Об изоморфизме пар бесконечных абелевых групп

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Как известно (см. [4]), абелева группа G с её подгруппой H называется парой (G, H) этих групп. В работах [3] и [4] исследуется разложимость пар некоторых классов абелевых групп в прямую сумму пар, и степени неразложимых пар.

Пару (G, H) называют неразложимой, если не существует такое прямое разложение $G=G_1\times G_2$ группы G, $G_1\neq\{1\}$, $G_2\neq\{1\}$ и $H=H_1\times H_2$ подгруппы H, что $H_1\subseteqq G_1$; $H_2\subseteqq G_2$. В противном случае пара разложима. Две пары (G_1, H_1) и (G_2, H_2) называются изоморфными, если существует такой изоморфизм φ групп G_1 и G_2, что $\varphi(G_1)=G_2$; $\varphi(H_1)=H_2$.

В работе [5] было доказано, что в случае конечной абелевой группы G и циклической подгруппы $H\subseteqq G$ пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар определяется инвариантами группы G и фактор-группы G/H.

В этой статье мы покажем, что результаты работы [5] справедливы и в случае ряда типов бесконечных абелевых групп.

Сформулируем здесь три леммы, которыми в дальнейшем часто будем пользоваться, доказательство которых изложено в [5].

Лемма 1. *Пусть G — прямое произведение конечного числа циклических p-групп, H — циклическая подгруппа группы G. Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, что при $a_i^{p^{\alpha_i}}=1$ $(i=1, \dots, n)$ подгруппа H порождается элементом $a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}}$, причём выполняются неравенства*

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$$

$$\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$$

$$\alpha_1-\beta_1<\alpha_2-\beta_2<\ldots<\alpha_n-\beta_n.$$

Лемма 2. *Пусть G — конечнопорождённая абелева группа, H — её подгруппа, $\{a_i\}$ — базис группы G, и*

$$a_1^{\gamma_{1\nu}}\cdot a_2^{\gamma_{2\nu}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\gamma_{n\nu}}\,H=H\quad(\nu=1, \dots, s)$$

все определяющие соотношения фактор-группы G/H. Тогда инварианты фактор-группы G/H получаются приведением целочисленной матрицы $\|\gamma_{ij}\|$ элементарными преобразованиями к диагональному виду $\|\delta_i\|$, где δ_k/δ_{k+1} $(k=1, \dots, r+1)$, δ_i — неотрицательные целые числа.

Лемма 3. *Пусть дана неразложимая пара* (G, H), *описанная в лемме* 1. *Тогда инварианты фактор-группы* G/H *суть числа*

$$p^{\beta_1},\ p^{\alpha_1-\beta_1+\beta_2},\ \ldots,\ p^{\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}+\beta_n}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть группа* G — *прямое произведение счётного числа конечных циклических* p-*групп, среди которых равного порядка имеется конечное число, и пусть* H — *циклическая подгруппа группы* G. *Тогда инварианты группы* G *и фактор-группы* G/H *определяют пару* (G, H) *с точностью до изоморфизма пар.*

Доказательство. Пусть

$$G=(a_1)\times(a_2)\times\ldots\times(a_n)\times\ldots,$$

где $a_i^{p^{\alpha_i}}=1$. Пусть базисные элементы занумерованы так, что циклическая подгруппа H порождается элементом

$$a_1^{\gamma_1}\cdot a_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot a_s^{\gamma_s},$$

где $\gamma_i\geqq 1$ $(i=1,\ldots,s)$. Так как H — конечная группа, легко выделить подгруппу $G_1\subset G$ такую, что (G_1, H) — неразложимая пара. Согласно лемме 1, имеет место

$$G_1=(a_1)\times\ldots\times(a_s),\quad H=(a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_s^{p^{\beta_n}}),$$

причём выполняется система неравенств

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s$$

$$\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_s$$

$$\alpha_1-\beta_1<\alpha_2-\beta_2<\ldots<\alpha_s-\beta_s.$$

Тогда группа G разлагается в прямое произведение

$$G=G_1\times G_2$$

и имеет место

$$G/H\cong G_1/H\times G_2. \tag{2}$$

Согласно лемме 3, инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$p^{\beta_1},\ p^{\alpha_1-\beta_1+\beta_2},\ \ldots,\ p^{\alpha_{s-1}-\beta_{s-1}-\beta_s}. \tag{3}$$

Пусть дана система инвариантов фактор-группы G/H. Расположим их в порядке возрастания

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots. \tag{4}$$

Пусть δ_{i_1} — первое в ряду (4) число, которое либо не участвует среди инвариантов p^{α_i} группы G, либо участвует, но входит в (4) с большей кратностью, чем в систему $\{p^{\alpha_i}\}$. Покажем, что δ_{i_1} совпадает с наименьшим из инвариантов (3). Действительно, если он не является инвариантом группы G, то также не является инвариантом подгруппы G_2, значит может быть только инвариантом фактор-группы G_1/H. Если δ_{i_1} входит в систему $\{p^{\alpha_i}\}$, но в (4) участвует с большей кратностью, чем в $\{p^{\alpha_i}\}$, то он также должен быть инвариантом фактор-группы G_1/H.

Так как в системе $\{p^{\alpha_i}\}$ равных между собой инвариантов только конечное число, то выбор δ_{i_1} в обоих случаях обеспечивается однозначно.

Затем в системе

$$\delta_{i_1+1}, \delta_{i_1+2}, \ldots \tag{5}$$

выбирается наименьшее число δ_{i_2} такое, которое либо не входит в систему $\{p^{\alpha_i}\}$, либо входит в неё с меньшей кратностью, чем в (5). И т. д., после конечного числа шагов находятся все инварианты

$$\delta_{i_1} = p^{\beta_1}, \delta_{i_2} = p^{\alpha_1-\beta_1+\beta_2}, \ldots, \delta_{i_s} = p^{\alpha_{s-1}-\beta_{s-1}+\beta_s} \tag{6}$$

фактор-группы G_1/H. Выбрасываем из системы (4) числа $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s}$, и мы получим все инварианты подгруппы G_2, с помощью которых из оставшихся инвариантов $p^{\alpha_1}, \ldots, p^{\alpha_s}$ в порядке возрастания определяются все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$. По формуле (6) подстановкой чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ последовательно определяются числа $\beta_1, \ldots, \beta_s$ однозначно. Тем самым пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 неверна для прямого произведения счётного числа таких конечных циклических p-групп, среди которых найдётся счётное число с равными порядками.

Доказательство. Пусть $G_1=(a_1)$, где $a_1^{p^{\alpha_1}}=1$, и пусть $H_1=(a_1^{p^{\beta_1}})$. Фактор-группа G_1/H_1 имеет порядок p^{β_1}. Пусть $\bar{G}_1=(\bar{a}_1)\times(\bar{a}_2)$, где $\bar{a}_1^{p^{\bar{\alpha}_1}}=\bar{a}_2^{p^{\bar{\alpha}_2}}=1$. и пусть $H_2=(\bar{a}_1^{p^{\bar{\beta}_1}}\cdot\bar{a}_2^{p^{\bar{\beta}_2}})$, где $\bar{\alpha}_1>\bar{\alpha}_2$, $\bar{\beta}_1>\bar{\beta}_2$, $\bar{\alpha}_1-\bar{\beta}_1>\bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2$. Как известно, инварианты фактор-группы $\bar{G}_1/H_2$: $p^{\bar{\beta}_2}, p^{\bar{\beta}_1+(\bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2)}$. Предположим также, что числа β_1, $\bar{\beta}_1$ и $\bar{\alpha}_2$ выбраны так, что $\beta_1=\bar{\beta}_1+\bar{\alpha}_2$, то есть что порядки фактор-групп G_1/H_1 и $\bar{G}_1/H_2$ совпадают.

Пусть теперь G_{p^γ} — прямое произведение счётного числа циклических групп порядков p^γ, и пусть группа G_2 определяется равенством

$$G_2 = G_{p^{\alpha_1}}\times G_{p^{\bar{\alpha}_1}}\times G_{p^{\bar{\alpha}_2}}\times G_{p^{\beta_1}}\times G_{p^{\bar{\beta}_2}}\times G_{p^{\bar{\beta}_1+(\bar{\alpha}_2-\bar{\beta}_2)}}.$$

Определим группы

$$G = G_2\times G_1 \cong G_2, \quad G_2\times\bar{G}_1 \cong G_2.$$

Тогда имеет место

$$G/H_1 \cong G_2, \quad G/H_2 \cong G_2,$$

так как

$$G/H_1 \cong G_2\times G_1/H_1 \cong G_2$$

$$G/H_2 \cong G_2\times\bar{G}_1/H_2 \cong G_2.$$

Значит фактор-группы G/H_1 и G/H_2 изоморфны, а пары (G, H_1) и (G, H_2) не изоморфны как пары, поэтому характеризующие их инварианты не совпадают.

Лемма 4. *Пусть группа G является полным прямым произведением циклических групп $(a_1), \ldots, (a_n), \ldots$ порядков p^{α_i} $(i=1, 2, \ldots)$, причём $\alpha_1<\alpha_2<\ldots$.*

Пусть H — циклическая группа, порождённая элементом

$$(a_1^{p^{\beta_1}}, a_2^{p^{\beta_2}}, \ldots, a_n^{p^{\beta_n}}, \ldots)$$

где $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$; $\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \ldots$. *Тогда фактор-группа G/H является полным прямым произведением циклических p-рупп порядков*

$$p^{\beta_1}, p^{\alpha_1 - \beta_1 + \beta_2}, \ldots, p^{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} + \beta_n}, \ldots.$$

Доказательство. Рассмотрим для любого натурального числа n группы $G_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $H_n = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}})$, где $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$, $(i = 1, \ldots, n)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$; $\beta_1 < \ldots < \beta_n$; $\alpha_1 - \beta_1 < \ldots < \alpha_n - \beta_n$. Как известно, (см. [5]) фактор-группа G_n/H_n порождается смежными классами

$$b_i^{(n)} = (a_i a_{i+i}^{p^{\beta_{i+1} - \beta_i}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n - \beta_i}}) H_n \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

порядков $p^{\beta_1}, p^{\alpha_j - \beta_j + \beta_{j+1}}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Любой смежный класс $a_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n$ однозначно выражается через смежные классы (7) по формуле

$$a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n = b_1^{(n)\gamma_1} \cdot b_2^{(n)\gamma_2 - \gamma_1 p^{\beta_2 - \beta_1}} \cdot \ldots \cdot b_n^{(n)\gamma_n - \gamma_{n-i} p^{\beta_n - \beta_{n-1}}}. \tag{8}$$

Рассмотрим аддитивную абелеву группу счётномерных векторов

$$M = \{(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots)\},$$

где δ_1 пробегает класс вычетов по модулю p^{β_1}, и δ_i — класс вычетов по модулю $p^{\beta_i + (\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})}$ $(i = 2, 3, \ldots, n, \ldots)$.

Пусть теперь

$$aH = (a_1^{\gamma_1}, a_2^{\gamma_2}, \ldots, a_n^{\gamma_n}, \ldots) H \tag{9}$$

— произвольный смежный класс фактор-группы G/H. Поставим в соответвие каждому смежному классу вида (9) вектор m_a группы M вида

$$m_a = (\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1 p^{\beta_2 - \beta_1}, \ldots, \gamma_n - \gamma_{n-1} \cdot p^{\beta_n - \beta_{n-1}}, \ldots), \tag{10}$$

если для каждого конечного натурального числа n смежный класс $a_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n$ выражается по формуле (8). Отображение

$$\varphi \colon aH \to m_a \tag{11}$$

однозначно, так как с увеличением числа n показатели $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ по формуле (8) вычисляются однозначно. Более того, отображение (11) между фактор-группой G/H и подгруппой M будет взаимно однозначным, так как при фиксированных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ постепенным увеличением числа n по формуле (8) однозначно определяется смежный класс aH.

Отображение (11) является также изоморфизмом, так как для любого конечного натурального числа n из формулы (8) и

$$a_1^{\gamma_1'} \cdot a_2^{\gamma_2'} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n'} H_n = b_1^{(n)\gamma_1'} \cdot b_2^{(n)\gamma_2' - \gamma_1' \cdot p^{\beta_2 - \beta_1}} \cdot \ldots \cdot b_n^{(n)\gamma_n' - \gamma_{n-1}' \cdot p^{\beta_n - \beta_{n-1}}}$$

следует

$$a_1^{\gamma_1+\gamma_1'} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma_n+\gamma_n'} H_n = \left(b_1^{(n)\gamma_1} \cdot b_2^{(n)\gamma_2-\gamma_1 \cdot p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \ldots \cdot b_n^{(n)\gamma_n-\gamma_{n-1} \cdot p^{\beta_n-\beta_{n-1}}}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(b_1^{(n)\gamma_1'} \cdot b_2^{(n)\gamma_2'-\gamma_1' \cdot p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \ldots \cdot b_n^{(n)\gamma_n'-\gamma_{n-1}' \cdot p^{\beta_n-\beta_{n-1}}}\right).$$

Группа M является полной прямой суммой циклических подгрупп, порождённых векторами

$$m_1 = (\bar{1}_1, 0, \ldots, 0, \ldots)$$
$$m_i = (0, \ldots, 0, \bar{1}_i, 0, \ldots, 0, \ldots) \quad (i = 2, 3, \ldots),$$

где для вектора m_i, $\bar{1}_i$ стоит на i-ом месте, и является единичным классом-вычетом по модулю $p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}$, а для вектора m_1 — по модулю p^{β_1}. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p-групп порядков p^{α} $(i=1, 2, \ldots)$, H — циклическая подгруппа группы G. Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, в котором подгруппа H порождается элементом*

$$b = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \cdot \ldots,$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$
$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots$$
$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \ldots < \alpha_n - \beta_n < \ldots.$$

Доказательство. Пусть G — полное прямое произведение циклических групп $(\bar{a}_i)$ порядков p^{α_i} $(i=1, 2, \ldots)$, и пусть имеет место неравенство

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots.$$

Пусть циклическая подгруппа H порождается элементом

$$b = (\tilde{a}_1^{\gamma_1} \cdot \tilde{a}_2^{\gamma_2} \cdot \ldots),$$

где $\tilde{a}_i = (1, \ldots, 1, \bar{a}_i, 1, \ldots) \in G$; $\gamma_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots)$. Очевидно, отображение φ: $\tilde{a}_i \to \tilde{a}_i^{\lambda_i}$ группы G в себя, где $\gamma_i = \lambda_i \cdot p^{\beta_i}$, $\lambda_i \not\equiv 0 \pmod p$ $(i=1, 2, \ldots)$ является автоморфизмом группы G, переводящим базис $\{\tilde{a}_i\}$ группы G в такой базис $\{a_i\}$,

$$a_i = (1, \ldots, 1, \bar{a}_i^{\lambda_i}, 1, \ldots),$$

в котором образующий элемент b подгруппы H имеет вид

$$b = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \ldots.$$

Покажем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо выполнение неравенств $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \ldots$. Пусть, наоборот, для фиксированного индекса

s $(1 \leqq s)$ имеет место неравенство $\beta_s \geqq \beta_{s+1}$. Тогда положим

(12) $$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{если} \quad i \neq s+1 \\ a_s^{p^{\beta_s+\beta_{s+1}}} \cdot a_{s+1}, & \text{если} \quad i = s+1 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как

$$a_s^{p^{\beta_s}} \cdot a_s^{p^{\beta_{s+1}}} = \left(a_s^{p^{\beta_s-\beta_{s+1}}} \cdot a_{s+1}\right)^{p^{\beta_{s+1}}},$$

то порядок элемента a_{s+1} и $\hat{a}_{s+1}$ равны. Учитывая ещё, что $(\hat{a}_\nu) \cap (\hat{a}_\mu) = 1$ $(1 \leqq \nu \neq \mu)$, мы заключаем, что множество $\{\hat{a}_i\}$ является базисом группы G. Поэтому отображение

(13) $$\psi(a_i) = \hat{a}_i,$$

где элементы $\hat{a}_i$ определены равенством (12), является автоморфизмом группы G. Однако, подгруппа H лежит в подгруппе

$$G_2 = (\hat{a}_1) \times \dots \times (\hat{a}_{s-1}) \times (\hat{a}_{s+1}) \times \dots,$$

поэтому прямое разложение $G = G_2 \times (\hat{a}_s)$ показывает разложимость пары (G, H). Противоречие показывает, что выполняются неравенства $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$.

Для неразложимости пары (G, H) необходимо также выполнение неравенств $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$. Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса s $(1 \leqq s)$ имеет место $\alpha_s = \alpha_{s+1}$. Положим

(14) $$\hat{a}_i^* = \begin{cases} a_i, & \text{если} \quad i \neq s \\ a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}, & \text{если} \quad i = s \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как при $\alpha_s = \alpha_{s+1}$ имеет место

$$a_s^{p^{\beta_s}} \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}}} = \left(a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}\right)^{p^{\beta_s}},$$

то множество $\{\hat{a}_i^*\}$ является базисом группы G, в котором подгруппа Hпорождается элементом

(15) $$b = \hat{a}_1^{*p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \hat{a}_s^{*p^{\beta_s}} \cdot \hat{a}_{s+2}^{*p^{\beta_{s+2}}} \cdot \dots,$$

значит подгруппа H лежит в истинной подгруппе

(16) $$G_3 = (\hat{a}_1^*) \times \dots \times (\hat{a}_s^*) \times (\hat{a}_{s+2}^*) \times \dots$$

группы G, и прямое разложение $G = G_3 \times (\hat{a}_{s+1}^*)$ сделает очевидной разложимость пары (G, H).

Покажем, наконец, что выполнение неравенств

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n < \dots$$

является также необходимым для неразложимости пары (G, H). Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса s $(1 \leqq s)$ имеет место неравенство

$$\alpha_s - \beta_s \geqq \alpha_{s+1} - \beta_{s+1}.$$

Тогда порядок элемента $a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}$ равняется числу $p^{\alpha_{s+1}-\beta_{s+1}+\beta_s} \leqq p^{\alpha_s}$. Поэтому порядок элемента

$$\hat{a}_s^* = a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}$$

равен p^{α_s}. Значит, и в этом случае множество, заданное равенством (14), является базисом группы G, в котором образующий элемент b подгруппы H имеет вид (15), следовательно, группа H лежит в истинной подгруппе G_3 (см. (16)), и пара (G, H) — разложима.

Пусть теперь выполняются условия леммы. Мы покажем, что они достаточны для неразложимости пары (G, H). Предположим, что пара (G, H) — разложима. Так как подгруппа H — циклична, разложимость пары (G, H) влечёт за собой существование такого прямого разложения $G = G_1 \times G_2$ группы G, что $H \subseteqq G_1$, $G_2 \neq \{1\}$. Если фиксировать в группе G такой базис, который является объединением базисов подгрупп G_1 и G_2, то переход к этому базису является автоморфизмом, сохраняющим порядки базисных элементов. Без ограничения на общность рассуждений можно предположить, что новый базис занумерован так, что выполняются неравенства для показателей числа p в условиях леммы. Но тогда для пар (G_1, H) и (G, H) выполняются условия леммы 4, значит инварианты фактор-групп G_1/H и G/H описаны леммой 3. Имеет место

$$G/H \cong G_1/H \times G_2. \tag{17}$$

Значит система инвариантов фактор-группы G/H является объединением систем инвариантов групп G_1/H и G_2. Но, согласно лемме 3, ни один из инвариантов фактор-группы G/H не совпадает с инвариантами группы G, что противоречит разложению (17). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть группа G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p-групп, среди порядков которых встречается только конечное число равных между собой. Пусть H — циклическая подгруппа группы G. Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.*

Доказательство. Пусть

$$G = (a_1^*) \times \ldots \times (a_n^*) \times \ldots,$$

где порядки подгрупп (a_i^*) равны числам p^{α_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ и введём привычные обозначения

$$\bar{a}_i = (1, \ldots, 1, a_i^*, 1, \ldots) \in G \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда группа G порождается базисом $\{\bar{a}_i\}$. Пусть циклическая подгруппа H порождается элементом

$$h = \bar{a}_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdot \bar{a}_{i_2}^{\gamma_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \bar{a}_{i_n}^{\gamma_{i_n}} \cdot \ldots,$$

где $\gamma_{i_\nu} > 0$ целые числа, $1 \leqq i_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Очевидно, отображение

$$a_j = \varphi(\bar{a}_j) = \begin{cases} \bar{a}_j, & \text{если} \quad j \neq i_\nu \\ \bar{a}_{i_\nu}^{\lambda_{i_\nu}}, & \text{если} \quad j = i_\nu \end{cases}$$

где $\gamma_{i_\nu}=\lambda_{i_\nu}\cdot p^{\beta_{i_\nu}}$, $\lambda_{i_\nu}\not\equiv 0 \pmod p$; $\nu, j=1, 2, \ldots$, является автоморфизмом группы G, приводящим к такому базису $\{a_j\}$ группы G, в котором элемент h имеет вид

$$h = a_{i_1}^{p\beta_{i_1}}\cdot a_{i_2}^{p\beta_{i_2}}\cdot\ldots.$$

Разбиваем множество индексов i_k во множителях элемента h на непересекающиеся подмножества $M_\nu=\{i_\mu^{(\nu)}\}$ так, что $\alpha_{i_{\mu_1}^{(\nu)}}=\alpha_{i_{\mu_2}^{(\nu)}}$ для любых двух индексов $i_{\mu_1}^{(\nu)}, i_{\mu_2}^{(\nu)}\in M_\nu$. По условиям теоремы все подмножества M_ν конечны. Для каждого подмножества M_ν выбираем минимальное число $\beta_{i_0}(\nu)=\min\{\beta_{i_\mu^{(\nu)}}|i_\mu^{(\nu)}\in M_\nu\}$ и положим

$$\tilde{a}_\nu=\prod_{i_\mu^{(\nu)}\in M_\nu} a_{i_\mu^{(\nu)}}^{p^{\beta_{i_\mu^{(\nu)}}-\beta_{i_0^{(\nu)}}}}.$$

Очевидно, элементы $\tilde{a}_\nu$ и $a_{i_0^{(\nu)}}$ имеют равные порядки, поэтому отображение

$$\psi(a_j)=\begin{cases} a_j, & \text{если} \quad j\neq i_0^{(\nu)} \\ \tilde{a}_j, & \text{если} \quad j=i_0^{(\nu)} \end{cases} \quad (\nu=1, 2, \ldots)$$

для всех ν является автоморфизмом группы G, приводящим к такому базису $\{\tilde{a}_j\}$, в котором элемент h имеет вид

$$h=\tilde{a}_{\nu_1}^{p^{\beta_{\nu_1}}}\cdot\tilde{a}_{\nu_2}^{p^{\beta_{\nu_2}}}\cdot\ldots \tag{18}$$

где выполняется $\alpha_{\nu_1}<\alpha_{\nu_2}<\ldots$.

Рассмотрим теперь множество M всех индексов ν_i базисных элементов $\tilde{a}_{\nu_i}$, участвующих в записи (18). Разбиваем множество M следующим образом. Фиксируем ν_1 и выбираем все индексы $\nu_i\in M$, для которых $\beta_{\nu_i}\leqq\beta_{\nu_1}$. Пусть они $M_1=\{t_1^{(1)}=\nu_1, t_2^{(1)}, \ldots\}$. Пусть во множестве $M\setminus M_1=\overline{M}_1$ индекс $t_1^{(2)}$ — минимальный. Определим множество $M_2\subset\overline{M}_1$ индексов $t_2^{(2)}, \ldots$, для которых $\beta_{t_i^{(2)}}\leqq\beta_{t_1^{(2)}}$. И т. д. Если уже построено множество M_s, то из множества $\overline{M}_s=M\setminus\{M_1\cup\ldots\cup M_s\}$ выбираем минимальный индекс $t_1^{(s+1)}$ и подмножество $\{t_i^{(s+1)}\}\subset\overline{M}_s$, где $\beta_{t_i^{(s+1)}}\leqq\beta_{t_1^{(s+1)}}$. Описанный процесс однозначно определяет разбиение множества M на непересекающиеся подмножества M_s. Каждое такое подмножество M_s содержит такой индекс $t_0^{(s)}$, для которого $\beta_{t_0^{(s)}}\leqq\beta_{t_i^{(s)}}$ при всех i. Положим для каждого s

$$a_s=\prod_{t_i^{(s)}\in M_s}\tilde{a}_{t_i^{(s)}}^{p^{\beta_{t_i^{(s)}}-\beta_{t_0^{(s)}}}} \quad (s=1, 2, \ldots).$$

Тогда отображение

$$\Theta(\tilde{a}_j)=\begin{cases} \tilde{a}_j, & \text{если} \quad j\neq t_0^{(s)} \\ a_j, & \text{если} \quad j=t_0^{(s)} \end{cases} \quad (s=1, 2, \ldots)$$

является автоморфизмом группы G, приводящим к такому базису $\{a_j\}$ группы G, в котором элемент h записывается в виде

$$h=a_{\mu_1}^{p^{\beta_{\mu_1}}}\cdot a_{\mu_2}^{p^{\beta_{\mu_2}}}\cdot\ldots,$$

где выполняется

$$\alpha_{\mu_1} < \alpha_{\mu_2} < \ldots; \quad \beta_{\mu_1} < \beta_{\mu_2} < \ldots.$$

Рассмотрим, наконец, множество N индексов $\{\mu_j\}$. Фиксируем индекс $\mu_1 = n_1^{(1)}$ и выбираем подмножество N_1 всех индексов $\mu_i \in N$ таких, что

$$\alpha_{\mu_1} - \beta_{\mu_1} \geqq \alpha_{\mu_i} - \beta_{\mu_i}.$$

Во множестве $\overline{N}_1 = N \setminus N_1$ фиксируем минимальный индекс $n_1^{(2)}$ и подмножество N_2 индексов i таких, что

$$\alpha_{n_1^{(2)}} - \beta_{n_1^{(2)}} \geqq \alpha_i - \beta_i.$$

И т. д. С помощью однозначного процесса, подобно предыдущему случаю, приходим к разбиению множества N на непересекающиеся подмножества $N_s = \{n_1^{(s)}, \ldots\}$ $(s=1, 2, \ldots)$. В каждом из подмножеств N_s существует такой индекс $n_0^{(s)}$, что

$$\alpha_{n_0^{(s)}} - \beta_{n_0^{(s)}} \leqq \alpha_{n_i^{(s)}} - \beta_{n_i^{(s)}}$$

для каждого i. Положим для каждого подмножества N_s

$$\hat{a}_s = \prod_{n_i^{(s)} \in N_s} a_{n_0^{(s)}}^{p^{\beta n_i^{(s)} - \beta n_0^{(s)}}}.$$

Отображение

$$\tau(a_j) = \begin{cases} a_j, & \text{если} \quad j \neq n_0^{(s)} \\ \hat{a}_j, & \text{если} \quad j = n_0^{(s)} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Является автоморфизмом группы G, приводящим к такому базису $\{\hat{a}_i\}$ группы G, в котором элемент h записывается в виде

$$h = \hat{a}_{m_1}^{p^{\beta m_1}} \cdot \hat{a}_{m_2}^{p^{\beta m_2}} \cdot \ldots,$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_{m_1} < \alpha_{m_2} < \ldots; \quad \beta_{m_1} < \beta_{m_2} < \ldots; \quad \alpha_{m_1} - \beta_{m_1} < \alpha_{m_2} - \beta_{m_2} < \ldots.$$

Рассмотрим подгруппу G_1, порождённую элементами $\hat{a}_{m_1}, \hat{a}_{m_2}, \ldots$. Согласно лемме 5, пара (G_1, H) неразложима.

Нами выделена подгруппа G_1, для которой имеет место прямое разложение $G = G_1 \times G_2$, и пара (G_1, H) — неразложима. Покажем, что система инвариантов группы G и фактор-группы G/H однозначно определяют систему инвариантов пары (G, H). Так как

$$G/H \cong G_1/H \times G_2,$$

то система инвариантов фактор-группы G/H является объединением систем инвариантов групп G_1/H и G_2. Инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$p^{\beta s_1}, \; p^{\beta s_2 + (\alpha s_1 - \beta s_1)}, \; \ldots, \; p^{\beta s_n + (\alpha s_{n-1} - \beta s_{n-1})}, \; \ldots.$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — все инварианты фактор-группы G/H. Пусть они расположены в порядке возрастания. Пусть δ_{k_1} — первый в этом ряду инвариант, который либо не совпадает ни с одним из инвариантов группы G, либо содержится в системе $\{\delta_i\}$ с большей кратностью, чем в $\{p^{\alpha_i}\}$. Так как равных среди p^{α_i} только конечное число, то δ_{k_1} определяется однозначно. Как было показано в доказательстве теоремы 2 работы [5], $\delta_{k_1}=p^{\beta s_1}$. Рассмотрим подсистему $\{\delta_{k_1+1}, \ldots\}$ и найдём первый такой инвариант δ_{k_2}, который обладает теми же свойствами, которые требовались при выделении элемента δ_{k_1}. Очевидно, $\delta_{k_2}=p^{\beta s_2+(\alpha s_1-\beta s_1)}$. И т. д. Для любого конечного числа n путём конечного числа шагов найдутся инварианты

$$p^{\beta s_1}, p^{\beta s_2+(\alpha s_1-\beta s_1)}, \ldots, p^{\beta s_n+(\alpha s_{n-1}-\beta s_{n-1})}.$$

Инварианты $\delta_1, \ldots, \delta_{k_1-1}, \delta_{k_1+1}, \ldots, \delta_{k_n-1}$ являются первыми инвариантами подгруппы G_2. Если выпишем все инварианты группы G до $p^{\alpha_m}=\delta_{k_n-1}$ и выбросим из них все инварианты G_2, то оставшиеся в порядке возрастания определяют все числа $p^{\alpha s_1}, \ldots, p^{\alpha s_{n-1}}$. С их помощью можно определить числа $p^{\beta s_1}, \ldots, p^{\beta s_n}$ однозначно. Постепенным увеличением числа n последовательно определяются все инварианты

$$p^{\beta s_1}, p^{\beta s_2}, \ldots$$

пары (G_1, H) однозначно. Так как попутно находятся также все инварианты группы G_2, то этим самым определены однозначно все инварианты пары (G, H). Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 2 неверна в случае полного прямого произведения конечных циклических p-групп, среди которых найдётся счётное число групп равного порядка.

Доказательство. Контрпримером может служить группа, описанная в замечании 1, если в качестве G_{p^ν} взять полное прямое произведение счётного числа циклических групп порядка p^ν.

Лемма 6. *Пусть G — конечнопорождённая абелева группа*

$$G=(c_1)\times\ldots\times(c_s)\times(a_1)\times\ldots\times(a_n),$$

где элементы c_i $(i=1, \ldots, s)$ имеют бесконечный порядок, а порядки элементов a_j равны p^{α_j} $(j=1, \ldots, n)$. Пусть H — циклическая подгруппа

$$H=(c_1^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot c_s^{\mu_s}\cdot a_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\delta_n}).$$

Для того, чтобы пара (G, H) была неразложимой, необходимо и достаточно, чтобы выполнились условия:

$$\text{Либо } s=0, \text{ либо } s=1 \text{ и } \mu_1=\lambda\cdot p^\gamma \ (\lambda\not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p)), \ \delta_j=p^{\beta_j} \ (j=1, \ldots, n)$$

$$\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n; \quad \beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n<\gamma;$$

$$\alpha_1-\beta_1<\alpha_2-\beta_2<\ldots<\alpha_n-\beta_n.$$

Доказательство. Из теории свободных абелевых групп известно, что при $\mu_1, \mu_2\neq 0$ в группе $(c_1)\times(c_2)$ существует такая циклическая подгруппа $(\bar{c}_1)$, изоморфная группе (c_1), которая содержит элемент $c_1^{\mu_1}\cdot c_2^{\mu_2}$. Значит для неразложимости пары (G, H) необходимо, чтобы бесконечных циклических множителей группы имелось не более одной. Случай $s=0$ нами уже исследован, поэтому мы предполагаем, что $s=1$ и

$$G=(c_1)\times(a_1)\times\ldots\times(a_n);\quad H=(c_1^{\mu_1}\cdot a_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\delta_n}).$$

Пусть $\mu_1=\lambda p^\gamma$ $(\lambda\not\equiv 0 \pmod p)$ и $\delta_i=\lambda_i p^{\beta_i}$ $(\lambda_i\not\equiv 0 \pmod p,\ i=1, \ldots, n)$. Автоморфизм

$$\varphi(c_1)=c_1;\quad \varphi(a_i)=a_i^{\lambda_i}\quad (i=1, \ldots, n)$$

переводит базис группы G в такой базис $\{c_1, \bar a_1\}$, в котором подгруппа H имеет вид

$$H=\left(c_1^{\lambda p^\gamma}\cdot \bar a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot \bar a_n^{p^{\beta_n}}\right).$$

Согласно лемме 1, мы можем предполагать, что $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$. Покажем, что $\gamma>\beta_i$ $(1\leqq i\leqq n)$. Действительно, если, например, $\gamma\leqq\beta_1$, то, воспользовавшись автоморфизмом

$$\varphi^*(c_1)=c_1;\ \varphi^*(\bar a_i)=\begin{cases}\bar a_i, & \text{если}\quad i\neq 1\\ \bar a_1^{\lambda}, & \text{если}\quad i=1\end{cases}\quad (i=1, \ldots, n),$$

мы приводим погруппу H к виду

$$H=\left(c_1^{\lambda p^\gamma}\cdot \tilde a_1^{\lambda p^{\beta_1}}\cdot \tilde a_2^{p^{\beta_2}}\cdot\ldots\cdot \tilde a_n^{p^{\beta_n}}\right),$$

и из равенства

$$c_1^{\lambda p^\gamma}\cdot \tilde a_1^{\lambda p^{\beta_1}}=\left(c_1\cdot \tilde a_1^{p^{\beta_1-\gamma}}\right)^{\lambda\cdot p^\gamma}$$

получаем, что под действием автоморфизма

$$\bar\varphi(c_1)=c_1\cdot \tilde a_1^{p^{\beta_1-\gamma}};\ \bar\varphi(\tilde a_i)=\tilde a_i\quad (i=1, \ldots, n)$$

пара (G, H) окажется разложимой.

Согласно лемме 1 мы можем считать также, что выполняются неравенства

$$\alpha_1-\beta_1<\alpha_2-\beta_2<\ldots<\alpha_n-\beta_n,$$

то есть условия леммы необходимы для неразложимости поры (G, H).

Предположим, что базис $\{c_1, a_i\}$ обладает всеми условиями леммы. Покажем, что эти условия и достаточны. Действительно, если бы пара (G, H) была разложимой, то существовал бы такой базис группы G, в котором группа G разлагалась бы в прямое произведение $G=G_1\times G_2$, где $H\subseteqq G_1$, $G_2\neq\{1\}$, значит в запись образующего элемента группы H через новый базис не входят все базисные элементы. Мы покажем, что для любого автоморфизма $\tilde\varphi$ группы G это не так. Пусть

$$\tilde\varphi(c_1)=c_1^{\mu_0}\cdot a_1^{\mu_{01}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\mu_{0n}}.$$

Автоморфизм сохраняет порядок элемента, поэтому здесь выполняется $\mu_0=\pm 1$. Пусть далее

$$\tilde\varphi(a_n)=a_1^{\mu_{n1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\mu_{nn}},$$

где $\mu_{nn}\not\equiv 0 \pmod p$.

$$\tilde\varphi(a_{n-1})=a_1^{\mu_{n-1\,1}}\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^{\mu_{n-1\,n-1}}\cdot a_n^{\mu_{n-1\,n}},$$

где для сохранения порядка элемента выполняются

$$\mu_{n-1\,n-1} \not\equiv 0 \pmod p; \quad \mu_{n-1\,n} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}}.$$

Вообще, пусть

$$\tilde{\varphi}(a_{n-i}) = a_1^{\mu_{n-i\,1}} \cdot \ldots \cdot a_{n-i}^{\mu_{n-i\,n-i}} \cdot \ldots \cdot a_n^{\mu_{n-i\,n}} \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Тогда выполняются сравнения

$$\mu_{n-i\,n-i} \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p),\ \mu_{n-i\,s} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^{\alpha_s-\alpha_{n-i}}) \quad (n-i < s \leqq n).$$

Пусть

$$\mu_{kj} = c_{kj}\, p^{\alpha_j-\alpha_k} \quad (1 \leqq k < j \leqq n),\ c_{kj} \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p).$$

Тогда матрица F автоморфизма $\tilde{\varphi}$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{01} & \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} & \cdots & \mu_{n1} \\ \mu_{02} & c_{12}\, p^{\alpha_2-\alpha_1} & \mu_{22} & \mu_{32} & & \mu_{n2} \\ \mu_{03} & c_{13}\, p^{\alpha_3-\alpha_1} & c_{23}\, p^{\alpha_3-\alpha_2} & \mu_{33} & & \mu_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{0n} & c_{1n} p^{\alpha_n-\alpha_1} & c_{2n}\, p^{\alpha_n-\alpha_2} & c_{3n}\, p^{\alpha_n-\alpha_3} & & \mu_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left(c_1^{\lambda p^{\gamma}}\, a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}\right) = {} & c_1^{\mu_0 \lambda p^{\gamma}} \cdot a_1^{\mu_{01}\lambda p^{\gamma} + \mu_{11} p^{\beta^1} + \ldots + \mu_{n1} p^{\beta_n}} \cdot \\ & \cdot a_2^{\mu_{02}\lambda p^{\gamma} + c_{12} p^{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1} + \mu_{22} p^{\beta_2} + \ldots + \mu_{n2} p^{\beta_n}} \cdot \\ & \vdots \\ & \cdot a_i^{\mu_{0i}\lambda p^{\gamma} + c_{1i} p^{\alpha_i-\alpha_1+\beta_1} + \ldots + c_{i-1\,i} p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}+\beta_{i-1}} + \mu_{ii} p^{\beta_i} + \ldots + \mu_{ni} p^{\beta_n}} \cdot \\ & \vdots \\ & \cdot a_n^{\mu_{0n}\lambda p^{\gamma} + c_{1n} p^{\alpha_n-\alpha_1+\beta_1} + \ldots + c_{n-1\,n} p^{\alpha_n-\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} + \mu_{nn} p^{\beta_1}} = \\ = {} & c_1^{\mu_0 \lambda p^{\gamma}} \cdot a_1^{\mu_1 p^{\beta_1}} \cdot \ldots \cdot a_i^{\mu_i p^{\beta_i}} \cdot \ldots \cdot a_n^{\mu_n p^{\beta_n}}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_0 = \pm 1;\ \mu_i = \mu_{0i}\lambda p^{\gamma-\beta_i} + c_{1i}\, p^{\alpha_i-\alpha_1+\beta_1-\beta_i} + \ldots + c_{i-1\,i}\, p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}+\beta_{i-1}-\beta_i} + \mu_{ii} +$$
$$+ \mu_{i-1\,i}\, p^{\beta_{i+1}-\beta_i} + \ldots + \mu_{ni} p^{\beta_n-\beta_i}.$$

Значит все $\mu_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть G — конечнопорождённая абелева группа

$$G = (c_1) \times \ldots \times (c_s) \times (a_1) \times \ldots \times (a_n),$$

где $c_i (i = 1, \ldots, s)$ — элементы бесконечного порядка, $a_j^{p^{\alpha_j}} = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть H — циклическая подгруппа группы G. Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Доказательство. С помощью автоморфизмов группы G, использованных в лемме 6, можно перейти к такому базису $\{c_i, a_j\}$ группы G, в котором циклическая подгруппа H имеет вид

$$H = \left(c_r^{\lambda p^{\gamma}} \cdot a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}} \cdot \ldots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}}\right), \quad (\lambda \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p))$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \ldots < \alpha_{i_m}$$
$$\beta_{i_1} < \beta_{i_2} < \ldots < \beta_{i_m} < \gamma$$
$$\alpha_{i_1} - \beta_{i_1} < \alpha_{i_2} - \beta_{i_2} < \ldots < \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}.$$

Тогда группа G распадается в прямое произведение

$$G = G_2 \times G_1,$$

где

$$G_1 = (c_r) \times (a_{i_1}) \times \ldots \times (a_{i_m}),$$

и пара (G_1, H) — неразложима.

Покажем, что инварианты пары (G_1, H) однозначно определяются инвариантами группы G_1 и фактор-группы G_1/H. Действительно, приведение к диагональному виду матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda p^{\gamma} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ p^{\beta_{i_m}} & p^{\alpha_{i_m}} & 0 & 0 & 0 \\ p^{\beta_{i_{m-1}}} & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p^{\beta_{i_2}} & 0 & 0 & p^{\alpha_{i_2}} & 0 \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & 0 & p^{\alpha_{i_1}} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda p^{\alpha_{i_m}+\gamma-\beta_{i_m}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p^{\alpha_{i_m}} & p^{\alpha_{i_{m-1}}+\beta_{i_m}-\beta_{i_{m-1}}} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}}} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{\alpha_{i_2}} & p^{\alpha_{i_1}+\beta_{i_2}-\beta_{i_1}} \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\alpha_{i_1}} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda p^{\alpha_{i_m}+\gamma-\beta_{i_m}} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}}+\beta_{i_m}-\beta_{i_{m-1}}} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\alpha_{i_1}+\beta_{i_2}-\beta_{i_1}} \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, согласно лемме 3, что инварианты фактор-группы G_1/H равны числам

$$p^{\beta_{i_1}}, p^{\beta_{i_2}+(\alpha_{i_1}-\beta_{i_1})}, \ldots, p^{\beta_{i_m}+(\alpha_{i_{m-1}}-\beta_{i_{m-1}})}, \lambda p^{\gamma+(\alpha_{i_m}-\beta_{i_m})}.$$

Нетрудно заметить, что фактор-группа G_1/H порождается смежными классами

$$\begin{aligned}
b_{i_1} &= \bar{a}_{i_1}H = (a_{i_1}\cdot a_{i_2}^{p^{\beta_{i_2}-\beta_{i_1}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_1}}}\cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_1}}})H,\\
b_{i_2} &= \bar{a}_{i_2}H = (a_{i_2}\cdot a_{i_3}^{p^{\beta_{i_3}-\beta_{i_2}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_2}}}\cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_2}}})H,\\
&\vdots\\
b_{i_m} &= \bar{a}_{i_m}H = (a_{i_m}\cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_m}}})H,\\
c &= \bar{c}_rH = c_r\cdot H.
\end{aligned}$$

Действительно, смежные классы b_{i_ν} имеют порядок $p^{\beta_{i_\nu}+(\alpha_{i_{\nu-1}}-\beta_{i_{\nu-1}})}$ $(\nu=2, \ldots, m)$, так как

$$(a_{i_\nu}\cdot a_{i_{\nu+1}}^{p^{\beta_{i_{\nu+1}}-\beta_{i_\nu}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_\nu}}}\cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_\nu}}})^{p^{\beta_{i_\nu}+(\alpha_{i_{\nu-1}}-\beta_{i_{\nu-1}})}} =$$

$$= (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_{\nu-1}}^{p^{\beta_{i_{\nu-1}}}}\cdot a_{i_\nu}^{p^{\beta_{i_\nu}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}}\cdot c_r^{p^\gamma})^{p^{\alpha_{i_{\nu-1}}-\beta_{i_{\nu-1}}}}\in H,$$

но меньшая степень этого элемента не лежит в H.

Точно так же можно показать, что порядок смежного класса b_{i_1} равен $p^{\beta_{i_\nu}}$, а порядок класса c — число $\lambda\cdot p^{\gamma+(\alpha_{i_m}-\beta_{i_m})}$ в фактор-группе G_1/H.

Легко показать, что любой смежный класс $a_{i_1}^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{\delta_m}\cdot c_r^{\varepsilon}H$ однозначно выражается через смежные классы $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}, c$. Таким образом, неразложимая пара (G_1, H) вполное определяется числами $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_m}, \gamma$, которые взаимно однозначно выражаются через $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ с помощью инвариантов фактор-группы G_1/H (число λ определяется тем, что $\lambda\cdot p^{\gamma+(\alpha_{i_m}-\beta_{i_m})}$ — единственный инвариант фактор-группы G/H, который не является степенью простого числа p).

Ввиду разложения $G=G_2\times G_1$ имеет место

$$G/H\cong G_2\times G_1/H,$$

значит инварианты фактор-группы G/H получаются объединением инвариантов группы G_2 и фактор-группы G_1/H. Так как метод нахождения инвариантов пары (G_1, H) из инвариантов фактор-группы G/H описан в теореме 2, и он переносится на случай нашей теоремы, то нами показано, что инварианты фактор-группы G/H и группы G однозначно определяют инварианты пары (G, H). Теорема доказана.

Лемма 7. *Пусть группа G — польное прямое произведение циклических групп, среди которых счётное число конечных циклических p-групп и по крайней мере одна бесконечная циклическая группа. Пусть H — любая циклическая подгруппа группы G. Тогда пара (G, H) — разложима.*

Доказательство. Пусть конечные циклические прямые множители группы G порождаются элементами a_i порядков p^{α_i} $(i=1, 2, \ldots)$, а бесконечные — элементами c_j $(j=1, 2, \ldots)$. Рассмотрим для произвольной пары (n, s) натуральных чисел n и s подгруппу $G_{n,s}$, являющуюся полным прямым произведением циклических групп $(a_i^{\gamma_i})$ и $(c_j^{\mu_j})$, для которых $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_n=1$, $\gamma_{n+1}=\gamma_{n+2}=\ldots=0$ и $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_s=1$, $\mu_j=0$ при $j>s$. Очевидно, подгруппа $G_{n,s}$

изоморфна конечнопорождённой группе

$$\overline{G}_{n,s} = (a_1)\times\ldots\times(a_n)\times(c_1)\times\ldots\times(c_s).$$

Пусть теперь H — произвольная циклическая подгруппа группы G, имеющая вид

$$H = (a_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\delta_n}\cdot\ldots\cdot c_1^{\bar{\delta}_1}\cdot\ldots\cdot c_s^{\bar{\delta}_s}\cdot\ldots).$$

Определим циклическую подгруппу $H_{n,s}$ следующим образом:

$$H_{n,s} = (a_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\delta_n}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot c_1^{\bar{\delta}_1}\cdot\ldots\cdot c_s^{\bar{\delta}_s}\cdot 1\cdot\ldots).$$

Очевидно, подгруппа $H_{n,s}$ изоморфна циклической группе

$$\overline{H}_{n,s} = (a_1^{\delta_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\delta_n}\cdot c_1^{\bar{\delta}_1}\cdot\ldots\cdot c_s^{\bar{\delta}_s}).$$

Достаточно рассматривать только случай, когда все конечные порядки различны, так как в противном случае, согласно лемме 5, пара (G, H) заведомо разложима.

По лемме 6 пара $(\overline{G}_{n,s}, \overline{H}_{n,s})$ неразложима только тогда, когда подгруппа $\overline{H}_{n,s}$ имеет вид

$$\overline{H}_{n,1} = (a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}}\cdot c_1^{\lambda_1 p^{\gamma_1}}),$$

и группа $\overline{G}_{n,s}$ содержит только один прямой циклический множитель бесконечного порядка, причём выполняются неравенства $\alpha_1<\ldots<\alpha_n$; $\beta_1<\ldots<\beta_n<\gamma_1$; $\alpha_1-\beta_1<\ldots<\alpha_n-\beta_n$. Так как это имеет место для любых пар $(\overline{G}_{n,s}, \overline{H}_{n,s})$, то мы заключаем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо, чтобы подгруппа H имела вид

$$H = (a_1^{p^{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot a_n^{p^{\beta_n}}\cdot\ldots\cdot c_1^{\lambda p^{\gamma_1}}),$$

причём должны выполняться неравенства $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\ldots$; $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n<\ldots<\gamma_1$; $\alpha_1-\beta_1<\alpha_2-\beta_2<\ldots$. Однако для любого конечного натурального числа γ_1 в бесконечной строго возростающей последовательности натуральных чисел $\beta_1<\beta_1<\ldots$ найдётся такой конечный индекс m, для которого $\beta_m>\gamma_1$. Но тогда по лемме 6 пара $(\overline{G}_{m,1}, \overline{H}_{m,1})$ — разложима, значит и (G, H) — разложима. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть группа G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p-групп, где число прямых множителей равного порядка только конечное, и счётного числа бесконечных циклических групп. Пусть G — циклическая подгруппа группы G. Тогда инварианты фактор-группы G/H и группы G определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.*

Доказательство. Применяя метод, использованный нами в доказательстве теоремы 2, и учитывая лемму 7, группы G и H можем записать в виде

$$G = G_2\times G_1;\ H = (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}}\cdot\ldots\cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}}\cdot\ldots),$$

где $H \subset G_1$ и (G_1, H) — неразложимая пара. Тогда имеет место разложение

$$G/H \cong G_2 \times G_1/H.$$

Согласно теореме 2, инварианты фактор-группы G_1/H и группы G_1 однозначно определяют инварианты пары (G_1, H). Так как инварианты фактор-группы G_1/H легко выделяются из инвариантов фактор-группы G/H по методу, изложенному в теореме 2, то инвариантами фактор-группы G/H и группы G однозначно определяются инварианты пары (G, H). Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 4 неверна в случае, когда среди циклических прямых множителей группы G имеется счётное число групп равного конечного порядка.

Доказательство. Контрпримером может служить группа, описанная в замечании 1, если к прямым множителям группы прибавить счётное число циклических групп бесконечного порядка.

Литература

[1] М. Холл, Теория групп, *Изд. Иностранная литература*, 1962.
[2] А. Г. Курош, Теория групп, *Изд. Наука*, 1967.
[3] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О вложении подмодулей в конечнопорождённый модуль над кольцом главных идеалов, XI. Всесоюзный алгебраический коллоквиум, *Резюме сообщений и докладов, Кишинёв*, 1971, 117—118.
[4] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечнопорождённой абелевой группы и её подгруппы, *Докл. А. Н. СССР*, **210** № 5 (1973), 1004—1007.
[5] К. Бузаши, Об инвариантах пар конечных абелевых групп, *Publ. Math. (Debrecen)*, 28 (1981), 317—326.

(Поступила 18. X. 1978)