Об отображениях, сохраняющих квазиавтопараллельные кривые

Ш. БАЧО (Дебрецен)*)

1. Введение. Тензорносвязное пространство T_n является дифференциальным многообразием вместе с объектами тензорной связности $B^{ij}{}_r(x, t)$, с помощью которых можно определять абсолютный дифференциал ϑt^{ij} тензоров $t^{ij}(x)$ типа $(2, 0)$ в следующей форме

$$(1) \qquad \vartheta t^{ij} = dt^{ij} + B^{ij}_r(x, t)\, dx^r.$$

(Латинские индексы принимают значения от 1 до n, и t обозначает тензор t^{ij}, заданный в точке x.) Предположим, что $B^{ij}{}_r(x, t)$ однородная функция нулевой степени по переменной t. Тензорная связность линейна, если $B^{ij}{}_r(x, t)$ линейны по переменной t, иначе тензорная связность нелинейна. Определённые в соседних точках тензоры $t^{ij}(x)$ и $t^{ij}(x+dx)$ назовем параллельными, если (1) равно нулю. Закон преобразования объектов тензорной связности в случае координатного преобразования $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ представим в виде

$$(2) \qquad B^{rs}{}_k(x, t)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} = -\left(\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^p \partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\right) t^{mp} + \bar{B}^{ij}{}_l(\bar{x}, \bar{t})\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}.$$

Тогда ϑt^{ij} тензор типа $(2, 0)$.

В дальнейшем все рассуждения ведутся в тензорносвязном пространстве T_n^*, в котором тензорная связность отображает простой бивектор на простой бивектор[1]). В этом пространстве можно определять квазиавтопараллельную кривую и автопараллельную поверхность, которые являются обобщениями плоской кривой и плоскости аффинного пространства[2]).

Определение 1. Квазиавтопараллельной кривой назовем кривую $\gamma(t)$, вдоль которой существует параллельное поле двухмерных площадок, каждая из которых проходит через касательный вектор этой кривой в соотвествующей точке.

Если зададим вдоль кривой $\gamma(t)$ двухмерные площадки простыми бивекторами p^{ij}, то система дифференциальных уравнений квазиавтопараллельной кри-

---

*) S. Bácsó (Debrecen).

[1]) Определения и утверждения этого введения мы обсуждали подробно в [2].

[2]) Определение квазиавтопараллельных кривых вводил Н. С. Синюков в аффинносвязном и римановом пространстве (см. [1] IV. Глава).

вой на основе (1) записываемся в виде

$$\frac{dp^{ij}}{dt} + B^{ij}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt} = f(t)p^{ij}, \tag{3}$$

$$p^{ij} \wedge \frac{dx^r}{dt} = 0, \tag{4}$$

где $f(t)$ скалярная функция.

Определение 2. Двухпараметрическую поверхность пространства T_n^* назовем автопараллельной, если её касательные плоскости вдоль любых кривых поверхностей параллельны.

Таким образом, любые кривые автопараллельной поверхности являются квазиавтопараллельными. Система дифференциальных уравнений автопараллельной поверхности $x^i = x^i(u^1, u^2)$ есть

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial u^\alpha} + B^{ij}{}_r(x, p)\frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha} = \varrho_\alpha(u)p^{ij} \quad (\alpha = 1, 2) \tag{5}$$

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^i}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^j}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^j}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где $\varrho_\alpha(u)$ скалярные функции.

В настоящей работе исследуем некоторые свойства пространства T_n^*. Во втором пункте рассматривается условие для того, чтобы отображение сохраняло квазиавтопараллельные кривые. Полученный результат будет похожим к хорошо известному в аффинносвязном пространстве результату, и полученный результат содержит его как специальный случай (линейная связность, и векторы вместо бивекторов), но наши результаты более сложны. В третьем пункте исследуем проективную деформацию тензорной связности относительно квазиавтопараллельных кривых. Определим тензор, который инвариантен относительно таких деформаций. Исследуем также, какие пространства тензорной связности можно отображать на линейные тензорносвязные пространства так, чтобы эти отображения сохраняли квазиавтопараллельные кривые.

2. Квазиавтопараллельное отображение. Пусть T_n^* и $\tilde{T}_n^*$ два тензорносвязные пространства, обозначим через L отображение, определяющее для точки (x) пространства T_n^* тождественную координатную точку пространства $\tilde{T}_n^*$. Отображение L будем называть в дальнейшем коротко квазиавтопараллельным, если каждая квазиавтопараллельная кривая пространства T_n^* переходит в квазиавтопараллельную кривую пространства $\tilde{T}_n^*$ при отображении L.

Теорема 1. *Отображение L является квазиавтопараллельным тогда и только тогда, если существует контравариантное векторное поле $\varphi^k(x, p)$, такое что*

$$\begin{cases} \text{a)} \quad \tilde{B}^{kl}{}_r(x, p) = B^{kl}{}_r(x, p) + c\varphi^k(x, p)\delta_r^l - c\varphi^l(x, p)\delta_r^k \\ \text{b)} \quad p^{ij} \wedge \varphi^k(x, p) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $B^{kl}{}_r(x, p)$ *и* $\tilde{B}^{kl}{}_r(x, p)$ *являются объектами пространства* T_n^* *и* $\tilde{T}_n^*$, c *константа.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* В системе дифференциальных уравнений (3), (4) квазиавтопараллельной кривой уравнения (4) независимы от выбора параметра. Переходим от уравнений (3) к следующему эквивалентному виду

$$p^{kl}\left(\frac{dp^{ij}}{dt}+B^{ij}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)-p^{ij}\left(\frac{dp^{kl}}{dt}+B^{kl}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)=0. \tag{8}$$

Действительно из уравнений (3) непосредственно следует (8). Наоборот: если мы запишем уравнения (8) в следующем виде

$$\frac{\dfrac{\vartheta p^{ij}}{dt}}{\dfrac{\vartheta p^{kl}}{dt}}=\frac{p^{ij}}{p^{kl}}, \tag{9}$$

то очевидно, что $\dfrac{\vartheta p^{ij}}{dt}$ пропорционально бивектору p^{ij}. Если теперь в случае пары индексов i, j $(i\neq j)$: $\dfrac{\vartheta p^{ij}}{dt}=f(t)p^{ij}$, то в силу (9) и в случае каждой другой пары индексов k, l: $\dfrac{\vartheta p^{kl}}{dt}=f(t)p^{kl}$.

Итак $f(t)$ назависима от выбора пары индексов i, j, т. е. в случае любой пары индексов i, j: $\dfrac{\vartheta p^{ij}}{dt}=f(t)p^{ij}$.

Очевидно, что система уравнений (8) независима от выбора параметра, в то же время как в правой стороне системы уравнений (3) вместо функции $f(t)$ после преобразования параметра $t=t(\tau)$ получается $f(t(\tau))\dfrac{dt}{d\tau}$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений пространств T_n^*, $\tilde{T}_n^*$ будет иметь вид

$$p^{kl}\left(\frac{dp^{ij}}{dt}+B^{ij}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)-p^{ij}\left(\frac{dp^{kl}}{dt}+B^{kl}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)=0, \tag{10}$$

$$p^{ij}\wedge\frac{dx^r}{dt}=0, \tag{11}$$

$$p^{kl}\left(\frac{dp^{ij}}{dt}+\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)-p^{ij}\left(\frac{dp^{kl}}{dt}+\tilde{B}^{kl}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{dt}\right)=0, \tag{12}$$

$$p^{ij}\wedge\frac{dx^r}{dt}=0. \tag{13}$$

Уравнения (11) и (13) тождественны, и они не зависят от объектов $B^{ij}{}_r(x, p)$ и $\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)$, так что мы должны исследовать, при каких объектах $B^{ij}{}_r(x, p)$ и $\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)$ эквивалентны уравнения (10) и (12). Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие уравнения

$$\text{(14)}\qquad \left[p^{kl}\left(\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)-B^{ij}{}_r(x, p)\right)-p^{ij}\left(\tilde{B}^{kl}{}_r(x, p)-B^{kl}{}_r(x, p)\right)\right]\frac{dx^r}{dt}=0.$$

Действительно, если (10) и (12) выполняются, то их разностью является (14), и обратно из (14) и (10) следует (12), и таким же образом из (14) и (12) следует (10).

Пусть ξ произвольной вектор в точке (x_0) пространства T_n^*, и p^{ij} простой бивектор в точке плоскость которого содержит ξ. Известно, что из любой точки x пространства T_n^* исходит квазиавтопараллельная кривая, касательной которой в точке (x_0) является ξ, и плоскость этой квазиавтопараллельной кривой, заданная в определении квазиавтопараллельной кривой, является плоскостью бивектора p^{ij} (см. [I] Теорема 3). Тогда

$$\left.\frac{dx^r}{dt}\right|_{t_0}=\xi^r \quad \text{и} \quad p^{mn}(t_0)=\frac{1}{2}(\xi^m\eta^n-\xi^n\eta^m)$$

при хорошо выбранном векторе η $(\eta \nparallel \xi)$.

Употребляем в дальнейшем следующее обозначение

$$\text{(15)}\qquad \tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)-B^{ij}{}_r(x, p)=\sigma^{ij}{}_r(x, p).$$

$\sigma^{ij}{}_r$ вследствие (2) тензор. Учитывая это, из (14) получается

$$\text{(16)}\qquad (\sigma^{ij}{}_r\delta^k_m\delta^l_n-\sigma^{kl}{}_r\delta^i_m\delta^j_n)\frac{1}{2}(\xi^m\eta^n-\xi^n\eta^m)\xi^r=0.$$

Уравнения (16) имеют следующий вид

$$\text{(17)}\qquad K^{ij}{}_r{}^{kl}{}_{mn}\xi^m\eta^n\xi^r=0,$$

где

$$K^{ij}{}_r{}^{kl}{}_{mn}=\sigma^{ij}{}_r\delta^k_{[m}\delta^l_{n]}-\sigma^{kl}{}_r\delta^i_{[m}\delta^j_{n]},$$

причём квадратная скобка обозначает альтернацию. В уравнениях (17) векторы ξ и η свободно изменяются, потому что $p^{ij}(t_0)$ произвольный бивектор $(p^{ij}\neq 0)$. Так (17) являются многочленами с $2n$ переменными переменные ξ и η, степень многочленов по переменным не выше двух. Так (17) тогда и только тогда равны нулю, если

$$K^{ij}{}_{(r}{}^{kl}{}_{m)n}=0,$$

т.е.

$$\sigma^{ij}{}_r\delta^k_{[m}\delta^l_{n]}-\sigma^{kl}{}_r\delta^i_{[m}\delta^j_{n]}+\sigma^{ij}{}_m\delta^k_{[r}\delta^l_{n]}-\sigma^{kl}{}_m\delta^i_{[r}\delta^j_{n]}=0.$$

Свертывая по индексам i и m, а потом по индексам j и n получим

$$\sigma^{kl}{}_r-\sigma^{lk}{}_r-n^2\sigma^{kl}{}_r+n\sigma^{kl}{}_r+\sigma^{il}{}_i\delta^k_r-\sigma^{ik}{}_i\delta^l_r-n\sigma^{kl}{}_r+\sigma^{kl}{}_r=0.$$

Так, как $B^{ij}{}_r(x, p)$ и $\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)$ кососимметричны по индексам i и j, поэтому и тензор $\sigma^{ij}{}_r$ кнсосимметричен (см. [1] Теорема 1). Тогда

(18) $$(-n^2+3)\sigma^{kl}{}_r = \sigma^{ik}{}_i\delta^l_r - \sigma^{il}{}_i\delta^k_r.$$

Если вводим обозначение

$$\varphi^k(x, p) = \frac{1}{-n^2+3}\sigma^{ik}{}_i(x, p),$$

то на основе (18) и (15) получим (7а), где $c = -\dfrac{n^2-3}{n-1}$.

Итак, если L квазиавтопараллельно, то имеют место (10), (12) и (7а). Если уравнения (7а) запишем в (12) и из полученных уравнений вычитаем (10), тогда имеем

(19) $$p^{kl}\varphi^i\dot{x}^j - p^{kl}\varphi^j\dot{x}^i - p^{ij}\varphi^k\dot{x}^l + p^{ij}\varphi^l\dot{x}^k = 0 \quad \left(\dot{x}^k = \frac{dx^k}{dt}\right),$$

которые можно записать в виде

(20) $$p^{kl}q^{ij} = p^{ij}q^{kl},$$

где $q^{ij} = \varphi^i\dot{x}^j - \varphi^j\dot{x}^i$. Из (20) следует, что $p^{ij} = \lambda q^{ij}$ с некотором фактором λ. Последние уравнения покажут, что плоскости простых бивекторов p^{ij} и q^{ij} тождественны, итак φ принадлежит плоскости бивектора p^{ij}: $p^{ij}\wedge\varphi^k = 0$. Так (7б) выполняется.

II. Достаточность. Покажем, что если удовлетворяется (7) и $x^i(t)$ квазиавтопараллельная кривая в пространстве T_n^*, то $x^i(t)$ квазиавтопараллельная кривая и в пространстве $\tilde{T}_n^*$. Если $x^i(t)$ квазиавтопараллельная кривая в пространстве T_n^*, то удовлетворяются (10) и (11) с некоторым бивектором $p^{ij}(t)$. Тогда $x^i(t)$ и $p^{ij}(t)$ удовлетворяют и уравнениям (12). Действительно, записывая уравнения (7а) в (12), и вычитая (10) из полученных уравнений получаются (19), которые выполняются тождественно (изпользуя (7б)). Итак, если (7а, б) выполняется, то $x^i(t)$ и $p^{ij}(t)$ удовлетворят уравнения (12). Выполнение уравнений (13) тривиально.

Если предположим, что в пространствах T_n^* и $\tilde{T}_n^*$ в произвольной точке к каждой плоскости (как к касающейся плоскости) существует автопараллельная поверхность, то очевидно, что при квазиавтопараллельном отображении L автопараллельные поверхности пространства T_n^* переходят в автопараллельные поверхности пространства $\tilde{T}_n^*$. Доказательство является аналогом доказательства Теоремы 1.

3. Инвариантный тензор относительно квазиавтопараллельных отображений. Дифференцируя два раза по переменных p^{ij} объекта тензорной связности $B^{ij}{}_r(x, p)$ получаем так называемый аллинейный тензор

(21) $$A_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = \frac{\partial B_{kl}{}^{ij}{}_r}{\partial p^{mn}},$$

где $B_{kl}{}^{ij}{}_r = \dfrac{\partial B^{ij}{}_r}{\partial p^{kl}}$. То, что (21) является тензором следует из (2). Очевидно, если $A_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = 0$, то тензорная связность $B^{ij}{}_r(x, p)$ по переменной p линейна.

Из (7а) следует, что

$$\tilde{B}_{kl}{}^{ij}{}_r = B_{kl}{}^{ij}{}_r + c\varphi_{kl}{}^i \delta^j_r - c\varphi_{kl}{}^j \delta^i_r$$

где

$$\varphi_{kl}{}^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial p^{kl}}.$$

Так

(22) $$\tilde{A}_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = A_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} + c\varphi_{kl}{}^i{}_{mn} \delta^j_r - c\varphi_{kl}{}^j{}_{mn} \delta^i_r,$$

где

$$\varphi_{kl}{}^i{}_{mn} = \frac{\partial \varphi_{kl}{}^i}{\partial p^{mn}}.$$

Вследствие (22) пвлучаем

(23) $$\tilde{A}_{kl}{}^i{}_{mn} = A_{kl}{}^i{}_{mn} + c(n-1)\varphi_{kl}{}^i{}_{mn},$$

где $A_{kl}{}^i{}_{mn} = A_{kl}{}^{ij}{}_{mnj}$.

Построим следующий тензор

(24) $$T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = A_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} - \frac{1}{n-1}(A_{kl}{}^i{}_{mn}\delta^j_r - A_{kl}{}^i{}_{mn}\delta^i_r).$$

Уравнения (7а) можно считать деформацией тензорной связности, переносящей объекты $B^{ij}{}_r(x, p)$ в $\tilde{B}^{ij}{}_r(x, p)$. Такая деформация объектов $B^{ij}{}_r(x, p)$ сохраняет квазиавтопараллельные кривые. Эту деформацию можно называть проективной, сравнивая с соотвествующим случаем аффинной связности.

Исследуем поведение тензора (24) при проективной деформации тензорной связности.

Используя (22) и (23) находим

$$\tilde{T}_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr}.$$

Итак, нами доказана

Теорема 2. *Тензор* (23) *является инвариантным относительно квазиавтопараллельных отображений.*

Если тензорная связность линейна по переменной p, то $T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr} = 0$. Так вследствие Теоремы 2 имеет место.

Теорема 3. *Если тензорносвязное пространство T^*_n допускает квазиавтопараллельное отображение на линейное тензорносвязное пространство $\tilde{T}^*_n$, то тензор $T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr}$ пространства T^*_n равен нулю.*

Если тензор $T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr}$ равен нулью, то уравнения (24) для любых фиксированных индексов k, l, m, n являются линейной однородной системой уравнений с неизвестными $A^{ij}{}_r$

(25) $$A^{ij}{}_r - \frac{1}{n-1}(A^{is}{}_s\delta^j_r - A^{js}{}_s\delta^i_r) = 0.$$

(В (25) мы не написали фиксированные индекси k, l, m, n.) Определитель этой системы не равен нулю в специальном случае $n = 2$, и тогда из исчезновения тензора $T_{kl}{}^{ij}{}_{mnr}$ следует, что тензорная связность линейна. В случае $n=3$ уравнения эквивалентны с уравнениями

$$B^{13}{}_1 = B^{23}{}_2, \; B^{12}{}_2 = B^{13}{}_3, \; B^{23}{}_3 = B^{21}{}_1.$$

Итак удовлетворение этих уравнений необходимо для того, чтобы T_n^* допустило квазиавтопараллельные отображения на линейное тензорносвязное пространство. В случае $n>3$ полученные уравнения более сложны.

Литература

[1] Н. С. Синюков, Геодезические отображения римановых пространств. Москва, Наука, 1979.

[2] L. Tamássy—S. Bácsó, On quasiautoparallel curves in tensorially connected spaces. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* Differential geometrie *(to appear).*

(Поступилов 31. XII. 1978)