О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса

С. Д. БЕРМАН (Харьков)—К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Пусть группа G содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Тогда, очевидно, G обладает бесконечным циклическим нормальным делителем $H=(a)$ конечного индекса. Простейшим представителем групп этого класса является бесконечная группа диэдра $D=(a)\cdot(b)$; $b^2=1$; $b^{-1}ab=a^{-1}$; (a) — бесконечная циклическая группа.

В [1] были изучены все конечно порождённые KD-модули в предположении, что K — поле, характеристика которого отлична от 2. В этой заметке, опираясь на результаты статьи [1], мы рассматриваем представления упомянутых групп G. Поле K предполагается алгебраически замкнутым, с некоторым ограничением на характеристику.

Лемма 1. *Пусть группа G содержит нормальный делитель H индекса 2, который представляется в виде полупрямого произведения конечного нормального делителя F и бесконечной циклической группы (a). Пусть K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок F. Тогда алгебра KG разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двухсторонних идеалов*

$$KG = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_s,$$

где A_i — полное матричное кольцо над групповой алгеброй KG_i, а G_i либо бесконечная циклическая группа, либо бесконечная группа диэдра.

Доказательство. Очевидно, подгруппа F является также нормальным делителем группы G, так как F состоит из всех элементов конечного порядка группы H. Пусть $G/H=(cH)$. Тогда

$$c^2 = f_1 a^i \tag{1}$$

и

$$c^{-1}ac = f_2 a, \tag{2}$$

или

$$c^{-1}ac = f_3 a^{-1} \quad (f_1, f_2, f_3 \in F). \tag{3}$$

Предположим, что имеет место (2). Покажем, что в этом случае группа G есть полупрямое произведение конечного нормального делителя и бесконечной циклической группы. В самом деле, если в (1) $i=0$, то подгруппа $F_1=\{F, c\}$ есть нормальный делитель группы G, ибо, в силу (2), $aca^{-1}=cf_2$, $f_2\in F$ и $G=F_1\cdot(a)$. Пусть $i=2m$. Тогда, полагая $c_1=ca^{-m}$, получим $c_1^2\in F$

и, как и выше, $F_1=\{F, c\}$ — нормальный делитель группы G, и $G=F_1\cdot(a)$. Пусть $i=2m+1$. Снова получаем $c_1=ca^{-m}$, и тогда $c_1^2=af$, $f\in F$ и, значит, $G=F\cdot(c_1)$.

Пусть выполняется равенство (3). Тогда в (1) показатель i обязательно равен нулю. Действительно, при $i\neq 0$, с одной стороны, в силу (3)

$$c^{-1}f_1 a^i c = fa^{-i}, \quad f\in F,$$

а, с другой стороны, $c^{-1}f_1a^ic=f_1a^i$, что даёт равенство $fa^{-i}=f_1a^i$, приводящее к противоречию.

Итак, группа G либо представляется в виде полупрямого произведения конечного нормального делителя и бесконечной циклической группы, либо

(4) $$G/H=(cH)$$

где $c^2=f_1\in F$, $c^{-1}ac=a^{-1}f_2$ и $H=F\cdot(a)$.

Докажем утверждение леммы в случае (4). Алгебра KF разлагается в прямую сумму минимальных двухсторонних идеалов, изоморфных полным матричным кольцам над полем K:

$$KF=I_1\dotplus\ldots\dotplus I_s.$$

Пусть e_i — идемпотент центра KF, порождающий идеал I_i $(i=1, \ldots, s)$. Под действием группы (a) множество идемпотентов $\mathfrak{M}=\{e_1, \ldots, e_s\}$ распадается на орбиты

(5) $$\{e_{11}, \ldots, e_{1t_1}\}, \ldots, \{e_{r1}, \ldots, e_{rt_r}\}.$$

Положим

$$u_i=e_{i1}+\ldots+e_{it_i} \quad (i=1, \ldots, r).$$

Идемпотенты u_i также распадаются на орбиты под действием группы (c), каждая из которых содержит либо один, либо два элемента. После перенумерации идемпотентов эти орбиты можно записать в виде

(6) $$\{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_{2q-1}, u_{2q}\}, \quad u_{2q+1}, \ldots, u_{2q+m}.$$

Положим

(7) $$\bar{u}_i=u_{2i-1}+u_{2i} \quad (i=1, \ldots, q); \; \bar{u}_{q+j}=u_{2q+j} \quad (j=1, \ldots, m).$$

Тогда $\bar{u}_i$ $(i=1, \ldots, n=q+m)$ — идемпотенты центра алгебры KG, и имеет место ортогональное разложение

(8) $$KG=A_1\dotplus\ldots\dotplus A_n; \quad A_i=KG\bar{u}_i \quad (i=1, \ldots, n).$$

Покажем, что каждая из алгебр $A_1, \ldots, A_q$ изоморфна полному матричному кольцу над групповой алгеброй бесконечной циклической группы, а каждая из алгебр $A_{q+1}, \ldots, A_n$ — полному матричному кольцу над групповой алгеброй бесконечной группы диэдра.

Рассмотрим сначала алгебры $A_{q+1}, \ldots, A_n$. Имеем

(9) $$A_i=KGe_{i1}+\ldots+KGe_{it_i} \quad (i=q+1, \ldots, n).$$

(см. (5), (7)). Так как идемпотенты e_{ij} переходят друг в друга под действием внутренних автоморфизмов группы G, то левые идеалы алгебры KG в правой части (9) между собой KG — изоморфны. Следовательно, кольцо KG — эндоморфизмов R алгебры A_i изоморфно полному матричному кольцу порядка t_i над польцом эндоморфизмов $\tilde{R}$ идеала $I_{i1}=KGe_{i1}$.

Пусть $N=\{g\in G | g^{-1}e_{i1}g=e_{i1}\}$ — стабилизатор идемпотента e_{i1} в группе G. Так как (a) — орбита идемпотента e_{i1} содержит точно t_i элементов, то $N\cap(a)=(a^{t_i})$. Кроме того, N содержит элемент вида ca^j, ибо орбита $\{e_{i1}, \ldots, e_{it_i}\}$ по условию выдерживает также действие элемента c. Отсюда легко вытекает, что

$$N = \{F, a^{t_i}, ca^j\}.$$

Каждый GK-эндоморфизм идеала I_{i1} задаётся формулой

$$\theta(e_{i1}) = xe_{i1}, \tag{10}$$

где $x\in KG$. Так как $e_{i1}ge_{i1}=0$ для любого $g\notin N$, то можно считать, что в (10) $x\in KN$. Отсюда сразу получаем, что кольцо KG-эндоморфизмов идеала I_{i1} инверсно изоморфно кольцу $B=KNe_{i1}$. Покажем, что B изоморфно полному матричному кольцу над групповой алгеброй KD, где D — бесконечная группа диэдра. Положим $a_1=a^{t_i}$, $c_1=ca^j$, $B_1=KFe_{i1}$. По условию $a_1^{-1}B_1a_1=B_1$. Так как B_1 — полное матричное кольцо над полем K, то каждый автоморфизм алгебры B_1 является внутренним, и поэтому, для некоторого фиксированного $x_1\in B_1$, $a_1^{-1}za_1=x_1^{-1}zx_1$ для всех $z\in B_1$. Тогда элемент $a_2=a_1x_1^{-1}$ перестановочен с каждым элементом алгебры B_1. Точно так же $c_1^{-1}B_1c_1=B_1$ и, следовательно, некоторый элемент $c_2=c_1y^{-1}$, $y\in B_1$ перестановочен с каждым элементом $z\in B_1$, причём, в силу (4)

$$c_2^{-1}a_2c_2 = a_2^{-1}x,\ x\in B_1,\ c_2^2 = x_2\in B_1. \tag{11}$$

Выберём элемент $z_1\in B_1$ так, чтобы выполнялось равенство

$$xz_1 = z_1^{-1}. \tag{12}$$

(Такой выбор возможен, так как x — обратимый в B_1 элемент, а K — алгебраически замкнутое поле.) Так как c_2 коммутирует с каждым элементом алгебры B_1, то, ввиду (11) и (12) имеем

$$c_2^{-1}a_2z_1c_2 = a_2^{-1}z_1^{-1}. \tag{13}$$

Далее найдём такой элемент $z_2\in B_1$, что

$$z_2^2 = x_2 \tag{14}$$

(см. (11)). Тогда $(c_2z_2^{-1})^2=e_{i1}$, где e_{i1} — единица алгебры B_1. Положим $a_3=a_2z_1$, $c_3=c_2z_2^{-1}$. Тогда, на основании (13) и (14)

$$c_3^{-1}a_3c_3 = a_3^{-1},\ c_3^2 = e_{i1}, \tag{15}$$

то есть элементы a_3 и c_3 порождают бесконечную группу диэдра. Каждый элемент алгебры $B=KNe_{i1}$ однозначно записывается в виде

$$\sum_i z_i\Big(\sum_{s,t} \lambda_{st}a_1^s c_2^t\Big), \tag{16}$$

где $z_i \in B_1$, $\lambda_{st} \in K$. Из формул для элементов a_3, c_3 и (16) легко следует, что элемент вида (16) допускает также однозначную запись вида

$$\sum_i z_i' (\gamma_{st} a_3^s c_3^t), \tag{17}$$

$z_i' \in B_1$, $\gamma_{st} \in K$. Так как элементы a_3 и c_3 перестановочны с элементами B_1, то формула (17) показывает, что алгебра $B = KNe_{i1}$ есть тензорное произведение групповой алгебры группы диэдра $\{a_3, c_3\} = D$ с полным матричным кольцом B_1 над полем K, т. е. B есть полное матричное кольцо над KD. Тогда кольцо $\tilde{R}$ KG-эндоморфизмов идеала KGe_{i1} также есть полное матричное кольцо над KD, а кольцо эндоморфизмов идеала $KG\bar{u}_i$, будучи полным матричным кольцом над $\tilde{R}$, также будет полным матричным кольцом (конечно, другого порядка) над KD.

Окончательно получим, что алгебра $KG\bar{u}_i$ $(i = q+1, \ldots, n)$ изоморфна полному матричному кольцу над KD.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $i = 1, \ldots, q$. В этом случае стабилизатор N идемпотента e_{i1} в G совпадает с циклической группой (a^{t_i}). Положим $a_1 = a^{t_i}$, $B_1 = KFe_{i1}$, $a_1^{-1} z a_1 = x^{-1} z x$ для всех $z \in B_1$, и, дословно повторяя рассуждения для $i \geqq q+1$, получим, что алгебра $A_i = KG\bar{u}_i$ есть полное матричное кольцо над групповой алгеброй $K(a_2)$, где $a_2 = a_1 x^{-1}$.

Итак, в (8) алгебры $A_1, \ldots, A_q$ суть полные матричные кольца над групповыми алгебрами бесконечных циклических групп, а алгебры $A_{q+1}, \ldots, A_n$ — полные матричные кольца над групповой алгеброй бесконечной группы диэдра. Лемма доказана.

Замечание 1. Из известных теорем теории представлений конечных групп m (число идемпотентов $\bar{u}_i$, совпадающих с идемпотентами u_i) есть одновременно число таких классов сопряжённых элементов группы H, которые лежат в F, и одновременно являются классами сопряжённых элементов группы G.

Лемма 2. *Пусть группа G содержит такой нормальный делитель H, что H — бесконечная циклическая группа, лежащая в центре группы G, а G/H — конечная разрешимая группа. Тогда G представляется в виде полупрямого произведения $G = F(b)$ конечного нормального делителя F и бесконечной циклической группы (b).*

Доказательство. Докажем сначала частный случай леммы в предположении, что G/H — абелева группа. Если $b, c \in G$, то

$$c^{-1} bc = ba^i \quad ((a) = H). \tag{18}$$

Пусть $i \neq 0$. Так как G/H — конечная группа, для некоторого натурального n имеет место $b^n \in (a)$, и, в силу (18) и того, что (a) лежит в центре G, $b^n = c^{-1} b^n c = b^n a^{in}$, откуда $a^{in} = 1$, что невозможно. Следовательно, $i = 0$ и $c^{-1} bc = b$, то есть G — абелева. Группа G — конечно порождена, ибо индекс $(G:H)$ конечен. Значит, имеет место прямое разложение $G = F \times G_1$, где F — конечная группа, а G_1 — свободная группа. Если бы группа G_1 не была цикличной, то G не содержала бы бесконечную циклическую группу конечного индекса. Следовательно, G_1 — циклическая группа.

Предположим теперь, что G/H — произвольная разрешимая конечная группа. Построим нормальный ряд группы

$$H \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = G$$

с абелевыми факторами $H_1/H, \ldots, H_s/H_{s-1}$. Будем доказывать лемму индукцией по числу s. При $s=1$ она уже доказана. Пусть лемма установлена для всех $s<m$ и докажем её для $s=m$. В силу предположения индукции $H_{m-1}=F_{m-1}\cdot(b)$, где F_{m-1} — конечный нормальный делитель группы H_{m-1}, а (b) — бесконечная циклическая группа. Так как F_{m-1} состоит из всех элементов конечного порядка в H_{m-1}, то F_{m-1} — нормальный делитель группы G. Имеем

$$G/H_{m-1} \cong G/F_{m-1}/H_{m-1}/F_{m-1}.$$

Покажем, что $H_{m-1}/F_{m-1}=(bF_{m-1})$ лежит в центре группы G/F_{m-1}, то есть что $g^{-1}bg=bf$ для любого $g\in G$, $g\notin H_{m-1}$, $f\in F_{m-1}$. В самом деле, предположим, что

$$g^{-1}bg = b^{-1}f, \quad f\in F_{m-1}. \tag{19}$$

Каждый элемент бесконечного порядка в H_{m-1} имеет вид $b^if_1, f_1\in F_{m-1}$. В частности, $a=b^if_2$ $(i\neq 0)$. Тогда, в силу (19)

$$g^{-1}ag = g^{-1}b^if_1g = b^{-i}f_2 \quad (f_1, f_2\in F_{m-1}),$$

а, с другой стороны, $g^{-1}ag=a=b^if_1$, ибо a — элемент центра группы G. Теперь равенство $b^if_1=b^{-i}f_2$ ведёт к противоречию. Значит $g^{-1}bg=bf$ и (bF_{m-1})-центральный бесконечный циклический нормальный делитель группы G/F_{m-1}, фактор-группа по которому абелева. По доказанному, имеет место прямое разложение

$$G/F_{m-1} = (cF_{m-1})\times(\tilde{F}/F_{m-1}), \tag{20}$$

где $\tilde{F}/F_{m-1}$ — конечный нормальный делитель группы G/F_{m-1}, а (cF_{m-1}) — бесконечная циклическая группа. Из (20) следует, что $G=\tilde{F}\cdot(c)$, где $\tilde{F}$ — конечный нормальный делитель в G, а c — элемент бесконечного порядка. Индукция завершена и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть алгебра B является тензорным произведением полного матричного кольца K_n над полем K и алгебры A с единицей над полем K. Тогда каждый B-модуль M изоморфен тензорному произведению*

$$M = M_{1_K}\otimes M_2,$$

где M_1 — неприводимый K_n-модуль, а M_2 — A-модуль. B-модули M изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие A-модули M_2. В частности, модуль M разложим тогда и только тогда, когда разложим модуль M_2.

Доказательство. Пусть M — произвольный (не обязательно конечномерный над K) B-модуль. Тогда индуцированный модуль M_{K_n} вполне приводим, причём он разлагается в прямую сумму изоморфных между собой неприводимых K_n-модулей $M=\sum\dot{+}M_i$, где i пробегает некоторое множество индексов. Выберем в каждом из конечномерных подпространств M_i такие

K-базисы $\{e_{i1}, \ldots, e_{in}\}$, в которых каждому элементу $x \in K_n$ соответствует одна и та же матрица $\Gamma(x)$. Пусть $E = \bigcup_i \{e_{i1}, \ldots, e_{in}\}_1$ — K-базис пространства M, полученный путём объединения базисов пространств M_i. Тогда элементам $x \in K_n$ в базисе E соответствуют диагональные матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(x) & & \\ & \Gamma(x) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{21}$$

а элементам $y \in A$ — блочные матрицы

$$y \to (\Gamma_{ij}), \tag{22}$$

где для всех (i, j) выполняются условия коммутирования $\Gamma_{ij} \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x) \cdot \Gamma_{ij}$. Так как матрица $\Gamma(x)$ пробегает кольцо K_n, когда x пробегает K_n, то $\Gamma_{ij}(y)$ — скалярные матрицы

$$\Gamma_{ij}(y) = \lambda_{ij} E_n, \tag{23}$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Тогда

$$y \to (\lambda_{ij}) \tag{24}$$

есть (вообще говоря, бесконечное) матричное K-представление алгебры A. Этому представлению соответствует A-модуль M_2 с базисом $\{u_1, u_2, \ldots\}$ где

$$yu_i = \sum \lambda_{ij} u_j \quad (y \in A).$$

Тогда базисные элементы $e_{ij} \in E$ естественным образом можно записать в виде $e_{ij} = e_i \cdot u_j$, где $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированный базис неприводимого K_n-модуля M_1. А это сразу показывает, что $M = M_{1_K} \otimes M_2$. Далее, всякая K-матрица, коммутирующая с матрицами (21), имеет вид (22), (24), и, следовательно, эквивалентные K-представления алгебры B дают эквивалентные представления (24) алгебры A, и наоборот. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — произвольная группа, содержащая циклическую подгруппу конечного индекса. Тогда группа G содержит такой нормальный делитель H индекса $\leqq 2$, что $H = F \times S$, где F — конечный нормальный делитель H, а S — бесконечная циклическая группа. Пусть K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок F и не равна 2. Пусть l — число классов сопряжённых элементов H в F, а m — число тех из этих классов, которые одновременно являются классами группы G. Тогда:*

1. *Групповая алгебра KG является ортогональной суммой $r = m + \dfrac{l-m}{2}$ двухсторонних идеалов*

$$KG = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_r, \tag{25}$$

где каждый идеал A_i есть полное матричное кольцо над групповой алгеброй KG_i, G_i — либо бесконечная циклическая группа, либо бесконечная группа диэдра. Если группа G действует в фактор-группе H/F тривиально, то все группы G_i — бесконечные циклические. Если группа G действует в H/F нетривиально, *то (после перенумерации) среди групп G_i имеется точно m групп диэдра и $\frac{1}{2}(l-m)$ бесконечных циклических групп.*

2. *Каждый конечно порождённый KG-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых циклических модулей. KG-модуль M неразложим тогда и только тогда, когда он является неразложимым A_i-модулем для некоторого i* (*см.* (25)). *Неразложимые A_i-модули взаимно однозначно соответствуют неразложимым KG_i-модулям, и находятся в соответствии с леммой 3. Число неразложимых бесконечномерных над K KG-модулей равно r, если G действует в H/F тривиально, и $\frac{1}{2}(l-m)+4m$, если G действует в H/F нетривиально.*

Доказательство. Если группа G содержит циклическую подгруппу конечного индекса, то она содержит также циклический нормальный делитель (b) конечного индекса. Пусть H — централизатор элемента $b\in G$. Тогда подгруппа H является нормальным делителем группы G индекса $\leqq 2$. В самом деле, сопоставляя каждому элементу $a\in G$ автоморфизм $a^{-1}xa$ группы (b) с ядром H, и учитывая теорему о гомоморфизмах, мы получим $(G:H)=2^{\alpha}$, $(\alpha=0, 1)$.

Однако известно (см. [4] гл. 7.), что если фактор-группа группы по её центру конечна, то коммутант группы конечен. В силу этой теоремы коммутант H' группы H конечен. Значит фактор-группа H/H' — конечно-порождённая абелева группа.

Пусть F/H' — периодическая часть группы H/H'. Тогда F — конечный нормальный делитель группы H, а фактор-группа H/F — свободная абелева группа. Следовательно, $H=F\times S$, где S — свободная абелева группа. Очевидно, S — циклическая группа, ибо в противном случае H содержала бы бесконечный циклический нормальный делитель бесконечного индекса. Этим самым утверждение теоремы о структуре группы G доказано.

Все утверждения пункта 1 нашей теоремы содержатся в леммах 1 и 2, и в замечании 1.

Докажем утверждения пункта 2. Пусть M — конечно-порождённый KG-модуль. Тогда M разлагается в прямую сумму конечно порождённых A_i-модулей (см. 25)). Если N — конечно порождённый A_i-модуль, то N будет также конечно порождённым KG_i-модулем. Тогда N разлагается в прямую сумму неразложимых циклических KG_i-модулей. Это очевидно в случае, когда G_i — бесконечная йиклическая группа, и доказано в [1] в случае, если G_i — бесконечная группа диедра. Разложению N в прямую сумму циклических модулей по лемме 3 соответствует разложение модуля M в сумму неразложимых A_i-модулей, которые будут цикличны, ибо тензорное произведение $M_{1_K}\otimes M_2$ (см. обозначения леммы 3) — циклический A_i-модуль. Далее в [1] показано, что число бесконечномерных над K неразложимых KD-модулей (D — бесконечная группа диэдра) равно 4. В сочетании с леммой 3 это доказывает остальные утверждения теоремы.

Замечание 2. Если среди алгебр A_i в (25) встречаются матричные кольца над KD (D — бесконечная группа диэдра), то разложение конечно порождённых KG-модулей в прямую сумму неразложимых циклических модулей неоднозначно. В [1] показано, что KD имеет 4 неразложимыл проективных модуля, и что группа $K_0(KD)$ есть свободная абелева группа ранга 3. В соответствии с этим результатом из теоремы 1 и леммы 3 сразу получаем, что группа $K_0(KG)$ есть свободная абелева группа ранга $r=m+\frac{1}{2}(l-m)$, если G действует в H/F тривиально, и свободная абелева группа ранга $\frac{1}{2}(l-m)+4m$, если G действует в H/F нетривиальио.

Литература

[1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О придставлениях бесконечной группы диэдра, *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1981), 173—187.
[2] А. Картан—С. Ейленберг, Гомологическая алгебра, *Изд. иностр. лит.*, 1960.
[3] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, *Изд. Наука*, 1969.
[4] J. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Springer, 1975.

(Поступило 9. XII. 1978.)