О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования*)

С. Д. БЕРМАН, Н. И. ВИШНЯКОВА

Пусть R — нёнетерово кольцо нормирования, а I, J — такие ненулевые идеалы кольца, что $I \subset J$. Найдены необходимые и достаточные условия равенства $I = JL$, где L — идеал кольца R.

Кольцом нормирования называется такое коммутативное кольцо с единицей ($1 \neq 0$), что из любых двух элементов $a, b \in R$ либо a делит b, либо b, делит a.

В дальнейшем буква R всегда будет обозначать ненётерово кольцо нормирования.

Введем ряд обозначений и определений.

Будем употреблять стандартные обозначения $\subset$, $\subseteq$ для включений подмножеств.

Кольцо R содержит единственный максимальный идеал V, состоящий из всех необратимых элементов кольца, а каждый конечно порожденный идеал кольца R — главный. Таким образом, R — локальное кольцо Безу.

Элемент $a \in R$ называется регулярным, если a не является делителем нуля. Все нерегулярные элементы кольца R образуют простой идеал A кольца.

Пусть I, J — ненулевые идеалы кольца R. Будем говорить, что эти идеалы принадлежат одному классу, если найдутся такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$. Легко видеть, что множество всех ненулевых идеалов кольца R распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образует один класс.

Стабилизатором идеала $I \neq 0$ кольца R (обозначение $S(I)$) будем называть совокупность всех элементов $a \in R$, для которых $aI = I$. Очевидно, $S(I)$-подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R, причем $0 \overline{\in} S(I)$.

Аннулятор идеала $I \subseteq R$ обозначим через $\operatorname{Ann} I$, и если $I \subset (a)$, то через $a^{-1}I$ условимся обозначать идеал $J = \{b \in R, ba \in I\}$.

Пусть I — ненулевой идеал кольца R. Высотой $W = W_I(a)$ элемента a в I назовем идеал $W = \bigcap(\lambda)$, где λ пробегает все элементы кольца R, для которых $\lambda b = a$, $b \in I$.

Легко доказываются следующие предложения.

---

*) Формулировки теорем статьи опубликованы в Докладах Академии Наук Армунской ССР, Т. LX № 3 (1975), 144—149.

Лемма 1. *Пусть I — собственный подидеал идеала J кольца R. Если $J=(a)$ и $I=aV$, то I — максимальный в J идеал кольца R. В остальных случаях существует такой главный идеал (b), что $I\subset(b)\subset J$.*

Следствие. *Каждый собственный идеал I кольца R, отличный от идеалов вида aV, $a\neq 0$, есть пересечение всех главных идеалов кольца, собственным образом содержащих идеал I.*

Лемма 2. *Пусть $a, b, c\in R$ и $ab=ac\neq 0$. Тогда $b=\Theta c$, где Θ-обратимый элемент кольца R.*

Следствие 1. *Если I, J — идеалы кольца R и $aI=aJ\neq 0$, то $I=J$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $I\subset J$ и пусть I — не максимальный в J идеал. Тогда $I\subseteq(b)\subset(c)\subseteq J$ для некоторых $b, c\in R$. Так как $aI=bJ$, то $(ab)=(ac)\neq 0$, откуда по лемме 2 $(b)=(c)$, что ведет к противоречию. Если же I — максимальный в J идеал, то в силу леммы 1 $J=(d)$, $I=dV$, и равенство $adV=(ad)$ невозможно ввиду той же леммы.

Следствие 2. *Все ненулевые идеалы I из одного класса идеалов имеют один и тот же стабилизатор $S(I)$.*

Доказательство. Пусть $aI=bJ\neq 0$ и $c\in S(I)$. Имеем $bJ=aI=caI=$ $=cbJ\neq 0$, и в силу следствия 1 $cJ=J$, т. е. $c\in S(J)$.

Лемма 3. *Пусть I — неглавный идеал кольца R, а T — такой идеал кольца, что $L=I\cdot T\neq 0$. Тогда L — неглавный идеал. Произведение IV совпадает с I.*

Доказательство. Так как I — неглавный идеал, то $I=\bigcup\limits_{\alpha}(a_\alpha)$, причем среди главных идеалов (a_α) нет такого, который содержит все остальные. Далее из определения кольца нормирования следует, что идеал $I\cdot T$ состоит из всевозможных произведений ab, где $a\in I$, $b\in T$.

Так как среди главных идеалов $(a)\subset I$ нет максимального, то по лемме 2 среди идеалов (at) также нет максимального. Следовательно, IT — неглавный идеал. Наконец, в силу леммы 1 идеал I является объединением идеалов aV, где a пробегает I. Следовательно, $IV=I$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Собственный идеал $I\neq 0$ кольца нормирования R тогда и только тогда является простым, когда $S(I)=R\setminus I$.*

Доказательство. Пусть $S(I)=R\setminus I$ и $ab=c$, где $c\in I$, $b\overline{\in} I$. Тогда $c=bc_1$, $c_1\in I$, $ab=bc_1$ и по лемме 2 имеем $a=\Theta c_1\in I$. Значит, I-простой идеал. Наоборот, пусть I-простой идеал и $I\subset(a)$. Тогда для любого элемента $b\in I$ имеет место равенство $b=ac$, и в силу простоты I, $c\in I$ и $I=aI$, т. е. $a\in S(I)$. Для завершения доказательства заметим, что элемент a любого идеала $J\subseteq V$, $J\neq 0$ не может лежать в $S(J)$. Это очевидно, если J-неглавный идеал и сразу вытекает из леммы 2, если J-главный идеал.

Лемма 5. *Подполугруппа S мультипликативной полугруппы кольца R, не содержащая нуля, тогда и только тогда является стабилизатором ненулевого идеала $I\subseteq V$, когда S есть дополнение в R некоторого простого идеала $P\neq 0$ кольца R.*

Доказательство. Если $S=R\setminus P$, где P—ненулевой простой идеал, то в силу леммы 4 S есть стабилизатор P. Пусть I—ненулевой идеал в R, $I\subseteqq V$. Тогда полугруппа $S=S(I)$ наряду с каждым элементом a содержит любой его делитель b. В самом деле, если $a=b\cdot c$, то $I=aI=c(bI)\subseteqq bI$. Значит, $I=bI$ и $b\in S$. Если S состоит из всех единиц кольца R, то $P=V=R\setminus S$, и утверждение леммы доказано. Предположим, что S содержит необратимые элементы. Положим $P=\bigcap\limits_{a\in S}(a)$. Тогда снова $P=R\setminus S$. Действительно, если $b\overline{\in}P$, то b делит некоторый элемент $a\in S$ и, следовательно, $b\in S$. Далее, если $b\in P$, то $b\overline{\in}S$, ибо в противном случае полугруппа S состояла бы из всех делителей элемента b, что невозможно. Наконец, если $c, d\overline{\in}P$, то $cd\in S(I)=R\setminus P$, и значит, P — простой идеал. Лемма доказана.

Из леммы 5 вытекает, что каждому идеалу $I\subseteqq V$, $I\neq 0$ соответствует однозначно определенный простой идеал $P=R\setminus S(I)$, причем $I\subseteqq P\subseteqq V$. Будем обозначать этот простой идеал через $P(I)$.

Лемма 6. *Для любого идеала* $I\subseteqq V$, $I\neq 0$ *имеет место равенство* $L=\bigcup\limits_{\lambda\overline{\in}I}\lambda^{-1}I=P(I)$.

Доказательство. Положим $P=P(I)$. Если $I=(a)$ или I—максимальный идеал в главном идеале (a), то $S(I)$ есть, очевидно, группа единиц кольца R, $P(I)=V$ и $L=V$. В остальных случаях по следствию из леммы 1 имеет место равенство $I=\bigcap\limits_{\lambda\overline{\in}I}(\lambda)$. Покажем, что тогда $S(I)=\{a\in R,\ \lambda^{-1}I\subset(a),\ \forall\lambda\overline{\in}I\}$.

В самом деле, из включений $\lambda^{-1}I\subset(a)$ для всех $\lambda\overline{\in}I$ следует, что $a^{-1}I\subseteqq\subseteqq\bigcap\limits_{\lambda\overline{\in}I}(\lambda)=I$ и тогда $a\in S(I)$. Наоборот, если $aI=I$, то $a^{-1}I\subset(\lambda)$, $\lambda^{-1}I\subset(a)$ для всех $\lambda\overline{\in}I$. Так как $S(I)=R\setminus P$, то $\lambda^{-1}I\subseteq P$ для каждого $\lambda\overline{\in}I$ и, следовательно, $L\subseteqq P$. Предположим, что $L\subset P$. Если L—не максимальный идеал в P, то на основании леммы 1 для некоторого главного идеала (b) имеем $L\subset(b)\subset P$. Но тогда $\lambda^{-1}I\subset(b)$ для всех $\lambda\overline{\in}I$ и, по доказанному, $b\in S(I)$, что противоречит включению $b\in R\setminus S(I)$.

Значит, $L=P$.

Допустим, что L—максимальный в P идеал, что в силу леммы 1 и 4 может быть только тогда, когда $P=V$ и V-главный идеал. Но тогда $L=\bigcup\lambda^{-1}I$ есть главный идеал V^2, откуда заключаем, что $V^2=\lambda^{-1}I$ для некоторого $\lambda\overline{\in}I$, а следовательно, I—главный идеал, что исключено. Итак, $L=P$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть I—ненулевой идеал кольца R. Высоты всех ненулевых элементов идеала I отличны от нуля и принадлежат одному классу идеалов.*

Доказательство. Имеет место формула:

$$\mu\bigcap_i(\lambda_i)=\bigcap_i(\mu\lambda_i)\quad(\mu,\lambda_i\in R). \tag{1}$$

В самом деле, $\mu\bigcap\limits_i(\lambda_i)\subseteqq\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)$. Если правая часть равна нулю, то отсюда сразу получаем (1). Пуцть $\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)\neq 0$ и $a\in\bigcap\limits_i(\mu\lambda_i)$, $a\neq 0$. Тогда $a=\delta_i\mu\lambda_i$.

Так как μ делит a, то $a=\mu b$, где b — фиксированный элемент кольца R. Тогда в силу леммы 2 для любого i имеет место равенство $b=\Theta_i\delta_i\lambda_i$. Значит, $b\in\bigcap_i(\lambda_i)$, откуда $\mu\bigcap_i(\lambda_i)\supseteqq\bigcap_i(\mu\lambda_i)$. Это доказывает (1).

Пусть $a\in I$, $a\neq 0$ и $W=W(a)$—высота элемента a в I. Тогда $W=\bigcap(\lambda_b)$, где $\lambda_b b=a$ и b пробегает все элементы идеала I такие, что $(b)\supseteqq(a)$. Ясно, что $a\in W$ и поэтому $W\neq 0$. Пусть теперь $a=\mu b$. Тогда $W(b)=\bigcap(\lambda_c)$, $(b)\subseteqq(c)\subseteqq I$, $\lambda_c c=b$. Так как $a=\mu\lambda_c c$, то $W(a)=\bigcap(\mu\lambda_c)=\mu\bigcap(\lambda_c)=\mu W(b)$ (см. (1)). Значит, высоты ненулевых элементов идеала I лежат в одном классе идеалов Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть I—неглавный идеал кольца R, a—произвольный ненулевой элемент идеала I и $W=W(a)$—высота элемента a в I. Тогда*

$$WI = aP, \quad \text{где} \quad P = P(I). \tag{2}$$

Доказательство. Имеем $W=\bigcap(\lambda_b)$, где $I\supset(b)\supseteqq(a)$ и $\lambda_b b=a$, причем, в силу леммы 7, $W\neq 0$.

Пусть $\mu\in W$, $\mu\neq 0$. Тогда $\mu=\lambda_b\gamma_b$ $(b\in I,\ (b)\supseteqq(a))$. Идеал $I\cdot W$ есть объединение всевозможных идеалов (μb), где $\mu\in W$, $b\in I$, $(b)\supseteqq(a)$. Но $\mu b=\lambda_b\gamma_b b=\gamma_b a$. Значит, $I\cdot W=\bigcup_{\mu,b}a\lambda_b^{-1}(\mu)=a\bigcup_{b\in I}\lambda_b^{-1}W$, $(b)\supseteqq(a)$. Так как I — неглавный идеал, то для всех $b\in I$, $(b)\supseteqq(a)$ имеет место строгое включение $(\lambda_b)\supset W$. Значит, по лемме 6

$$IW = aP_1, \quad \text{где} \quad P_1 = P(W). \tag{3}$$

Предположим, что $aP_1\neq 0$. Покажем что тогда $P_1=P=P(I)$. В самом деле, из (3) вытекает, что (см. лемму 5 и следствие 2 из леммы 2).

$$S(I) \subseteqq S(aP_1) = S(P_1) = S(W) \tag{4}$$

Пусть $\gamma\in S(W)$. Покажем, что $\gamma\in S(I)$. Возьмем произвольный элемент $c\in I$, $c\neq 0$. Тогда существует такой элемент $b\in I$, $(b)\supseteqq(c)$, что $c=\gamma_b b$, $\gamma_b\equiv 0 \pmod{\gamma}$. Действительно, если γ делится на все элементы γ_b, $(b)\supseteqq(c)$, то $\gamma\in\bigcap(\gamma_b)=W(c)$, что невозможно так как по лемме 7 $S(W)=S(W(c))$, $W(c)\neq 0$, а ненулевой идеал не имеет пересечений со своим стабилизатором (см. также леммы 4 и 5).

Пусть $\gamma_b=\gamma\delta$ для некоторого $b\in I$, $(b)\supseteqq(c)$. Тогда $c=\gamma_b b=\gamma\delta b$, где $\delta b\in I$. Итак, для произвольного $\gamma\in S(W)$ и произвольного элемента $c\in I$ существует такой элемент $d\in I$, что $c=\gamma d$. Следовательно, $\gamma\in S(I)$ и

$$S(W) \subseteqq S(I), \tag{5}$$

что в силу (4) дает равенство $P(W)=P(I)$.

Теперь (3) принимает вид $I\cdot W=aP$. Предположим теперь, что $aP_1=0$. Так как из (5) следует, что $P\subseteqq P_1$, то тогда $aP=0$ и снова получаем $I\cdot W=aP$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть J — неглавный идеал кольца R. Тогда для любого идеала $I\subseteqq J$, $I\neq 0$ имеет место равенство $IP=J\cdot L$, где L — некоторый идеал кольца R, а $P=P(J)$.*

Доказательство. В силу (2) для любого элемента $a\in I$, $a\neq 0$ имеет место равенство $aP=I\cdot W_a$. Положим $W_0=0$. Тогда $I\cdot P=(\bigcup\limits_{a\in I}(a))\cdot P=\bigcup\limits_{a\in I} aP=$ $=\bigcup\limits_{a\in I} I\cdot W_a=I\bigcup\limits_{a\in I} W_a=I\cdot L$. Утверждение доказано.

Пусть P — простой идеал кольца R. Идеал $I\subset R$, $I\neq 0$ назовем P-чистым, если $S(I)\supseteqq S(P)$, что в силу леммы 4 эквивалентно условию: $aI=I$ для всех $a\overline{\in} P$. Ясно, что каждый P-чистый идеал I содержится в идеале P. Если $a\in P$, $a\neq 0$, то P-главным идеалом, порожденным элементом a (обозначение $(a)_P$) будем называть объединение всех главных идеалов $r^{-1}(a)$, где r пробегает все элементы из $S(P)=R\setminus P$. Очевидно, идеал $(a)_P$ является пересечением всех P-чистых идеалов, содержащих элемент a, а каждый P-чистый идеал есть объединение P-главных идеалов.

Пусть по-прежнему P—простой идеал. Как обычно, будем обозначать через R_P кольцо частных колъца R, соответствующее мультипликативной системе $R\setminus P=S(P)$. Элементами кольца R_P являются дроби $\dfrac{a}{r}$, где $r\in S(P)$, а отображение $a\to\dfrac{a}{1}$ $(a\in R)$ определяет канонический гомоморфизм R в R_P, ядром которого является идеал $\bigcup\limits_{a\in S(P)}\operatorname{Ann} a=Q$ [1].

Лемма 8. *Пусть R—нецелостное кольцо, A—идеал кольца, состоящий из всех его нерегулярных элементов, а P—простой идеал, собственным образом содержащийся в A. Тогда идеал* $\operatorname{Ann} P$ *отличен от нуля и является минимальным P-чистым идеалом кольца. Идеал* $\operatorname{Ann} P$ *является ядром канонического гомоморфизма* $R\to R_P$.

Доказательство. Существует элемент $a\in A$, такой что $P\subset(a)\subset A$. Если $A\neq V$ или если $A=V$, что V-неглавный идеал, то это вытекает из лемм 1 и 4, так как простой идеал, отличный от V, не может быть главным. Если же $A=V$ и $V=(c)$—главный идеал, то снова можно применить лемму 1, ибо максимальный в V идеал (c^2) не является простым. Так как a—нерегулярный элемент, то $\operatorname{Ann} a\neq 0$ и, следовательно $L=\operatorname{Ann} P\neq 0$. Из леммы 4 следует, что $L\subseteqq P$. Далее $L-P$-чистый идеал, так как из равенства $aP=P$ следует, что $\operatorname{Ann} aP=a^{-1}\operatorname{Ann} P=\operatorname{Ann} P$. Пусть $L_1\neq 0$ — произвольный P-чистый идеал, содержащийся в L. Покажем, что для любого элемента $a\in L$, $a\neq 0$ имеет место равенство $(a)_P=L_1$. В самом деле, $(a)_P=\bigcup\limits_{r\overline{\in} P} r^{-1}(a)$. Пусть $b\in L_1$ и $a=bc$. Тогда $c\overline{\in} P$, ибо в портивном случае $bc=0$. Следовательно, $b\in c^{-1}(a)$ и, таким образом, $L_1\subseteqq(a)_P$. Так как обратное включение очевидно, то $L_1=(a)_P$. Поскольку это равенство справедливо для любого элемента $a\in L$, $a\neq 0$, то $L=L_1$ и L—минимальный P-чистый идеал. Так как $\operatorname{Ann} c\subseteqq L$ для любого $c\in P$, то $Q=\bigcup\operatorname{Ann} c\subseteqq L$. (По-предыдущему, Q—ядро канонического гомоморфизма $R\to R_P$.) С другой стороны, Q является P-чистым идеалом. В самом деле, пусть $b_1 c\overline{\in} P$. Тогда $\operatorname{Ann} b\subset(c)$, ибо $\operatorname{Ann} b\subseteqq Q\subseteqq P$, и $c^{-1}\operatorname{Ann} b=\operatorname{Ann} bc$, где $bc\overline{\in} P$. Следовательно, $Qc=Q$ для любого $c\overline{\in} P$. В силу минимальности идеала L получаем, что $Q=L$. Лемма доказана.

Будем обозначать гомоморфные образы идеалов $I\subset R$ в R_P через $\bar{I}$. Из леммы 8 следует, что P-чистые идеалы I кольца R могут быть охарактеризованы как ненулевые идеалы, образы $\bar{I}$ которых являются идеалами в R_P, а P-главные идеалы I как ненулевые идеалы, образы которых являются главными идеалами кольца R_P. (Для P-главного идеала $Q=\operatorname{Ann} P$ идеал $\bar{Q}$ равен нулю.) Заметим, что ввиду леммы 8 каждый P-чистый идеал $I\subset R$ является прообразом идеала $\bar{I}\subset R_P$ в R.

Теорема 2. *Пусть I, J, где $I\subseteqq J$—ненулевые идеалы кольца R и $P=P(J)$. Равенство $I=J\cdot L$, где L — некоторый идеал кольца R, выполняется тогда и только тогда, когда $S(J)\subseteqq S(I)$ (т. е., когда I есть P-чистый идеал), и при этом J является P-главным идеалом, если I есть P-главный идеал.*

Доказательство. Пусть $I=J\cdot L$. Тогда ясно, что $S(J)\subseteqq S(I)$. Предположим, что I есть P-главный идеал и покажем, что J также P-главный идеал. Как и раньше, обозначим через Q ядро $\bigcup_{a\bar{\in} P}\operatorname{Ann} a$ канонического гомоморфизма $R\to R_P$. Предположим, что $P\subset A$. Тогда по лемме 8 $Q=\operatorname{Ann} P\neq 0$, причем Q—минимальный P-чистый идеал и $Q=(a)_P$ для любого $a\in Q$, $a\neq 0$. Пусть $I=Q$. Тогда в силу минимальности идеала Q (лемма 8) получаем, что для некоторого элемента $b\in L$ имеет место равенство $Q=Jb$. Пусть $Q=(a)_P$, $a\in Q$ и $a=c\cdot b$, $c\in J$. Тогда $J=(c)_P$, т. е. J есть P-главный идеал. Предположим теперь, что $I\supset Q$. Тогда из равенства $I=J\cdot L$ вытекает равенство $\bar{I}=\bar{J}\cdot\bar{L}$ в кольце R_P, $\bar{I}\neq 0$. Пусть $\hat{L}$-идеал кольца R_P, порожденный множеством $\bar{L}$. Так как $\bar{I}$ и $\bar{J}$-идеалы в R_P, то $\bar{I}=\bar{J}\cdot\hat{L}$. Поскольку I является P-главным идеалом, то $\bar{I}$—главный идеал в R_P, и в силу леммы 3, $\bar{J}$—также главный идеал, откуда заключаем, что J есть P-главный идеал кольца R.

Установим теперь достаточность условий теоремы. Пусть $S(J)\subseteqq S(I)$.

Если J—главный идеал, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что J не является главным идеалом. Пусть J есть P-главный идеал: $J=(a)_P$. Тогда $I=a^{-1}I(a)$ и так как $I-P$-чистый идеал, то $I=a^{-1}I(a)_P=a^{-1}I\cdot J$. Остается рассмотреть случай, когда J не является P-главным идеалом. Тогда по условию идеал I также не P-главный идеал. Ввиду следствия из теоремы 1 имеет место равенство $I\cdot P=J\cdot W$ $(P=P(J))$, откуда $\bar{J}\cdot\bar{P}=\bar{J}\cdot\bar{W}$. Так как $\bar{P}$—максимальный идеал в R_P, а $\bar{I}$ не является главным идеалом кольца R_P, то по лемме 3 имеем $\bar{I}\bar{P}=\bar{I}$. Следовательно, P-чистые идеалы I и $IP=J\cdot W$ имеют один и тот же образ $\bar{I}$ в R_P. Значит, они совпадают: $I=J\cdot W$. Теорема доказана.

Теорема 2 показывает, что равенство $I=J\cdot L$ в мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования сводится (при одном естественном ограничении) к теоретико множественному включению $P(I)\subseteqq P(J)$ соответствующих простых идеалов.

Литература

[1] Н. Бурбаки, Коммутативная алгебра. «Мир», 1973.

[2] C. D. Бериан, Н. И. Вишнякова, О иодулях над кольцами нормирования. *Докцады Акад. Наук Армянской ССР* **60** (1975), 144—148.

(Поступило: 18. XII. 1978)