Sur les voisinages invariants des orbites d'actions orthogonales

Par J. SZENTHE (Budapest)

En étudiant les actions de groupes de Lie compacts on se sert de tels voisinages invariants des orbits où ces actions sont relativement simples. L'existence de tels voisinages avait été établie premièrement pour les actions différentiables par J. L. KOSZUL [5] et après pour les actions continues par un résultat conjugué de D. MONTGOMERY et C. T. YANG [9] et conjointement par G. D. MOSTOW [10]. Considérant le rôle important de tels voisinages invariants, la tâche s'impose naturellement d'en chercher parmi eux les plus grands possibles. Ci-dessous, on étudiera de tels voisinages invariants maximums en cas d'actions orthogonales; or, d'abord on discutera la question de leur unicité et après on obtiendra quelques résultats les décrivant.

1. Certains sortes de voisinages invariants des orbites

Tout d'abord on résume les différentes sortes de voisinages invariants des orbites employés ordinairement en étudiant les actions différentiables de groupes de Lie compacts.

Or, étant donnée une action indéfiniment différentiable $\alpha\colon G\times M\to M$ d'un groupe de Lie G sur une variété différentielle M de la classe C^∞, soit G_x le sous-groupe d'isotropie d'un point $x\in M$. Lorsqu'il existe une sous-variété $S_x\subset M$ de la classe C^∞ contenant x et transformée par G_x en elle-même, on obtient par la construction usitée le fibré

$$\varphi_x\colon G\times_{G_x}S_x\to G/G_x$$

de la classe C^∞ qui est associé au fibré principal $\pi_x\colon G\to G/G_x$ et à l'action de G_x sur S_x; en plus, on obtient aussi une action indéfinement différentiable

$$\gamma_x\colon G\times(G\times_{G_x}S_x)\to G\times_{G_x}S_x$$

telle que l'application φ_x est équvariante pour γ_x et pour l'action canonique de G sur G/G_x. Ceci étant, s'il existe un plongement indéfiniment différentiable

$$\beta_x\colon G\times_{G_x}S_x\to M$$

qui est équivariant pour les actions γ_x et α et qui a pour son image un voisinage ouvert V de l'orbite $G(x)$, on appelle S_x une *tranche* de α en x et V un *voisinage régulier* de l'orbite $G(x)$ ([1], pp 82—84).

L'existence de voisinages réguliers des orbites avait été établie la première fois par Koszul pour les actions différentiables de groupes de Lie compacts en employant une construction géométrique [6]. En effet, soit donnée une action indéfiniment différentiable

$$\alpha\colon G\times M \to M$$

d'un groupe de Lie conpact G sur une variété différentielle M de la classe C^∞. D'abord, on fixe une métrique riemannienne invariante pour l'action α sur M. Par suite, on obtient en chaque point z de l'orbite $G(x)$ la décomposition

$$T_z M = N_z \oplus T_z G(x)$$

en somme directe de sous-espaces vectoriels où N_z est le complément orthogonal de l'espace tangent $T_z G(x)$. On montre que l'union

$$N(x) = \cup \{N_z | z \in G(x)\}$$

de ces sous-espaces admet canoniquement une structure du fibré vectoriel de la classe C^∞ sur l'espace de base $G(x)$, qui est appelé le fibré normal de l'orbite $G(x)$. En plus, l'action induit une action indéfiniment différentiable

$$\nu\colon G\times N(x) \to N(x)$$

selon la définition suivante: Soit $\alpha_g\colon M\to M$ pour $g\in G$ la transformation définie par $\alpha_g(z)=\alpha(g, z)$ pour $z\in M$; alors, on pose

$$\nu(g, v) = T_z \alpha_g v$$

pour $g\in G$ et $v\in N_z$ où $z\in G(x)$. La métrique riemannienne invariante fixée de M induit une application exponentielle exp: $TM\to M$. Or, soit

$$\varepsilon\colon N(x) \to M$$

la restriction de l'application exponentielle au fibré normal $N(x)$. On montre que l'application ε est équivariante pour les actions α et ν. De plus, on établit l'existence d'un voisinage ouvert V' de la section nulle dans le fibré vectoriel $N(x)$ qui est invariant pour l'action ν et tel que la restriction de ε à V' est un diffeomorphisme. Donc, $V=\varepsilon(V')$ est un voisinage ouvert de $G(x)$ invariant pour α, qui est appelé un *voisinage normal* de l'orbite $G(x)$ ([1] pp 303—308). Concernant la relation des voisinages considérés on a démontré que

$$S_x = \varepsilon(V' \cap N_x)$$

est une tranche de l'action α en x et que le voisinage normal V est un voisinage régulier de l'orbite $G(x)$ ([1] pp 308—309).

On obtient un voisinage normal particulier en choisissant un tel voisinage V' dans la construction esquissée ci-dessus que $V'\cap N_x$ soit une sphère solide dans le sous-espace N_x pour la métrique fixée. Le voisinage normal ainsi obtenu est appelé un *voisinage tubulaire* de l'orbite $G(x)$. La construction de voisinages normaux se base sur une métrique riemannienne auxiliaire. Au regard de cette imperfection topologique on a démontré que deux voisinages tubulaires de la même orbite issus de métriques riemanniennes invariantes éventuellement différentes sont isotopes s'ils sont sufficament petits ([1] pp 309—312).

Étant donné une action différentiable α: $G\times M\to M$, l'ensemble de voisinages réguliers d'une orbite fixée est naturellement ordonnée par l'inclusion. Donc, si G

est compact l'ensemble considéré n'est pas vide et par conséquent il possède des éléments maximums selon le lemme de Kuratowski—Zorn. Un tel élément maximum sera appelé un *voisinage régulier maximum* de l'orbite considerée. Ci-dessous on étudiéra les voisinages réguliers maximums des orbites en cas d'actions orthogonales.

2. L'unicité de voisinages réguliers maximums

La définition de voisinages réguliers maximums soulève immédiatement la question de leur unicité. On traitera cette question dans le cas de voisinages réguliers maximums d'orbites principales produites par actions orthogonales.

Étant donné une action orthogonale $\alpha\colon G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ c'est-à-dire une action différentiable telle que toutes les transformations α_g, $g\in G$ sont orthogonales, on étudiera d'abord les points critiques de l'application exponentielle restreinte

$$\varepsilon\colon N(x)\to\mathbf{R}^n$$

du fibré normal d'une orbite $G(x)$ définie plus haut. Puisque $G(x)\subset\mathbf{R}^n$ est une sous-variété de la classe C^∞ il est convenable d'employer les résultats fondamentaux concernant les points critiques de l'application exponentielle du fibré normal d'une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. Or, soit L une sous-variété de la classe C^∞ et de dimension k de l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^n$ où $1\leqq k\leqq n-1$. Pour $z\in L$ soit N_z le complément orthogonal de l'espace tangent T_zL dans $T_z\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^n$. On montre que

$$N=\cup\{N_z|z\in L\}$$

est un fibré de la classe C^∞, qu'on appelle le fibré normal de L et considère comme une sous-variété de la classe C^∞ et de dimension n du fibré tangent $T\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$. L'application exponentielle canonique

$$\exp\colon T\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$$

restreinte à N est une application $\varepsilon\colon N\to\mathbf{R}^n$ qui est donnée par

$$\varepsilon(w)=z+w \quad \text{pour} \quad w\in N_z\subset N.$$

Si w est un point critique de l'application ε et le noyau de l'application tangente linéaire $T_w\varepsilon$ est de dimension μ, on dit que $\varepsilon(w)$ est un point focal de la multiplicité μ de la sous-variété L. On sait que les points focaux de la sous-variété L sont complètement déterminés par son second tenseur fondamental. Or, si $z\in L$, le second tenseur fondamental de L en z est une application bilinéaire symétrique

$$\omega_z\colon T_zL\times T_zL\to N_z$$

et si $s\in N_z$ est un vecteur unitaire, le produit scalaire de $\mathbf{R}^n$ definit une forme bilinéaire symétrique par

$$(u,v)\mapsto\langle s,\omega_z(u,v)\rangle,\quad u,v\in T_zL$$

sur l'espace tangent, qui est appelée la seconde forme fondamentale de L en z définie par s. Alors, les points focaux de la sous-variété L sont déterminés par son second tenseur fondamental selon la proposition suivante: *Soit donnée une sous-variété*

$L \subset \mathbf{R}^n$ de la classe C^∞ et de dimension k où $1 \leqq k \leqq n-1$ et soit $w \in N_z \subset N$ un point critique de l'application.

$$\varepsilon \colon N \to \mathbf{R}^n.$$

Alors, on a $\lambda w = s$ où $s \in N_z$ est un vecteur unitaire et λ est une valeur propre de la seconde forme fondamentale de L en z définie par s ([8] pp 32—38). Donc, étant donné une orbit $G(x)$ d'une action orthogonale, les points critiques de l'application

$$\varepsilon \colon N(x) \to \mathbf{R}^n$$

sont complètement déterminés par le second tenseur fondamental de l'orbite donnée. En plus, si w est un point critique de l'application ε, le noyau de l'application tangente linéaire $T_w\varepsilon$ a une position assez déterminée dans $T_w N(x)$ selon le lemme suivant

Lemme 1. *Étant donné une action orthogonale $\alpha \colon G \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ d'un groupe de Lie compact, soit $x \in \mathbf{R}^n$ un tel point que l'orbit $G(x)$ est principale et $w \in N_x$ le premier point critique de l'application*

$$\varepsilon \colon N(x) \to \mathbf{R}^n$$

sur le rayon ξw, $\xi \geqq 0$. Alors, le noyau de l'application tangente linéaire $T_w\varepsilon$ est un sous-espace de l'espace tangent $T_w G(w)$ de l'orbite $G(w)$ de w par l'action ν induite de G sur $N(x)$.

Démonstration. On considère le fibré normal $N(x)$ de $G(x)$ comme une sous-variété du fibré tangent $T\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et par conséquent l'application ε est donnée par

$$\varepsilon(w) = z + w \quad \text{pour} \quad w \in N_z$$

où $z \in G(x)$. En plus, l'action induite ν de G sur $N(x)$ est donnée par

$$\nu(g, w) = \alpha(g, w) \quad \text{pour} \quad g \in G \quad \text{et} \quad w \in N_z \subset T_z\mathbf{R}^n$$

aprés avoir identifié canoniquement $T_z\mathbf{R}^n$ avec $\mathbf{R}^n$. Il en résulte que

$$\varepsilon \circ \nu(g, w) = \varepsilon \circ \alpha(g, w) = \alpha(g, z) + \alpha(g, w) = \alpha(g, z+w) = \alpha\big(g, \varepsilon(w)\big),$$

c'est-à-dire l'application ε est équivariante pour les actions ν et α.

On considère la décomposition $T_x\mathbf{R}^n = N_x \oplus T_x G(x)$ en somme directe de sous-espaces orthogonaux. La définition de ε entraîne que'elle applique le sous-espace normal $N_x \subset T_x\mathbf{R}^n$ sur la sous-variété linéaire $x + N_x \subset \mathbf{R}^n$ par une bijection affine. Donc, $T_w\varepsilon$ applique l'espace tangent $T_w(N_x)$ sur l'espace tangent $T_{x+w}(x+N_x)$ par isomorphisme. Or, on considère la décomposition

$$T_w N(x) = N_w \oplus T_w G(w)$$

en somme directe de sous-espaces orthogonaux et puisque l'orbite $G(x)$ est principale on a $N_w = T_w(N_x)$. Donc, $T_w\varepsilon$ applique N_w sur $T_{x+w}(x+N_x)$ par isomorphisme. On voit facilement en vertu de continuité que l'espace tangent $T_{x+w}G(x+w)$ est orthogonal à l'espace tangent $T_{x+w}(x+N_x)$. Par conséquent, on a les décompositions

$$T_{x+w}\mathbf{R}^n = T_{x+w}(x+N_x) \oplus C_{x+w} \oplus T_{x+w}G(x+w)$$
$$T_{x+w}\mathbf{R}^n = N_{x+w} \oplus T_{x+w}G(x+w)$$

en sommes directes de sous-espaces orthogonaux. Alors, on obtient que

$$N_{x+w} = T_{x+w}(x+N_x) \oplus C_{x+w}.$$

Puisque l'application ε est équivariante, son application tangente linéaire $T_w\varepsilon$ applique l'espace tangent $T_wG(w)$ sur l'espace tangent $T_{x+w}G(x+w)$. Il en résulte que le noyau de l'application $T_w\varepsilon$ est un sous-espace de l'espace tangent $T_wG(w)$.

Le lemme suivant présente une condition suffisante pour qu'une tranche d'une action orthogonale soit uniquement définie.

Lemme 2. *Soit α: $G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ une action orthogonale et $x\in\mathbf{R}^n$ un point tel que l'orbite $G(x)$ est principale et que le sous-groupe d'isotropie G_x est de rang maximum. De plus, soit*

$$T_x\mathbf{R}^n = N_x \oplus T_x G(x)$$

la décomposition en somme directe de sous-espaces orthogonaux et S_x une tranche de l'action α en x. Alors, on a $S_x\subset x+N_x$.

DÉMONSTRATION. En effet, pour $z\in S_x$ on a $z=x+\xi(z)+\eta(z)$ où $\xi(z)\in N_x$ et $\eta(z)\in T_xG(x)$ sont uniquement définis. De plus, si $g\in G_x$ on a

$$\xi(\alpha_g(z)) = T_x\alpha_g\xi(z) \quad \text{et} \quad \eta(\alpha_g(z)) = T_x\alpha_g\eta(z).$$

Mais, l'orbite $G(x)$ étant principale on a $\alpha_g(z)=z$ pour $z\in S_x$ et $g\in G_x$. Afin de démontrer par contradiction soit supposé que

$$S_x \not\subset x+N_x.$$

Or, dans ce cas il y a un vecteur $u\in T_xG(x)$ différent de zéro et tel que $u=T_x\alpha_g u$ est valable pour tout $g\in G_x$.

Soit ι: $G(x)\to G/G_x$ l'isomorphisme équivariant et $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{g}_x$ une décomposition réductive de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G où $\mathfrak{g}_x\subset\mathfrak{g}$ est la sous-algèbre correspondante à G_x. En identifiant $\mathfrak{m}$ à l'espace tangent de G/G_x en G_x on obtient un isomorphisme

$$T_x\iota\colon T_x G(x) \to \mathfrak{m}$$

qui est équivariant pour l'action de G_x par $T_x\alpha_g$ sur $T_xG(x)$ et par T_e ad (g) sur $\mathfrak{m}$. Donc, il y a un $X\in\mathfrak{m}-\{0\}$ tel que $X=T_e\,\mathrm{ad}\,(g)X$ pour tout $g\in G_x$. Mais, on sait que dans ce cas $X\in\mathfrak{m}\cap\mathfrak{c}$ où $\mathfrak{c}$ est le centralisateur de $\mathfrak{g}_x$ dans $\mathfrak{g}$ ([6] pp 66—71.). Alors, G_x ne peut pas être du rang maximum dans G. Or, on a obtenu une contradiction qui prouve que $S_x\subset x+N_x$ est valable.

Le corollaire suivant comprend une conséquence de ces deux lemmes précédents qui sera employée dans ce qui suit.

Corollaire. *Soit α: $G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ une action orthogonale d'un group de Lie compact et $x\in\mathbf{R}^n$ un point tel que l'orbite $G(x)$ est principale et que le sous-groupe d'isotropie G_x est de rang maximum. Si $w\in N_x$ est un point critique de l'application*

$$\varepsilon\colon N(x) \to \mathbf{R}^n,$$

alors, le point $\varepsilon(w)$ ne peut pas être contenu dans un voisinage régulier de l'orbite $G(x)$.

Démonstration. En vertu du Lemme 1 le noyau de l'application $T_w\varepsilon$ est un sous-espace de l'espace tangent $T_wG(w)$. Par ailleurs, chaque élément $u\in T_wG(w)$ peut être obtenu comme vecteur tangent de la trajectoire d'un sous-groupe à 1 paramètre

$$\lambda\colon \mathbf{R}\to G$$

du groupe de Lie G, c'est-à-dire on a l'expression suivante:

$$u=\left[\frac{d}{d\tau}\,\nu\big(\lambda(\tau),w\big)\right]_{\tau=0}.$$

Donc, en supposant que u est un élément du noyau de $T_w\varepsilon$ et en considérant que l'application ε est équivariante, on obtient que

$$\begin{aligned}T_w\varepsilon u &= T_w\varepsilon\left[\frac{d}{d\tau}\,\nu\big(\lambda(\tau),w\big)\right]_{\tau=0}=\left[\frac{d}{d\tau}\,\varepsilon\circ\nu\big(\lambda(\tau),w\big)\right]_{\tau=0}=\\ &=\left[\frac{d}{d\tau}\,\alpha\big(\lambda(\tau),\varepsilon(w)\big)\right]_{\tau=0}=\left[\frac{d}{d\tau}\,\alpha\big(\lambda(\tau),x+w\big)\right]_{\tau=0}=\\ &=\left[\frac{d}{d\tau}\,\alpha\big(\lambda(\tau),x\big)\right]_{\tau=0}+\left[\frac{d}{d\tau}\,\nu\big(\lambda(\tau),w\big)\right]_{\tau=0}=0.\end{aligned}$$

Alors, en supposant que $T_w\varepsilon u=0$, il en résulte que la condition suivante est safisfaite:

$$\left[\frac{d}{d\tau}\,\alpha\big(\lambda(\tau),x\big)\right]_{\tau=0}=0.$$

Par conséquent $G_{x+w}\subset G_x$ ne peut pas être valable. Mais, si $\varepsilon(w)=x+w$ était contenu dans un voisinage régulier de $G(x)$ il serait élément de la tranche correspondante de α en x selon le Lemme 2 et par conséquent on aurait $G_{x+w}\subset G_x$. Alors, le point $\varepsilon(w)$ ne peut pas être contenu dans un voisinage régulier de l'orbite $G(x)$.

Le théorème suivant qui découle directement d'-observations précédentes présente l'unicité de voisinages réguliers maximums des orbites principales à quelques conditions.

Theoreme 1. *Soit* $\alpha\colon G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *une action orthogonale d'un groupe de Lie compact connexe et* $x\in\mathbf{R}^n$ *un point tel que l'orbite* $G(x)$ *est principale et que le sous-groupe d'isotropie* G_x *est de rang maximum. Soit* V *voisinage normal de* $G(x)$ *tel que tout point* $z\in\partial V$ *est l'image d'un point critique de* ε. *Alors,* V *est le seul voisinage régulier maximum de* $G(x)$.

3. Une description de voisinages réguliers maximums

Dans ce qui suit on donnera une description de voisinages réguliers maximums de certaines orbites en cas d'actions orthogonales. En effet, on étudiera les bords de voisinages réguliers maximums et obtiendra une formule qui les décrit.

Lemme 3. *Soit* $\alpha\colon G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *une action orthogonale d'un groupe de Lie compact* G *et soit* $\omega_x\colon T_xG(x)\times T_xG(x)\to N_x$ *le second tenseur fondamental de l'orbite*

$G(x)$ au point x. Alors, on a

$$\omega_x(T_x\alpha_g u, T_x\alpha_g v) = T_x\alpha_g\, \omega_x(u, v)$$

pour tous les vecteurs tangents $u, v\in T_x G(x)$ et pour tout élément g du sous-groupe d'isotropie G_x.

Démonstration. L'assertion du lemme est une conséquence simple de la définition du second tenseur fondamental. En effet, étant donnés les champs de vecteurs U, V tangents à l'orbite $G(x)$ et définis dans un voisinage de x on considère la dérivée convariante $\nabla'_U V$ par la connexion canonique de $\mathbf{R}^n$. Or, la décomposition

$$T_x\mathbf{R}^n = N_x \oplus T_x G(x)$$

en somme directe de sous-espaces orthogonaux donne la décomposition

$$(\nabla'_U V)_x = \omega_x(U, V) + (\nabla_U V)_x$$

où le composant $\omega_x(U, V)$ est démontré d'être obtenu par un tenseur ω_x, nommé le second tenseur fondamental et le composant $(\nabla_U V)_x$ est demontré d'être la dérivée covariante pour la connexion induite de $G(x)$ ([4] II pp 10—21). Soit $g\in G_x$, alors on a évidemment les décompositions suivantes

$$T_x\alpha_g(\nabla'_U V) = T_x\alpha_g\omega_x(U, V) + T_x\alpha_g(\nabla_U V)_x,$$

$$(\nabla'_{T_x\alpha_g U} T_x\alpha_g V)_x = \omega_x(T_x\alpha_g U, T_x\alpha_g V) + (\nabla_{T_x\alpha_g U} T_x\alpha_g V)_x.$$

Mais, l'action α étant orthogonale, on a évidemment $T_x\alpha_g(\nabla'_U V) = (\nabla'_{T_x\alpha_g U} T_x\alpha_g V)_x$ et par conséquent les deux décompositions sont identiques, d'où découle l'assertion du lemme.

Pour déduire un corollaire du lemme précédent on considère le strate $S(x)$ d'un point $x\in\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire l'union des orbites ayant le même type que $G(x)$. On sait que $S(x)\subset\mathbf{R}^n$ est une sous-variété de la classe C^∞ et que étant donné un vecteur tangent $v\in N_x$, la condition $v = T_x\alpha_g v$ est satisfaite pour tout $g\in G_x$ si et seulement si $v\in T_x S(x)$ est valable [7].

Corollaire. *Soit α: $G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ une action orthogonale d'un groupe de Lie compact G et soit ω_x: $T_x G(x)\times T_x G(x)\to N_x$ le second tenseur fondamental de l'orbite $G(x)$ en x. Alors, étant donné un vecteur unitaire $s\in N_x$ tangent au strate de x, la seconde forme fondamentale*

$$\langle s, \omega_x(u, v)\rangle, \quad u, v\in T_x G(x)$$

définie par s est invariante pour toutes les transformations $T_x\alpha_g$, $g\in G_x$.

Démonstration. En conséquence du lemme précédent et en vertu de l'orthogonalité de l'action α on a évidemment

$$\langle s, \omega_x(T_x\alpha_g u, T_x\alpha_g v)\rangle = \langle T_x\alpha_g s, T_x\alpha_g\, \omega_x(u, v)\rangle = \langle s, \omega_x(u, v)\rangle$$

pour tous les vecteurs $u, v\in T_x G(x)$ et pour tous les élements g de G_x.

Ci-après on donne une construction qui est essentielle pour les résultats subséquents. Or, étant donnée une action orthogonale α: $G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ d'un groupe de Lie compact G, on considère une orbite $G(x)$ et son second tenseur fondamental

$$\omega_x \colon T_x G(x) \times T_x G(x) \to N_x$$

en x; alors pour un vecteur unitaire $s \in N_x$ tangent au strate $S(x)$ la seconde forme fondamentale

$$\langle s, \omega_x(u, v)\rangle, \quad u, v \in T_x G(x)$$

définie par s est une forme bilinéaire symétrique invariante pour l'action de G_x sur $T_x G(x)$. Alors, soient $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_p(s)$ les valeur propres différentes et $A_1, \ldots, A_p$ les sous-espaces propres correspondants de cette forme bilinéaire symétrique. Donc, on a une décomposition

$$T_x G(x) = \oplus \{A_i | \, i = 1, \ldots, p\}$$

en somme directe de sous-espaces orthogonaux. De plus, le corollaire precédent entraîne qu'on a $T_x \alpha_g A_i = A_i$ pour $g \in G_x$ où $i = 1, \ldots, p$; c'est-à-dire les sous-espaces propres A_i sont invariants pour l'action $T_x \alpha_g$, $g \in G_x$. Puisque G_x est compact, les sous-espaces invariants A_i sont sommes directes de leurs sous-espaces irréductibles pour l'action considérée de G_x. Par conséquent, on a une décomposition

$$T_x G(x) = \oplus \{B_j | \, j = 1, \ldots, r\}$$

en somme directe de sous-espaces orthogonaux, qui sont sous-espaces irréductibles des sous-espaces A_i, $i = 1, \ldots, p$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée de $T_x G(x)$ compatible avec cette dernière décomposition et soit $\mu_i(s) = \lambda_j(s)$ la valeur propre correspondante au vecteur propre $e_i \in B_i \subset A_j$ pour $i = 1, \ldots, k$. Alors, étant donnés les vecteurs

$$u = \sum_{i=1}^{k} u^i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{k} v^i e_i$$

dans l'espace tangent $T_x G(x)$ consideré, on obtient évidemment

$$\langle s, \omega_x(u, v)\rangle = \sum_{i=1}^{k} \mu_i(s) u^i v^i$$

pour l'expression de la seconde forme fondamentale dans la base choisie.

D'ici on se bornera au cas où l'orbite $G(x)$ est principale et par conséquent l'inclusion $N_x \subset T_x S(x)$ sera valable dans ce qui suit. En plus, on se sousmet à la restriction que les sous-espaces de $T_x G(x)$ irréductibles pour la représentation sont uniquement définis. Donc, on a la même décomposition

$$T_x G(x) = \oplus \{B_j | \, j = 1, \ldots, r\}$$

et la même base orthonormée compatible $(e_1, \ldots, e_k)$ de $T_x G(x)$ pour n'importe quel vecteur unitaire $s \in N_x$. Pour obtenir explicitemenet la dépendance des valeurs propres $\lambda_j(s)$, $j = 1, \ldots, p$ de vecteur s, on fixe une base orthonormée $(s_1, \ldots, s_{n-k})$ de N_x et on pose $\mu_i(s_j) = \mu_{ij}$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, n-k$. Alors, en vertu d'observations précédentes on a

$$\langle s_j, \omega_x(u, v)\rangle = \sum_{i=1}^{k} \mu_{ij} u^i v^i \quad \text{pour} \quad u, v \in T_x G(x)$$

où $j=1, \ldots, n-k$. Donc, pour un vecteur unitaire $s \in N_x$ quelconque on a

$$s = \sum_{j=1}^{n-k} \tau^j s_j$$

et par conséquent on obtient l'expression suivante pour la seconde forme fondamentale

$$\langle s, \omega_x(u, v)\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n-k} \tau^j s_j, \omega_x(u, v)\right\rangle = \sum_{j=1}^{n-k} \tau^j \langle s_j, \omega_x(u, v)\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-k} \tau^j \sum_{i=1}^{k} \mu_{ij} u^i v^i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} \mu_{ij} \tau^j\right) u^i v^i.$$

Donc, on tire l'expression suivante qui donne explicitement la dépendance de valeurs propres du vecteur s:

$$\mu_i(s) = \sum_{j=1}^{n-k} \mu_{ij} \tau^j.$$

On voit facilement que les vecteurs w_i, $i=1, \ldots, k$, qui sont définis par

$$w_i = \sum_{j=1}^{n-k} \mu_{ij} s_j$$

ne dépendent pas de la base choisie du sous-espace N_x; or, on les appellera ici les *vecteurs critiques* de l'orbite $G(x)$.

Le théoréme suivant donne une formule qui décrit le bord du voisinage régulier maximum d'une orbite principale d'une action orthogonale à quelques conditions supplémentaires.

Theoreme 2. *Soit α: $G \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une action orthogonale d'un group de Lie compact connexe G et soit $x \in \mathbf{R}^n$ un point tel que l'orbite $G(x)$ est principale et que le sous-groupe d'isotropie G_x est de rang maximum. Soit V un voisinage normal de $G(x)$ tel que tout point $z \in \partial V$ est l'image d'un point critique de ε et soient w_i, $i=1, \ldots, k$ les vecteurs critiques de $G(x)$. Alors,*

$$x + \min\left\{\frac{1}{\langle w_i, s\rangle}\middle| i = 1, \ldots, k\right\} s$$

est le premier point commun du bord ∂V avec le rayon $x+\tau s$, $\tau \geqq 0$ pour un vecteur unitaire $s \in N_x$ quelconque.

Démonstration. En effet, soit $s \in N_x$ un vecteur unitaire et $z=x+\tau s$, $\tau>0$ le premier point commun du rayon consideré avec le bord ∂V. Selon les hypothèses du théorème le point z est l'image d'un point critique $w \in N_x$ de l'application

$$\varepsilon\colon N(x) \to \mathbf{R}^n.$$

En plus, on a selon un résultat cité plus haut $w=\frac{1}{\lambda} s$ où λ est la valeur propre la plus grande de la seconde forme fondamentale de $G(x)$ correspondante à s. Donc, il suffit à démontrer que les conditions dans la definition de vecteurs critiques des orbites sont satisfaites, parce que dans ce cas la valeur propre considerée est évidemment donnée par

$$\max \{\langle w_i, s\rangle | i = 1, \dots, k\}.$$

En effet, on sait que la décomposition $T_x G(x) = \oplus \{B_j | j=1, \dots, r\}$ en somme directe de sous-espaces irréductibles est unique si et seulement si les composants irréductibles de la représentation

$$T_x \alpha_g \colon T_x G(x) \to T_x G(x)$$

sont inéquivalents ([3] pp 122—123). Soit $\iota\colon G(x) \to G/G_x$ l'isomorphisme équivariant et $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_x$ une décomposition réductive. En identifiant le sous-espace $\mathfrak{m}$ à l'espace tangent de G/G_x en G_x on voit que les composants irréductibles de la représentation $T_x \alpha_g$, $g \in G_x$ sont inéquivalents si et seulement si ceux de la représentation

$$T_e ad(g)\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}, \quad g \in G_x$$

le sont. Mais, on sait que les composants irréductibles de la représentation considerée en dernier sont inéquivalents si G_x est de rang maximum.

L'exemple suivant sert à justifier l'introduction des concepts faite ci-dessus et même à illustrer le contenu du théoreme précédent.

Exemple. Soit G un groupe de Lie compact connexe semi-simple et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie qui sera identifiée à l'espace tangent $T_e G$. Or, une action α de G sur $\mathfrak{g}$ est donnée par la définition suivante:

$$\alpha(g, X) = T_e ad(g) X, \quad \text{où} \quad g \in G \quad \text{et} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

L'action α est évidemment orthogonale pour le produit intérieur de $\mathfrak{g}$ définie par sa forme de Killing—Cartan. En plus, on sait que les sous-groupes d'isotropie principaux sont les tores maximums de G ([2] pp 15—16). Par conséquent, les conditions du théoreme précédent sont vérifiées.

Soit $X \in \mathfrak{g}$ un élément tel que son orbite $G(X)$ est principale. Alors, le sous-groupe d'isotropie G_X étant un tore maximum, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}_X$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ qui est obtenue par la complexification de $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Or, soient

$$X_k, Y_k, H_k, \quad k = 1, \dots, m$$

des éléments de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ qui donnent une base de Weyl de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ normalisée selon Chevalley [11]. On sait que les éléments

$$U_k = X_k - Y_k, \quad V_k = i(X_k + Y_k), \quad F_k = iH_k, \quad k = 1, \dots, m$$

engendrent par leurs combinaisons linéaires sur $\mathbf{R}$ une forme compacte de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Mais, puisque les formes compactes de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ sont conjuguées on peut atteindre que la forme compacte considérée soit $\mathfrak{g}$ même; bien plus, puisque les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées on peut atteindre aussi que la sous-algèbre de Cartan

$\mathfrak{g}_X$ soit engendrée par les éléments F_k, $k=1, \ldots, m$. On sait que les éléments U_k, V_k, $k=1, \ldots, m$ forment la base d'un sous-espace $\mathfrak{m}$ qui est le complément orthogonal de $\mathfrak{g}_X$; ainsi, on obtient une décomposition réductive

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_X .$$

Or, on considère la fonction $r(u^1, v^1, \ldots, u^m, v^m)$ qui est définie par

$$r(u^1, v^1, \ldots, u^m, v^m) = T_e ad(\exp(u^1 U_1) \exp(v^1 V_1) \ldots \exp(u^m U_m) \exp(v^m V_m)) X$$

où $\exp: \mathfrak{g} \to G$ est l'application exponentielle du groupe de Lie G. Alors, on voit facilement que la fonction $r(u^1, v^1, \ldots, u^m, v^m)$ restreinte à un voisinage suffisamment petit de 0 dans $\mathbf{R}^{2m}$ donne une paramétrisation admissible de l'orbite $G(X)$ dans ce voisinage de X. Par conséquent, une base de l'espace tangent $T_X G(X)$ est donnée par les vecteurs

$$\frac{\partial r}{\partial u^1} = [U_1, X], \frac{\partial r}{\partial v^1} = [V_1, X], \ldots, \frac{\partial r}{\partial u^m} = [U_m, X], \frac{\partial r}{\partial v^m} = [V_m, X]$$

où $u^1 = v^1 = \ldots = u^m = v^m = 0$. Mais, puisque $X \in \mathfrak{g}_X$ on obtient par identités fondamentales concernant les racines positives $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ que

$$[U_k, X] = i[iX, X_k - Y_k] = i\alpha_k(iX)(X_k + Y_k) = \alpha_k(iX) V_k,$$

$$[V_k, X] = i[iX, i(X_k + Y_k)] = -\alpha_k(iX)(X_k - Y_k) = -\alpha_k(iX) U_k,$$

où $\alpha_k(iX) \in \mathbf{R}$ et $k=1, \ldots, m$. Pour calculer le second tenseur fondamental de la sous-variété $G(X) \subset \mathfrak{g}$ en le point X on déduit que les dérivées partielles de second ordre de la fonction $r(u^1, v^1, \ldots, u^m, v^m)$ en $0 \in \mathbf{R}^{2m}$ sont les suivants:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^{k^2}} = [U_k, [U_k, X]] = 2\alpha_k(iX)[X_k, Y_k] = 2\alpha_k(iX) F_k,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^{k^2}} = [V_k, [V_k, X]] = 2\alpha_k(iX)[X_k, Y_k] = 2\alpha_k(iX) F_k,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^k \partial v^k} = [U_k, [V_k, X]] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^k} = [U_1, [U_k, X]] = \alpha_k(iX)\{N_{\alpha_1, \alpha_k} V_{\alpha_1 + \alpha_k} + N_{\alpha_1, -\alpha_k} V_{\alpha_1 - \alpha_k}\},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial v^1 \partial v^k} = [V_1, [V_k, X]] = \alpha_k(iX)\{N_{\alpha_1, -\alpha_k} V_{\alpha_1 - \alpha_k} - N_{\alpha_1, \alpha_k} V_{\alpha_1 + \alpha_k}\},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial v^k} = [U_1, [V_k, X]] = \alpha_k(iX)\{N_{\alpha_1, -\alpha_k} U_{\alpha_1 - \alpha_k} - N_{\alpha_1, \alpha_k} U_{\alpha_1 + \alpha_k}\},$$

où $k, l=1, \ldots, m$, mais $k \neq l$. D'autre part, pour calculer le second tenseur fondamental de la sous-variété $G(X)$ en le point X, soient données les champs de vecteurs U, V tangents à $G(X)$ dans un voisinage de X par

$$U = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial r}{\partial u^k} \xi'^k + \frac{\partial r}{\partial v^k} \xi''^k \right)$$

et

$$V = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial r}{\partial u^k} \eta'^k + \frac{\partial r}{\partial v^k} \eta''^k \right)$$

et soit fixée une base orthonormée $(s_1, \ldots, s_{n-2m})$ de N_X. Alors, on obtient l'expression suivante pour le second tenseur fondamental de $G(X)$ en le point X:

$$\omega_X(U, V) = \sum_{j=1}^{n-2m} \langle s_j, \omega_X(U, V) \rangle s_j = \sum_{j=1}^{n-2m} \langle s_j, \nabla'_U V \rangle s_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2m} \left\langle s_j, \sum_{k,l=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^k \partial u^1} \xi'^k \eta'^1 + \frac{\partial^2 r}{\partial u^k \partial v^1} \xi'^k \eta''^1 + \frac{\partial^2 r}{\partial v^k \partial u^1} \xi''^k \eta'^1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2 r}{\partial v^k \partial v^1} \xi''^k \eta''^1 \right) \right\rangle s_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^{k2}} \xi'^k \eta'^k + \frac{\partial^2 r}{\partial v^{k2}} \xi''^k \eta''^k \right) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(iX) F_k (\xi'^k \eta'^k + \xi''^k \eta''^k).$$

Soit $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}$ le sous-espace tendu par les vecteurs U_k, V_k pour $k=1, \ldots, m$; or, on obtient une décomposition

$$\mathfrak{m} = \oplus \{\mathfrak{m}_k | k = 1, \ldots, m\}$$

en somme directe de sous-espaces orthogonaux et on sait qu'ils sont irréductibles et inéquivalents pour la représentation donnée par

$$T_X \alpha_g \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}, \quad g \in G_X.$$

De plus, une base orthonormée et compactible avec la décomposition considérée de $\mathfrak{m}$ est donnée par les vecteurs

$$\frac{U_k}{2\|\alpha_k\|}, \frac{V_k}{2\|\alpha_k\|} \quad \text{oû} \quad k = 1, \ldots, m.$$

Alors, on obtient que les vecteurs critiques de l'orbite $G(X)$ sont les suivants:

$$4\alpha_k(iX)\|\alpha_k\| F_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Donc, on a obtenu les vecteurs critiques d'une orbite principale $G(X)$ de l'action α en leur dépendance de X puisque la sous-variété linéaire $X + N_X = X + \mathfrak{g}_X$ coupe toutes les orbites de l'action α.

Bibliographie

[1] GLEN E. BREDON, Introduction to compact transformation groups, *New York, London*. 1972.

[2] WU YI HSIANG, Cohomolgy theory of compact transformation groups, *Berlin, Heidelberg, New York*, 1975.

[3] A. A. KIRILLOV, Elements of the theory of representations, *Berlin, Heidelberg, New York*, 1976.

[4] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, Foundations of differential geometry I—II. *New York, London, Sidney*, 1963—1969.

[5] J. L. KOSZUL, Sur certains groupes de transformations de Lie. *Géométrie Differentielle. Colloq. Int. CNRS Strasbourg* (1953), 137—141.

[6] A. LICHNEROWICZ, Géométrie des groupes de transformations, *Paris*, 1958.

[7] L. MICHEL, Points critiques des fonctions invariantes sur une G-variété, *C. R. Acad. Sci., Paris* **272** (1971), 433—436.

[8] J. MILNOR, Morse theory, *Princeton, New Jersey*, 1963.

[9] D. MONTGOMERY and C. T. YANG, The existence of a slice, *Ann. of Math.* **65** (1957), 108—116.

[10] D. D. MOSTOW, Equivariant embeddings in euclidean space. *Ann. of Math.* **65** (1957), 432—446.

[11] J. P. SERRE, Algèbres de Lie semi-simples complexes, *New York, Amsterdam*, 1966.

(Reçu le 5 décembre 1978)