. Пусть G — произвольная группа, H — подгруппа группы G. Пару (G, H) называем неразложимой, если не существует такое разложение группы G и подгруппы H в прямое произведение своих подгрупп

$$G = G_1 \times G_2$$
$$H = H_1 \times H_2 \quad (G_1 \neq \{1\},\ G_2 \neq \{1\}),$$

что $H_1 \subseteqq G_1$, $H_2 \subseteqq G_2$. В противном случае пара (G, H) называется разложимой.

Определение 2. Пусть G_i $(i=1, 2)$ — произвольные группы, и H_i — подгруппа группы G_i. Пары (G_1, H_1) и (G_2, H_2) называются изоморфными, если существует изоморфизм φ: $G_1 \to G_2$ такой, что $\varphi(H_1) = H_2$.

Лемма 1.*) *Пусть G—прямое произведение конечного числа циклических p-групп, H—циклическая подгруппа группы G. Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, что при $a_i^{p^{\alpha_i}}=1$ $(i=1, \dots, n)$ подгруппа H порождается элементом $a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}$, причём выполняются неравенства*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$$
$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n \tag{1}$$
$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \ldots < \alpha_n - \beta_n.$$

Доказательство. Пусть $G = (a_1) x \ldots x (a_n)$, $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ $(i=1, \dots, n)$, $H = (a_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\mu_n})$. Предположим, что $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n$ очевидно, ни одно из чисел μ_i $(i=1, \dots, n)$ не равно нулю, так как при $\mu_k = 0$ для фиксированного

---

*) Лемма 1 принадлежит С. Д. Берману. Идеями предложенного здесь доказательства в дальнейшем будем пользоваться.

k $(1 \leqq k \leqq n)$ разложению $G = G_1 \times (a_k)$ группы G, где $G_1 = (a_1) \times \ldots \times (a_{k-1}) \times \times (a_{k+1}) \times \ldots \times (a_n)$ соответствовало бы разложение $H = H \times \{1\}$, группы H, где $H \subseteqq G_1$, значит пара (G, H) была бы разложимой.

Рассмотрим отображение

$$\varphi(a_i) = a_i^{\lambda_i} = \bar{a}_i \tag{2}$$

где $\mu_i = \lambda_i p^{\beta_i}$, $(\lambda_i, p) = 1$, $(i = 1, \ldots, n)$. Отображение (2) является автоморфизмом группы G. Действительно, из-за $(\lambda_i, p) = 1$, порядки элементов a_i и $\bar{a}_i$ совпадают, значит φ взаимно однозначно отображает группу G на себя. Очевидно, φ является гомоморфизмом. Значит φ переводит базис $\{a_i\}$ группы G в такой базис $\{\bar{a}_i\}$, в котором подгруппа H порождается элементом $\bar{a}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_n^{p^{\beta_n}}$.

Мы будем предполагать, что подгруппа H порождается элементом

$$a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}.$$

Покажем теперь, что для неразложимости пары (G, H) необходимо выполнение неравенства

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n.$$

Пусть наоборот, для фиксированного индекса k $(1 \leqq k \leqq n)$ имеет место неравенство $\beta_k \geqq \beta_{k+1}$. Так как

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k^{p^{\beta_k - \beta_{k+1}}} \cdot a_{k+1})^{p^{\beta_{k+1}}},$$

то мы положим

$$\bar{\bar{a}}_i = \begin{cases} a_i & , \text{ если } i \neq k+1 \\ a_k^{p^{\beta_k - \beta_{k+1}}} \cdot a_{k+1}, & \text{ если } i = k+1 \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3'}$$

Очевидно, множество $\{\bar{\bar{a}}_i\}$ является базисом группы G, так как $(\bar{a}_\gamma) \cap (\bar{a}_\mu) = e$ $(1 \leqq v \neq \mu \leqq n)$ и порядок элемента $\bar{a}_{k+1}$ равен порядку элемента a_{k+1} (ибо $\alpha_k \leqq \alpha_{k+1}$). Поэтому отображение

$$\psi(a_i) = \bar{\bar{a}}_i, \tag{3}$$

где элементы $\bar{\bar{a}}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ определены равенствами (3′), является автоморфизмом группы G. Однако, подгруппа H лежит в подгруппе $G_2 = (a_1) \times \ldots \times (a_{k-1}) \times (a_{k+1}) \times \ldots \times (a_n)$, поэтому разложению $G = G_2 \times (a_k)$ соответствует разложение $H = H \times \{1\}$ подгруппы H, значит пара (G, H) разложима.

Покажем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо также выполнение неравенств

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n.$$

Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса k $(1 \leqq k < n)$ выполняется $\alpha_k = \alpha_{k+1}$. Тогда из-за равенства

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}})^{p^{\beta_k}}$$

мы можем положить

$$\bar{\bar{\bar{a}}}_i = \begin{cases} a_i & , \text{ если } i \neq k \\ a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}}, & \text{ если } i = k \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4'}$$

Множество $\{\bar{\bar{\bar{a}}}_i\}$ является базисом группы G, в котором подгруппа H имеет вид

$$H = (\bar{\bar{\bar{a}}}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot \bar{\bar{\bar{a}}}_k^{p^{\beta_k}} \cdot \bar{\bar{\bar{a}}}_{k+2}^{p^{\beta_{k+2}}} \cdot \ldots \cdot \bar{\bar{\bar{a}}}_n^{p^{\beta_n}}),$$

значит она лежит в истинной подгруппе $G_3 = (\bar{\bar{\bar{a}}}_1) \times \ldots \times (\bar{\bar{\bar{a}}}_k) \times (\bar{\bar{\bar{a}}}_{k+2}) \times \ldots \times (\bar{\bar{\bar{a}}}_n)$ группы G, и G разлагается в прямое произведение $G = G_3 \times (\bar{\bar{\bar{a}}}_{k+1})$. Следовательно, пара (G, H) разложима.

Покажем также необходимость выполнения неравенств

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \ldots < \alpha_n - \beta_n$$

для неразложимости пары (G, H). Пусть для некоторого фиксированного индекса k $(1 \leqq k < n)$ имеет место неравенство

$$\alpha_k - \beta_k \geqq \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}.$$

Тогда можно записать равенство

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}})^{p^{\beta_k}}.$$

Порядок элемента $a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}}$ равняется числу $p^{\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} + \beta_k}$, которое, по нашему предположению, не больше числа p^{α_k}—порядка элемента a_k. Поэтому, порядок элемента

$$\tilde{a}_k = a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}}$$

равен числу p^{α_k}. Положим

$$(5') \qquad \tilde{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq k \\ a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}}, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Нетрудно заметить, что множество $\{\tilde{a}_i\}$ является базисом группы G, образом базиса $\{a_i\}$ при автоморфизме

$$(5) \qquad \tilde{\psi}(a_i) = \tilde{a}_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

где элементы $\tilde{a}_i$ определены равенствами (5′). В этом базисе образующий элемент

$$\tilde{a}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_k^{p^{\beta_k}} \cdot \tilde{a}_{k+2}^{p^{\beta_{k+2}}} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n^{p^{\beta_n}}$$

подгруппы H не зависит от элемента $\tilde{a}_{k+1}$ группы G. Разложение $G = G_4 \times (\tilde{a}_{k+1})$ группы G, где $G_4 = (\tilde{a}_1) \times \ldots \times (\tilde{a}_k) \times (\tilde{a}_{k+2}) \times \ldots \times (\tilde{a}_n)$, и включение $H \subseteqq G_4$ сделает очевидной разложимость пары (G, H).

Осталось показать, что условия (1) являются достаточными для неразложимости пары (G, H). Пусть выполняются условия леммы. Так как циклическая группа H не разлагается в нетривиальное прямое произведение своих подгрупп, то для разложимости пары (G, H) было бы необходимо существование такой подгруппы $\tilde{G}_1 \subseteqq G$, для которой $H \subseteqq \tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_1 \neq G$. Предположим, что такая подгруппа $\tilde{G}_1$ существует, то есть имеется такой базис $a_1^*, \ldots, a_n^*$

группы G, в котором имеет место разложение $G=\tilde{G}_1\times G_2$, $G_2\neq\{1\}$ и $H\subset\tilde{G}_1$. Это возможно только тогда, когда в базисе $\{a_i^*\}$ группы G, в выражение элемента $a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}}\in H$ через этот базис, входят не все элементы базиса $\{a_i^*\}$.

Переход от базиса $\{a_i\}$ к базису $\{a_i^*\}$ является автоморфизмом φ^* группы G. Предположим, что элементы a_i^* $(i=1, \ldots, n)$ занумерованы так, что

$$\operatorname{ord} a_i = \operatorname{ord} a_i^* \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть

$$a_n = a_1^{*\gamma_{1n}}\cdot a_2^{*\gamma_{2n}}\cdot\ldots\cdot a_n^{*\gamma_{nn}},$$

где $\gamma_{nn}\not\equiv 0 \pmod p$, так как порядок элемента a_n^* равен p^{α_n} $(>p^{\alpha_j}, j=1, 2, \ldots, n-1)$, значит, в случае $\gamma_{nn}\equiv 0 \pmod p$, порядок элемента a_n не был бы равен p^{α_n}. Пусть далее

$$a_{n-1} = a_1^{*\gamma_{1\,n-1}}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{*\gamma_{n-1\,n-1}}\cdot a_n^{*\gamma_{n\,n-1}},$$

где, подобно высше сказанному,

$$\gamma_{n-1\,n-1}\not\equiv 0 \pmod p, \quad \gamma_{n\,n-1}\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}}.$$

Для элемента a_{n-2} получаем выражение

$$a_{n-2} = a_1^{*\gamma_{1\,n-2}}\cdot\ldots\cdot a_{n-2}^{*\gamma_{n-2\,n-2}}\cdot\ldots\cdot a_n^{*\gamma_{n\,n-2}},$$

где

$$\gamma_{n-2\,n-2}\not\equiv 0 \pmod p, \quad \gamma_{n-1\,n-2}\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}}, \quad \gamma_{n\,n-2}\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n-\alpha_{n-2}}}.$$

Вообще, для базисного элемента a_{n-i} получаем выражение

$$a_{n-i} = a_1^{*\gamma_{1\,n-i}}\cdot\ldots\cdot a_{n-i}^{*\gamma_{n-i\,n-i}}\cdot\ldots\cdot a_n^{*\gamma_{n\,n-i}}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

причём выполняются сравнения

$$\gamma_{n-i\,n-i}\not\equiv 0 \pmod p, \quad \gamma_{n-k\,n-i}\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{n-k}-\alpha_{n-i}}}, \quad (k = 0, 1, \ldots, i-1).$$

Пусть

$$\gamma_{rs} = \begin{cases}\gamma_{rs}, & \text{если } r\leqq s\\ c_{rs}p^{\alpha_r-\alpha_s}, & \text{если } r>s\end{cases} \quad (r, s = 1, \ldots, n),$$

где $c_{rs}\not\equiv 0 \pmod p$ $(r>s)$. Тогда матрица автоморфизма φ^* имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1\,n-1} & \gamma_{1n}\\ c_{21}p^{\alpha_2-\alpha_1} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2\,n-1} & \gamma_{2n}\\ c_{31}p^{\alpha_3-\alpha_1} & c_{32}p^{\alpha_3-\alpha_2} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3\,n-1} & \gamma_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ c_{n-1\,1}p^{\alpha_{n-1}-\alpha_1} & c_{n-1\,2}p^{\alpha_{n-1}-\alpha_2} & c_{n-1\,3}p^{\alpha_{n-1}-\alpha_3} & \ldots & \gamma_{n-1\,n-1} & \gamma_{n-1\,n}\\ c_{n1}p^{\alpha_n-\alpha_1} & c_{n2}p^{\alpha_n-\alpha_2} & c_{n3}p^{\alpha_n-\alpha_3} & \ldots & c_{n\,n-1}p^{\alpha_n-\alpha_{n-1}} & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поэтому образующий элемент циклической подгруппы в новом базисе выражается так:

$$
\begin{aligned}
a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}} = {} & a_1^{*\gamma_{11}p^{\beta_1}+\gamma_{12}p^{\beta_2}+\ldots+\gamma_{1\,n-1}p^{\beta_{n-1}}+\gamma_{1n}p^{\beta_n}}\cdot \\
& \cdot a_2^{*c_{21}p^{\alpha_2-\alpha_1+\beta_2}+\gamma_{22}p^{\beta_2}+\ldots+\gamma_{2n}p^{\beta_n}}\cdot \\
& \vdots \\
& \cdot a_i^{*c_{i1}p^{\alpha_i-\alpha_1+\beta_i}+\ldots+c_{i\,i-1}p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}+\beta_i}+\gamma_{ii}p^{\beta_i}+\ldots+\gamma_{in}p^{\beta_n}}\cdot \\
& \vdots \\
& \cdot a_{n-1}^{*c_{n-1\,1}p^{\alpha_{n-1}-\alpha_1+\beta_{n-1}}+\ldots+c_{n-1\,n-2}p^{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}+\beta_{n-1}}+\gamma_{n-1\,n-1}{}^{\beta_{n-1}}+\gamma_{n-1\,n}p^{\beta_n}}\cdot \\
& \vdots \\
& \cdot a_n^{*c_{n1}p^{\alpha_n-\alpha_1+\beta_n}+\ldots \qquad\qquad +c_{n\,n-1}p^{\alpha_n-\alpha_{n-1}+\beta_n}+\gamma_{nn}p^{\beta_n}} = \\
= {} & a_1^{*\gamma_1 p^{\beta_1}}\cdot a_2^{*\gamma_2 p^{\beta_2}}\cdot\ldots\cdot a_n^{*\gamma_n p^{\beta_n}},
\end{aligned}
$$

где показатели γ_i взаимно просты с p^{β_i}, так как

$$\gamma_i = c_{i1}p^{\alpha_i-\alpha_1}+\ldots+c_{i\,i-1}p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}+\gamma_{ii}+\gamma_{i\,i+1}p^{\beta_{i+1}-\beta_i}+\ldots+\gamma_{in}p^{\beta_n-\beta_i},$$

где выполняется $\alpha_i-\alpha_\gamma>0$ для всех $\nu=1,\ldots,i-1$ $(i=1,\ldots,n)$, а γ_{ii} взаимно просты с p $(i=1,\ldots,n)$.

Значит, в записи элемента $a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}}$ подгруппы H в новом базисе $\{a_i^*\}$ участвуют все базисные элементы a_i^*, значит разложение $G=\tilde{G}_1\times G_2$ невозможно. Следовательно, пара (G, H) неразложима. Лемма 1 доказана.

Лемма 2.*) *Пусть G-конечнопорождённая абелева группа, H-её погруппа. Пусть $\{a_i\}$-базис группы G и*

$$a_1^{\gamma_{1\nu}}a_2^{\gamma_{2\nu}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\gamma_{n\nu}}H = H \quad (\nu=1,2,\ldots,s)$$

все определяющие соотношения фактор-группы G/H. Тогда инварианты фактор-группы G/H получаются приведением целочисленной матрицы

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1s}\\ \vdots & & \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{ns}\end{pmatrix}$$

элементарными преобразованиями к диалональному виду

$$\begin{pmatrix}\delta_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0\\ & & \delta_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

$(r=\min\{n,s\})$, где δ_i/δ_{i+1} $(i=1,\ldots,r-1)$, δ_i-неотрицательные целые числа.

---

*) Так как в дальнейшем будем пользоваться им, мы приводим здесь одно доказательство этого известного факта.

Доказательство. Пусть $b_1, \ldots, b_m$-базис подгруппы H. Тогда, по известной теореме о конечнопорождённых абелевых группах, существует такой базис $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ группы G, что имеет место

$$b_1 = a_1^{\varepsilon_1}, \ldots, b_m = a_m^{\varepsilon_m},$$

и выполняется

$$\varepsilon_i / \varepsilon_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

В этом базисе фактор-группа G/H выражается в виде прямого произведения

$$G/H \cong (a_1)/(b_1) \times \ldots \times (a_m)/(b_m) \times (a_{m+1}) \times \ldots \times (a_n),$$

где порядки фактор-групп $(a_i)/(b_i)$ равняются числам ε_i $(i=1, \ldots, m)$.

Переход к базису $\{a_i\}$ является автоморфизмом группы G, который характеризуется целочисленной матрицей диагонального вида. Так как при элементарных преобразованиях матрица задаёт автоморфизм группы, а при автоморфизмах определяющие соотношения переходят в определяющие соотношения, значит полученная диагональная матрица в диагонали содержит в точности инварианты фактор-группы G/H. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G—прямое произведение конечного числа циклических p-групп, H—такая циклическая подгруппа группы G, что пара (G, H) неразложима. Тогда пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар определяется инвариантами группы G и фактор-группы G/H.*

Доказательство. Пусть группа G порождается базисом $a_1, \ldots, a_n$, где $a_i^{p^{\alpha_i}}=1$ $(i=1, \ldots, n)$ и имеет место неравенство $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Так как (G, H)-неразложимая пара, то, согласно лемме 1, подгруппа H имеет вид

$$H = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}),$$

причём выполняются неравенства

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n; \quad \alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \ldots < \alpha_n - \beta_n.$$

Определяющие соотношения фактор-группы G/H имеют вид:

$$a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} H = H$$

$$a_i^{p^{\alpha_i}} H = H \quad (i = 1, \ldots, n),$$

поэтому, согласно лемме 2, инварианты фактор-группы G/H получаются приведением элементарными преобразованиями к диагональному виду матрицы

$$\begin{pmatrix} p^{\beta_n} & 0 & \ldots & 0 & p^{\alpha_n} \\ p^{\beta_{n-1}} & 0 & \ldots & p^{\alpha_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & & & \\ p^{\beta_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ p^{\beta_1} & p^{\alpha_1} & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+\beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & p^{\alpha_{n-2}-\beta_{n-2}+\beta_{n-1}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p^{\alpha_1-\beta_1+\beta_2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ p^{\beta_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть инварианты фактор-группы G/H:

$$p^{\beta_1},\ p^{\alpha_1-\beta_1+\beta_2},\ \ldots,\ p^{\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+\beta_n}. \tag{6}$$

Покажем, что фактор-группа G/H порождается смежными классами

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \bar{a}_1 H = (a_1 a_2^{p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n-\beta_1}})H,\\
\bar{b}_2 &= \bar{a}_2 H = (a_2 \cdot a_3^{p^{\beta_3-\beta_2}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n-\beta_2}})H,\\
&\vdots\\
\bar{b}_{n-1} &= \bar{a}_{n-1} H = (a_{n-1} \cdot a_n^{p^{\beta_n-\beta_{n-1}}})H,\\
\bar{b}_n &= \bar{a}_n H = a_n H.
\end{aligned} \tag{7}$$

Порядок смежного класса $\bar{b}_i$ равен $p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}$ $(i=2, \ldots, n)$, так как

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_i)^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} &= (a_i \cdot a_{i+1}^{p^{\beta_{i+1}-\beta_i}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n-\beta_i}})^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} =\\
&= a_i^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} \cdot a_{i+1}^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_{i+1}}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_n}} =\\
&= (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_{i-1}^{p^{\beta_{i-1}}} \cdot a_i^{p^{\beta_i}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}})^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}}} \in H,
\end{aligned}$$

ибо $(a_1^{p^{\beta_i}} \cdot \ldots \cdot a_{i-1}^{p^{\beta_{i-1}}})^{p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}}}=1$, но меньшая степень элемента $\bar{a}_i$ не попадает в H. Точно так же можно показать, что порядок элемента $\bar{b}_1$ равен p^{β_1}:

$$\bar{a}_1^{p^{\beta_1}} = (a_1 \cdot a_2^{p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n-\beta_1}})^{p^{\beta_i}} = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \in H,$$

но меньшая степень элемента $\bar{a}_1$ не лежит в подгруппе H.

Покажем теперь, что любой смежный класс gH выражается через систему смежных классов (7). Пусть

$$g = a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n},$$

и рассмотрим смежный класс gH. Так как

$$a_1 H = \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2^{-p^{\beta_2-\beta_1}};\ \ldots;\ a_{n-1}H = \bar{b}_{n-1} \cdot \bar{b}_n^{-p^{\beta_n-\beta_{n-1}}};\ a_n H = \bar{b}_n,$$

то также имеет место

$$a_1^{\gamma_1}H = \bar{b}_1^{\gamma_1} \cdot \bar{b}_2^{-\gamma_1 p^{\beta_2-\beta_1}};\ \ldots;\ a_{n-1}^{\gamma_{n-1}}H = \bar{b}_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \cdot \bar{b}_n^{-\gamma_{n-1}p^{\beta_n-\beta_{n-1}}};\ a_n^{\gamma_n}H = \bar{b}_n^{\gamma_n}.$$

Следовательно,

$$gH = \bar{b}_1^{\gamma_1} \cdot \bar{b}_2^{\gamma_2-\gamma_1 p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \ldots \cdot \bar{b}_i^{\gamma_i-\gamma_{i-1}p^{\beta_i-\beta_{i-1}}} \cdot \ldots \cdot \bar{b}_n^{\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}p^{\beta_{n-1}-\beta_{n-2}}} \cdot \bar{b}_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}p^{\beta_n-\beta_{n-1}}}. \tag{8}$$

Если известны инварианты фактор-группы G/H, то по формуле (6) последовательно можно найти числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, и этим самым пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар. Наоборот, если задана пара (G, H) инвариантами группы G и числами $\beta_1, \ldots, \beta_n$, то по формулам (7) и (8) каждый смежный класс gH взаимно однозначно определяется числами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, которые по формуле (8) находятся последовательно. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G—прямое произведение конечного числа циклических p-групп, H—циклическая подгруппа группы G. Тогда пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар инвариантами группы G и фактор-группы G/H.*

Доказательство. Пусть

$$G = (a_1)\times(a_2)\times\ldots\times(a_n),$$

где $a_i^{p^{\alpha_i}}=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Для удобства предположим, что $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots\leqq\alpha_n$. Очевидно, группа G разлагается в прямое произведение своих подгрупп

$$G = G_1\times G_2$$

так, что (G_1, H)-неразложимая пара. Пусть

$$G_1 = (a_{i_1})\times\ldots\times(a_{i_s}).$$

Используя лемму 1, мы предполагаем, что базис $\{a_i\}$ группы G выбран так, что подгруппа H имеет вид

$$H = (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_s}^{p^{\beta_{i_s}}}),$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_{i_1}<\alpha_{i_2}<\ldots<\alpha_{i_s},$$

$$\beta_{i_1}<\beta_{i_2}<\ldots<\beta_{i_s},$$

$$\alpha_{i_1}-\beta_{i_1}<\alpha_{i_2}-\beta_{i_2}<\ldots<\alpha_{i_s}-\beta_{i_s}.$$

Так как $H\subset G_1$, то имеет место прямое разложение

$$G/H \cong G_1/H\times G_2.$$

Ясно, что система инвариантов фактор-группы G/H получается объединением инвариантов фактор-группы G_1/H и группы G_2. Покажем, что инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Пусть дана система инвариантов группы G: $p^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p^{\alpha_n}$, причём $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\ldots\leqq\alpha_n$, и система инвариантов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ фактор-группы G/H. Так как (G_1, H)—неразложимая пара, то, согласно формуле (6), инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$p^{\beta_{i_1}},\ p^{\beta_{i_2}+(\alpha_{i_1}-\beta_{i_1})},\ \ldots,\ p^{\beta_{i_s}+(\alpha_{i_{s-1}}-\beta_{i_{s-1}})}.$$

Будем искать инварианты фактор-группы G_1/H в таком виде среди инвариантов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ фактор-группы G/H. Расположим инварианты δ_ι в порядке возрастания. Пусть δ_{r_1}—первый в этом ряду инвариант, который либо не совпадает ни с одним из инвариантов группы G, либо входит в систему инвариантов фактор-группы G/H с большей кратностью, чем в систему $\{p^{\alpha_i}\}$. Покажем, что тогда δ_{r_1} совпадает с наименьшим из инвариантов фактор-группы G_1/H.

Действительно, в первом случае (если не совпадает ни с одним из инвариантов группы G) он не является инвариантом группы G_2, значит инвариант фактор-группы G_1/H. Во втором случае δ_{r_1} хотя бы один раз входит в систему инвариантов фактор-группы G_1/H, так как в систему инвариантов подгруппы G_2 он не может входить с большей кратностью, чем в систему $\{p^{\alpha_i}\}$. Осталось заметить, что такое δ_{r_1} найдётся, так как в противном случае совпадали бы инварианты группы G и фактор-группы G/H.

После этого в подсистеме $\delta_{r_1+1}, \ldots, \delta_m$ найдём такое δ_{r_2} $(>\delta_{r_1})$, которое наименьшее из всех δ_i $(i>r_1+1)$, которые либо не совпадают ни с одним из инвариантов p^{α_i}, либо входят в систему $\{\delta_\mu\}$ с большей кратностью, чем в систему $\{p^{\alpha_i}\}$. Число δ_{r_2} является инвариантом фактор-группы G_1/H. Итд. После конечного числа шагов определяются все числа

$$\delta_{r_1} = p^{\beta_{i_1}},\ \delta_{r_2} = p^{\beta_{i_2}+(\alpha_{i_1}-\beta_{i_1})}, \ldots, \delta_{r_s} = p^{\beta_{i_s}+(\alpha_{i_{s-1}}-\beta_{i_{s-1}})}. \tag{9}$$

Так как все инварианты фактор-группы G/H, которые не входят в систему (9), являются инвариантами подгруппы G_2, то инварианты $p^{\alpha_{i_1}}, \ldots, p^{\alpha_{i_s}}$ подгруппы G_1 получаются из системы инвариантов группы G путём выбрасывания из $\{p^{\alpha_i}\}$ инвариантов подгруппы G_2 (которые определяются в виде $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} \setminus \{\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_s}\}$).

Так найденные инварианты расположим в порядке возрастания

$$p^{\alpha_{i_1}} < p^{\alpha_{i_2}} < \ldots < p^{\alpha_{i_s}}$$

и числа α_i, последовательно определяют показатели $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_s}$ по формуле (9) однозначно. Последние определяют пару (G_1, H) с точностью до изоморфизма пар. Значит числа $p^{\beta_{i_1}}, \ldots, p^{\beta_{i_s}}$ вместе с инвариантами подгруппы G_2 определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть G—произвольная конечная абелева группа, H—циклическая подгруппа группы G. Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H с точностью до изоморфизма пар определяют пару* (G, H).

Доказательство. Конечная абелева группа однозначно разлагается в прямое произведение примарных подгрупп:

$$G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \ldots \times G_{p_s},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ различные простые числа. Каждая примарная подгруппа G_{p_i} разлагается в прямое произведение циклических p_i-групп, порядки которых определяются однозначно. Циклическая подгруппа $H \subseteq G$ разлагается в прямое произведение

$$H = H_1 \times \ldots \times H_s,$$

где $H_i \subseteq G_{p_i}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, причём

$$G/H \cong G_{p_1}/H_1 \times \ldots \times G_{p_s}/H_s.$$

Инварианты фактор-группы G/H получаются объединением инвариантов фактор-групп G_{p_i}/H_i ($i=1, 2, \ldots, s$). Так как инварианты фактор-группы G_{p_i}/H_i являются степенями простого числа p_i, то из инвариантов фактор-группы G/H однозначно можно выделить инварианты фактор-группы G_{p_i}/H_i для каждого i ($i=1, 2, \ldots, s$). По теореме 2, пара (G_{p_i}, H_i) определяется с точностью до изоморфизма пар инвариантами группы G_{p_i} и фактор-группы G_{p_i}/H_i, поэтому инварианты всех подгрупп G_{p_i} и фактор-групп G_{p_i}/H_i в совокупности определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Литература

[1] М. Холл, Теория групп, *Изд. Иностр. Лит.*, 1962.
[2] А. Г. Курош, Теория групп, *Изд. Наука*, 1967.
[3] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О вложении подмодулей в конечнопорождённый модуль над кольцом главных идеалов, XI. Всесоюзный алгебраический коллоквиум, *Резюме сообщений и докладов, Кишинёв* (1971), 117—118.
[4] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечнопорождённой абелевой группы и её подгруппы, *Докл. АН СССР*, **210**, (1973), 1004—1007.

(Поступила: 4. IX. 1978)