Цепи маркова с ограниченными синзу скачками и однородной второй компонентой

Л. ЛАКАТОШ (Будапешт)

1. В настоящей работе рассматривается неоднородная цепь Маркова ξ_t с фазовым пространством $\{0, 1, 2, \dots\}$ и присоединенной однородной второй компонентой. Возможные изменения состояний цепи могут быть двух типов: увеличения (положительные скачки) любого размера и уменьшения (отрицательные скачки), ограниченные некоторой константой c. К первой компоненте присоединим вторую компоненту, однородную во времени. Марковские процессы, однородные по второй компоненте, были введены и изучены И. И. Ежовым и А. В. Скороходом в [1] и [2]. Подобная система без присоединенной компоненты была рассмотрена в диссертационной работе М. Ф. Таирова [4], там состояния цепи Маркова интерпретировались как количество требований в марковской системе обслуживания с неординарным поступлением и групповым обслуживанием ограниченного размера. Аналогичная задача при условии, что отрицательные скачки равны единице, была решена в диссертационной работе И. Д. Олийныка [3].

2. Введем случайный процесс α_t, $t \geqq 0$ с возможными значениями $1, 2, \dots$ и интенсивностями изменений $a_r(t)$, $r=1, 2, \dots$. Это означает, что если α_t-значение процесса в момент t, то α_t, $t \geqq 0$-процесс с независимыми приращениями и

$$(1) \qquad M\Theta^{\alpha_s-\alpha_t} = \exp\left\{\sum_{r=1}^{\infty} (\Theta^r - 1) \int_t^s a_r(u)\, du\right\}, \quad |\Theta| \leqq 1.$$

Предполагается, что если в момент t, $\alpha_t = k$, то, независимо от всего, что было до t в системе на интервале $[t, t+\Delta]$, $\Delta \to 0$, возможен отрицательный скачок, значение которого имеет то же распределение, что и

$$\min\{k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}\},$$

где β_t — не зависящий от α_t-процесс с независимыми приращениями и характеристической функцией

$$(2) \qquad M\Theta^{\beta_s-\beta_t} = \exp\left\{\sum_{r=1}^{c} (\Theta^{-r} - 1) \int_t^s a_{-r}(u)\, dn\right\}, \quad |\Theta| \leqq 1,$$

(c-некоторое фиксированное натуральное число). Это означает, что если $k \geqq$(c-некоторое фиксированное натуральное число). Это
$k \geqq c$, то

$$\min\{k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}\}$$

с точностью до $o(\Delta)$ имеет то же распределение, что и $\beta_t-\beta_{t+\Delta}$, т. е.

$$P\{\min(k, \beta_t-\beta_{t+\Delta})=r\}=a_{-r}(t)\Delta+o(\Delta), \quad r=1,2,\dots,c. \tag{3}$$

Если же $0<k<c$, то

$$P\{\min(k, \beta_t-\beta_{t+\Delta})=r\}=\begin{cases} a_{-r}(t)\Delta+o(\Delta), & 0<r<k, \\ \Delta\sum\limits_{l=k}^{c} a_{-l}(t)+o(\Delta), & r=k. \end{cases} \tag{4}$$

Итак, дополнительно мы еще ввели совокупность независимых между собой и не зависящих от α_t процессов с независимыми приращениями

$$\beta_t(0), \beta_t(1), \beta_t(2), \dots, \beta_t(c-1)$$

с характеристическими функциями

$$M\Theta^{\beta_s(k)-\beta_t(k)}=\exp\left\{\sum_{m=1}^{k-1}(\Theta^{-m}-1)\int_t^s a_{-m}(u)\,du+(\Theta^{-k}-1)\sum_{j=k}^{c}\int_t^s a_{-j}(u)\,du\right\}. \tag{5}$$

Очевидно,

$$\beta_t(c)=\beta_t(c+1)=\beta_t(c+2)=\dots=\beta_t.$$

Предположим, что для всех t

$$\sum_{\substack{r=-c \\ r\neq 0}}^{\infty} a_r(t)=-a_0(t)<+\infty,$$

и все $a_r(t)$, $r\geqq -c$ непрерывны на $(0,\infty)$. Пусть

$$\xi_t=\alpha_t-\beta_t(k), \quad k=0,1,\dots,c-1.$$

Из сказанного выше следует, что ξ_t, $t\geqq 0$ — целочисленная цепь Маркова, переходные вероятности которой на малом интервале $[t, t+\Delta]$ имеют вид:

$$k\xrightarrow{[t,t+\Delta]}\begin{cases} k+r, & \text{с вероятностью } a_r(t)\Delta+o(\Delta),\ r\neq 0,\ k+r>0,\ r\geqq -c, \\ 0, & \text{с вероятностью } \Delta\sum\limits_{l=k}^{c} a_{-l}(t)+o(\Delta), \quad 0<k\leqq c. \end{cases} \tag{6}$$

Определяем процесс

$$\xi_t^*=\alpha_t-\beta_t, \quad t\geqq 0,$$

с характеристической функцией

$$M\Theta^{\xi_s^*-\xi_t^*}=M\Theta^{\alpha_s-\alpha_t}\cdot M\Theta^{\beta_s-\beta_t}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{m=-c}^{\infty}(\Theta^m-1)\int_t^s a_m(u)\,du\right\}, \quad |\Theta|\leqq 1,$$

и присоединим к ξ_t^* компоненту ε_t со значениями из конечномерного арифметического пространства $\mathbf{R}$ таким образом, чтобы

$$\bar{\xi}_t^*=\{\xi_t^*, \varepsilon_t\}$$

был процессом с независимыми приращениями со значениями в $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \times \mathbf{R}$.

Будем предполагать, что кумулянта этого процесса непрерывно дифференцируема по t.

$$M\Theta^{\xi_s^* - \xi_t^*} e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)} = \exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u, \Theta)\, du\right\}, \tag{7}$$

где

$$a^{(z)}(t, \Theta) = a_0(t) + \varepsilon_0(t) + \sum_{\substack{r=-c \\ r \neq 0}}^{\infty} \Theta^r a_r(t) \varepsilon_r^{(z)}(t),$$

и (для каждого фиксированного t) $\varepsilon_0^{(z)}(t)$ — кумулянта безгранично делимого распределения в $\mathbf{R}$, а $\varepsilon_r^{(z)}(t)$ $(r \neq 0)$ — характеристические функции некоторых распределений в $\mathbf{R}$.

Вероятностный смысл $\varepsilon_r^{(z)}(t)$ следующий:

$$M(e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)} | \xi_u^* = \text{const},\ u \in [t, s]) = \exp\left\{\int_t^s \varepsilon_0^{(z)}(u)\, du\right\},$$

$$M(e^{i(z, \varepsilon_{t+0} - \varepsilon_{t-0})} | \xi_{t+0}^* - \xi_{t-0}^* = r) = \varepsilon_r^{(z)}(t), \quad r \neq 0.$$

Очевидно,

$$\varrho_r^{(z)}(t, s) = M(e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)}, \xi_s^* - \xi_t^* = r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\Theta|=1} \exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u, \Theta)\, du\right\} \frac{d\Theta}{\Theta^{r+1}}.$$

Можно аналогично ввести и процесс $\vec{\xi}_t = \{\xi_t, \varepsilon_t\}$, который принимает значения в $\{0, 1, 2, \ldots\} \times \mathbf{R}$; в связи с этим подчеркиваем одну особенность нашей системы. Она состоит в том, что если осуществляется переход из k-го состояния в нулевое $(k = 1, 2, \ldots, c-1)$, то вероятность такого события равна $\Delta \sum_{l=k}^{c} a_{-l}(t) + o(\Delta)$, и так параметры $a_{-l}(t)$ нужно суммировать. Однако присоединенная вторая компонента зависит лишь от величины отрицательного скачка, так что в таком случае вместо $\sum_{l=k}^{c} a_{-l}(t) \varepsilon_{-l}^{(z)}(t)$, данной в (7), мы должны положить $\varepsilon_{-k}^{(z)}(t) \sum_{l=k}^{c} a_{-l}(t)$. Такая ситуация имеет место лишь в случае перехода в нулевое состояние, во всех остальных случаях мы должны пользоваться выражением, определенным по (7).

3. Выведем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\vec{\xi}_t = \{\xi_t, \varepsilon_t\}$

$$P_{kr}(t, s, A) = P\{\xi_s = r,\ \varepsilon_s - \varepsilon_t \in A | \xi_t = k\},$$

где A — множество возможных значений присоединенной компоненты.

Положим

$$P_{kr}^{(z)}(t, s) = \int_R e^{i(z, x)} P_{kr}(t, s, dx)$$

и займемся нахождением $P_{kr}^{(z)}(t, s)$. Пусть $\Delta\to 0$. Тогда имеем

$$P_{k0}^{(z)}(t, s+\Delta) = P_{k0}^{(z)}(t, s)\left\{1+\Delta\left[\sum_{j=0}^{c} a_{-j}(s)+\varepsilon_0^{(z)}(s)\right]+o(\Delta)\right\}+ \tag{8}$$

$$+\Delta\sum_{l=1}^{c} P_{kl}^{(z)}(t, s)\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)\sum_{j=l}^{c} a_{-j}(s)+o(\Delta),$$

$$P_{kr}^{(z)}(t, s+\Delta) = P_{kr}^{(z)}(t, s)\{1+\Delta[a_0(s)+\varepsilon_0^{(z)}(s)]+o(\Delta)\}+ \tag{9}$$

$$+\Delta\sum_{\substack{l=0\\ l\neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s)+o(\Delta), \quad r\geqq 1.$$

Для обоснования, например, (8) достаточно его записать в форме

$$P_{k0}(t, s+\Delta, dy) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} P_{k0}(t, s, dx)\left\{1+\Delta\sum_{j=0}^{c} a_{-j}(s)+o(\Delta)\right\}P\{\varepsilon_{s+\Delta}-\varepsilon_s+x\in dy|\xi_{s+\Delta}-\xi_s=\text{const}\}+$$

$$+\Delta\sum_{l=1}^{c}\int_{\mathbf{R}} P_{kl}(t, s, dx)\sum_{j=l}^{c} a_{-j}(s)P\{\varepsilon_{s+\Delta}-\varepsilon_s+x\in dy|\xi_{s+\Delta}-\xi_s=-l\}+o(\Delta)$$

и перейти к преобразованию Фурье в обеих частях равенства по y.

На основании (8) и (9) получаем

$$\frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{k0}^{(z)}(t, s)\left[\varepsilon_0^{(z)}(s)+\sum_{j=0}^{c} a_{-j}(s)\right]+\sum_{l=1}^{c} P_{kl}^{(z)}(t, s)\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)\sum_{j=l}^{c} a_{-j}(s), \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_{kr}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{kr}^{(z)}(t, s)[a_0(s)+\varepsilon_0^{(z)}(s)]+\sum_{\substack{l=0\\ l\neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s), \quad r\geqq 1. \tag{11}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части последнего уравнения:

$$\sum_{\substack{l=0\\ l\neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) = \tag{12}$$

$$= \sum_{l=0}^{r-1} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s)+\sum_{j=1}^{c} P_{k,r+j}^{(z)}(t, s)a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) =$$

$$= \sum_{j=1}^{c} P_{k,r+j}^{(z)}(t, s)a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)+P_{k0}^{(z)}(t, s)a_r(s)\varepsilon_r^{(z)}(s)+$$

$$+\sum_{l=1}^{r} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s)-P_{kr}^{(z)}(t, s)[a_0(s)+\varepsilon_0^{(z)}(s)].$$

Здесь для простоты положили $a_0(s)+\varepsilon_0^{(z)}(s)=a_0(s)\varepsilon_0^{(z)}(s)$. Выведем уравнение для производящей функции

$$P_k^{(z)}(t, s, \Theta) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r. \tag{13}$$

Умножив (11) на Θ^r, суммируя по r и используя (12), получаем

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Theta^r \sum_{j=1}^{c} P_{k,r+j}^{(z)}(t, s)a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) = \tag{14}$$

$$= \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{-j} \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r - \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^{j} P_{kl}^{(z)}(t, s)\Theta^{l-j};$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Theta^r \sum_{l=1}^{r} P_{kl}^{(z)}(t, s)a_{r-l}(s)\varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) = \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r \sum_{l=0}^{\infty} a_l(s)\varepsilon_l^{(z)}(s)\Theta^l.$$

На основании (11) с использованием (14) имеем

$$\frac{\partial P_k^{(z)}(t, s, \Theta)}{\partial s} - \frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=1}^{\infty} a_r(s)\varepsilon_r^{(z)}(s) + \tag{15}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r \sum_{l=0}^{\infty} a_l(s)\varepsilon_l^{(z)}(s)\Theta^l + \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{-j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^{j} P_{kl}^{(z)}(t, s)\Theta^{l-j} =$$

$$= P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=1}^{\infty} a_r(s)\varepsilon_r^{(z)}(s)\Theta^r + a^{(z)}(s, \Theta) \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s)\Theta^r -$$

$$- \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^{j} P_{kl}^{(z)}(t, s)\Theta^{l-j}.$$

Из (15)

$$\frac{\partial P_k^{(z)}(t, s, \Theta)}{\partial s} - \frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_k^{(z)}(t, s, \Theta)a^{(z)}(s, \Theta) - \tag{16}$$

$$- P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=0}^{c} a_{-r}(s)\varepsilon_{-r}^{(z)}(s)\Theta^{-r} - \sum_{j=1}^{c} a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^{j} P_{kl}^{(z)}(t, s)\Theta^{l-j}.$$

Сложив (10) и (16), и используя равенства

$$P_{k0}(t,s)\left[\varepsilon_0^{(z)}(s)+\sum_{j=0}^{c}a_{-j}(s)\right]-P_{k0}^{(z)}(t,s)\sum_{r=0}^{c}a_{-r}(s)\varepsilon_{-r}^{(z)}(s)\Theta^{-r}=$$

$$=P_{k0}^{(z)}(t,s)\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(s)[1-\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{-j}],$$

$$\sum_{l=1}^{c}P_{kl}^{(z)}(t,s)\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)\sum_{j=l}^{c}a_{-j}(s)-\sum_{l=1}^{c}P_{kl}^{(z)}(t,s)\sum_{j=l}^{c}a_{-j}(s)\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{l-j}=$$

$$=\sum_{l=1}^{c}P_{kl}^{(z)}(t,s)\sum_{j=l}^{c}a_{-j}(s)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{l-j}\}=$$

$$=\sum_{l=1}^{c-1}P_{kl}^{(z)}(t,s)\sum_{j=l+1}^{c}a_{-j}(s)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{l-j}\},$$

окончательно получаем

$$(17)\quad \frac{\partial P_k^{(z)}(t,s,\Theta)}{\partial s}=P_k^{(z)}(t,s,\Theta)a^{(j)}(s,\Theta)+P_{k0}^{(z)}(t,s)\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(s)[1-\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{-j}]+$$
$$+\sum_{l=1}^{c-1}P_{kl}^{(z)}(t,s)\sum_{j=l+1}^{c}a_{-j}(s)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(s)\Theta^{l-j}\}.$$

(17) представляет собой линейное дифференциальное уравнение по отношению к $P_k^{(z)}(t,s,\Theta)$, и так

$$(18)\qquad P_k^{(z)}(t,s,\Theta)=\Theta^k\exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u,\Theta)\,du\right\}+$$
$$+\int_t^s P_{k0}^{(z)}(t,u)\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(u)\big(1-\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)\Theta^{-j}\big)\exp\left\{\int_u^s a^{(z)}(r,\Theta)\,dr\right\}du+$$
$$+\sum_{l=1}^{c-1}\int_t^s P_{kl}^{(z)}(t,u)\sum_{j=l+1}^{c}a_{-j}(u)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(u)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)\Theta^{l-j}\}\exp\left\{\int_u^s a^{(z)}(r,\Theta)\,dr\right\}du.$$

Полагая

$$\exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u,\Theta)\,du\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varrho_m^{(z)}(t,s)\Theta^m,$$

то, приравнивая в (18) коэффициенты при Θ^r, получаем

$$P_{kr}^{(z)}(t,s)=\varrho_{r-k}^{(z)}(t,s)+\int_t^s P_{k0}^{(z)}(t,u)\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(u)\{\varrho_r^{(z)}(u,s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)\varrho_{r+j}^{(z)}(u,s)\}\,du+$$
$$+\sum_{l=1}^{c-1}\int_t^s P_{kl}^{(z)}(t,u)\sum_{j=l+1}^{c}a_{-j}(u)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(u)\varrho_r^{(z)}(u,s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)\varrho_{r-l+j}^{(z)}(u,s)\}\,du.$$

Таким образом доказана

Теорема. *Если* $\vec{\xi}_t^*=\{\xi_t^*,\varepsilon_t\}$ *является процессом с независимыми приращениями с присоединенной однородной второй компонентой и характеристической* *функцией*

$$M\Theta^{\xi_s^*-\xi_t^*}e^{i(z,\varepsilon_s-\varepsilon_t)}=\exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u,\Theta)\,du\right\},$$

где

$$a^{(z)}(t,\Theta)=a_0(t)+\varepsilon_0^{(z)}(t)+\sum_{\substack{r=-c\\ r\neq 0}}^{\infty}a_r(t)\varepsilon_r^{(z)}(t)\Theta^r,$$

и $\varrho_m^{(z)}(t,s)$ *является коэффициентом при* Θ^m *в разложении* $\exp\left\{\int_t^s a^{(z)}(u,\Theta)\,du\right\}$, *далее*

$$\pi_{0r}^{(z)}(t,s)=\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(t)\{\varrho_r^{(z)}(t,s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(t)\,\varrho_{r+j}^{(z)}(t,s)\},$$

$$\pi_{lr}^{(z)}(t,s)=\sum_{j=l+1}^{c}a_{-j}(t)\{\varepsilon_{-l}^{(z)}(t)\,\varrho_r^{(z)}(t,s)-\varepsilon_{-j}^{(z)}(t)\,\varrho_{r-l+j}^{(z)}(t,s)\},$$

$$(1\leqq l<c,\ r\geqq 0),$$

то для процесса $\vec{\xi}_t=\{\xi_t,\varepsilon_t\}$

$$P_{kr}^{(z)}(t,s)=\varrho_{r-k}^{(z)}(t,s)+\sum_{l=0}^{c-1}\int_t^s P_{kl}^{(z)}(t,u)\pi_{lr}^{(z)}(u,s)\,du. \tag{20}$$

Из (20) следует, что при каждом фиксированном k все $P_{kr}^{(z)}(t,s)$ выражаются через координаты вектора

$$\vec{P}_k^{(z)}(t,s)=\{P_{k0}^{(z)}(t,s),\ \dots,\ P_{k,c-1}^{(z)}(t,s)\}.$$

Положим

$$\vec{\varrho}_k^{(z)}(t,s)=\{\varrho_{-k}^{(z)}(t,s),\ \dots,\ \varrho_{c-1-k}^{(z)}(t,s)\},$$

$$\Pi(t,s)=\|\pi_{lr}^{(z)}(t,s),\quad 0\leqq l,\ r<c\|.$$

Согласно (20)

$$\vec{P}_k^{(z)}(t,s)=\vec{\varrho}_k^{(z)}(t,s)+\int_t^s\vec{P}_k^{(z)}(t,u)\Pi(u,s)\,du$$

и, стало быть,

$$\vec{P}_k^{(z)}(t,s)=\int_t^s\vec{\varrho}_k^{(z)}(t,u)R(\Pi,u,s)\,du, \tag{21}$$

где $R(\Pi,t,s)$ — квазирезольвента матрицы $\Pi(t,s)$. Положим

$$\|\Pi(t,s)\|=\max_{t\leqq u\leqq r\leqq s}\max_{l,r}|\pi_{lr}^{(z)}(u,r)|,$$

тогда выполняется соотношение

$$\|\Pi(t,s)\|\leqq a_-(t,s)=\max_{[t,s]}\sum_{j=1}^{c}a_{-j}(u),$$

которое является следствием неравенства

$$|\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)|\leqq 1,\quad 1\leqq j\leqq c,\quad u\in[t,s].$$

Поэтому каждая координата вектора

$$\int_t^s \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s)\, du$$

(m^0 означает, что речь идет об m-ом итерированном ядре) не превосходит по модулю

$$\frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^m}{m!},$$

откуда следует, что если

$$\vec{\varrho}_{kn}^{(z)}(t, s) = \sum_{m \geqq n} \int_t^s \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s)\, du,$$

то каждая координата вектора $\vec{\varrho}_{kn}^{(z)}(t, s)$ не превосходит по модулю

$$\sum_{m \geqq n} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^m}{m!} < \exp\{c(s-t)a_-(t, s)\} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^n}{n!} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, приведенная в п. 3 [4] теорема для рассмотренной системы формулируется следующим образом: Вектор $\vec{P}_k^{(z)}(t, s) = \{P_{kj}^{(z)}(t, s), 0 \leqq j < c\}$, координаты которого фигурируют в правой части (20), равен (21). Если $n > 1$, то

$$\vec{P}_k^{(z)}(t, s) = \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, s) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_t^s \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s)\, du + \vec{\varrho}_{kn}^{(z)}(t, s),$$

причем если

$$\vec{\varrho}_{kn}^{(z)}(t, s) = \{\varrho_{knj}^{(z)}(t, s),\ 0 \leqq j < c\},$$

то

$$\max_{0 \leqq j < c} |\varrho_{knj}^{(z)}(t, s)| < \exp\{c(s-t)a_-(t, s)\} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^n}{n!}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность И. И. Ежову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

[1] И. И. Ежов, Исследования по теории случайных процессов с дискретной компонентой, *докторская диссертация, Киев,* 1967.

[2] И. И. Ежов, А. В. Скороход, Марковские процессы, однородные по второй компоненте, ч. I., II., Теория вероятностей и ее применения, 1969, №1, стр. 3—14, №4, стр 679—692.

[3] И. Д. Олийнык: Исследование одного класса стохастических систем с доходами, кандидатская диссертация, *Киевский госуниверситет, Киев,* 1975.

[4] Танров, Махир Фаррух оглы: Исследование систем массового обслуживания, локальные характеристики которых зависят от времени, *кандидатская диссертация, Киевский госуниверситет, Киев,* 1978.

Институт математики АН УССР
Отдел теории вероятностей и математической статистики
252601 Киев ГСП, ул. Репина 3.

(Поступило 11. X. 1976. в исправленном виде получено 28. X. 1980.)