О понятии «связности» конечной группы*

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Введение

Пусть G-группа (рассматриваются только конечные группы). Если $G \neq \{1\}$, то последовательность $\{x_i\}_{0 \leqq i \leqq n}$ элементов множества $G^{\#} = G \setminus \{1\}$ назовем C-последовательностью, соединяющей элементы $x, y \in G^{\#}$, если $x_0 = x$, $x_n = y$, $x_{i-1} x_i = x_i x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Элемент $y \in G^{\#}$ достижим из элемента $x \in G^{\#}$, если существует C-последовательность соединяющая x с y. Отношение достижимости является отношением эквивалентности на $G^{\#}$. Классы этого отношения назовем компонентами связности группы G [1]). Группа G связна, если $G^{\#}$ — компонента связности и несвязна — в противном случае. Подмножество $A \subseteqq G^{\#}$ назовем замкнутым, если $x \in A$ влечет $C_G(x) \subseteqq \hat{A} = A \cup \{1\}$. Пустое подмножество замкнуто по определению. Компоненты связности замкнуты. Подмножество $A \subseteqq G^{\#}$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторого множества компонент связности. Если $A, B \subseteqq G^{\#}$, то замкнутость A и B влечет замкнутость $A \cap B$, $A \cup B$ и $G^{\#} \setminus A$. Подмножество $A \subseteqq G$ назовем связным, если любые два элемента $x, y \in A^{\#} = A \setminus \{1\}$ можно соединить C-подледовательностью, содержащейся в $A^{\#}$. Если $\emptyset \neq A \subseteqq G^{\#}$ и A замкнуто, то связность A равносильна тому, что A — компонента связности.

Примеры несвязных групп: группы Фробениуса, двойные группы Фробениуса[2]), группы Цассенхауза (Z-группы), т. е. группы обладающие точным строго дважды транзитивным подстановочным представлением[3]).

Основными результатами настоящей работы являются сформулированные ниже теоремы 1—3.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(I) *Группа G несвязна.*

(II) *$G^{\#}$ содержит собственное нормальное замкнутое подмножество.*

(III) *Существует такое разбиение $\{\pi, \pi'\}$ множества всех простых делителей порядка группы G на два непустых подмножества π и π', что*

---

*) В работе изложены доказательства части результатов анонсированных в [6].

[1]) Элементы $x, y \in G^{\#}$ принадлежат одной и той же компоненте связности тогда и только тогда, когда расстояние Брауэра—Фаулера [3] между ними конечно.

[2]) В литературе (см. напр. [5]) эти группы известны под названием „2-Frobenius groups"

[3]) Подстановочное редставление Γ группы G называется в настоящей работе строго k — кратно транзитивным, если Γ k — кратно транзитивно, причем подстановка $\Gamma(x)$ $(x \in G)$ имеющая $k+1$ неподвижных точек, является единичной.

каждый элемент группы G является либо π-элементом, либо π'-элементом.

(IV) *Группа G обладает обобщенным характером, принимающим на $G^{\#}$ значения 0 и 1.*

Теорема 2. *Если несвязная группа G не является группой Фробениуса, то $G/F(G)$ несвязна; если G не является ни группой Фробениуса, ни двойной группой Фробениуса, то $F(G/F(G))=\{1\}$ и цоколь группы $G/F(G)$ является нециклической простой группой.*

Следствие. *Класс несвязных разрешимых групп исчерпывается разрешимыми группами Фробениуса и двойными группами Фробениуса*[4]).

Теорема 3. *Группа G является Z-группой тогда и только тогда, когда она обладает неприводимым комплексным нелинейным характером χ, удовлетворяющим следующим условиям:*

(I) *Функция $|\chi(x)|$ $(x\in G)$ принимает на $G^{\#}$ значения 0 и 1.*

(II) *Группа G содержит связную подгруппу H порядка $\chi(1)$.*

(III) *Множество нулей $T_\chi=\{x\in G|\chi(x)=0\}$ характера χ несвязно.*

Обозначения

$\subset$ и $\supset$ — символы строгих включений; $|M|$ — число элементов конечного множества M; $|x|$ — порядок элемента x группы X; $x^y=y^{-1}xy$ $(x, y\in X)$; X-классы — классы сопряженных элементов группы X; x^X — X-класс элемента $x\in X$; $\langle Y\rangle$ — подгруппа порожденная подмножеством $Y\subseteq X$; $Z(X)$ — центр X; $\mathrm{Aut}\,(X)$-группа автоморфизмов группы X; $F(X)$-подгруппа Фиттинга группы X; $Y\leqq X$ — «Y-подгруппа группы X»; $\mathfrak{S}$-подгруппа — силовская подгруппа; $\mathfrak{S}_p$-подгруппа — силовская p-подгруппа; если X-группа и $A\subseteq X$, то $A^{\#}=A\setminus\{1\}$, $\hat{A}=A\cup\{1\}$, $\pi(A)$ — множество всех простых делителей порядков элементов подмножества A; $\pi(m)$ — множество всех простых делителей натурального числаm; $\pi(x)=\pi(|x|)$ $(x\in X)$; $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел; $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел; $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел.

§ 1. Доказательство теоремы 1

1.1. *Определение.* Будем говорить, что задано разбиение $\{A, B\}$ группы G, если $A, B\subseteq G^{\#}$, $A\neq\emptyset\neq B$, $A\cup B=G^{\#}$, $A\cap B=\emptyset$. Разбиение $\{A, B\}$ назовем нормальным, если A (а потому и B) нормально, т. е. $A^g=A$ $(g\in G)$.

1.2. *Определение.* Разбиение $\{A, B\}$ группы G назовем C-разбиением, если A (а потому и B) замкнуто.

1.3. Лемма. *Следующие утверждения равносильны:*

---

[4]) Ввиду теоремы 1 этот результат равносилен лемме 2.3 статьи [5]. Частными случаями теоремы 2 являются также предложение 2.2 и лемма 2.5 статьи [5].

(I) *Группа G несвязна.*

(II) *Группа G обладает нормальным C-разбиением.*

Доказательство. Допустим, что G несвязна и $\Omega=\{D_1=D, \dots, D_n\}$ — множество всех ее компонент связности. Компоненты связности $\{D_i\}$ переставляются внутренними автоморфизмами группы G, вследствие чего возникает ее представление Γ: $g \mapsto \begin{pmatrix} D_1, & \dots, & D_n \\ D_1^g & & D_n^g \end{pmatrix}$ $(g\in G)$ подстановками множества Ω. Представление Γ не транзитивно: в противном случае $|D_1|=\dots=|D_n|=d$ и, следовательно, $|G|-1=|G^{\#}|=\sum_i |D_i|=nd$; так как $n=(G\colon N_G(D))$ делит $|G|$, то $n=1$, что противоречит несвязности G. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ $(s>1)$ — орбиты Γ. Если A — объединение всех компонент связности, входящих в Ω_1, B — объединение остальных компонент связности, то $\{A, B\}$ — нормальное C-разбиение группы G. Таким образом (I)$\Rightarrow$(II). Импликация (II)$\Rightarrow$(I) очевидна.

1.4. Лемма. *Всякая связная подгруппа группы G содержится в одной из ее пополненных единицей компонент связности. В частности, этим свойством обладают нильпотентные подгруппы группы G.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе вытекает из нетривиальности центра нильпотентной группы отличной от $\{1\}$.

1.5. Следствие. *Если $\emptyset\neq A\subseteq G^{\#}$, A замкнуто и $p\in\pi(A)$, то $\hat{A}$ содержит $\mathfrak{S}_p$-подгруппу группы G. Если, в частности, A нормально, то $\hat{A}$ содержит все силовские p-подгруппы группы G.*

Доказательство. Если $x\in A$, $p\in\pi(x)$, то $y=x^{\frac{|x|}{p}}\in A$, $|y|=p$. Если D — компонента связности содержащая y, то в силу 1.4 каждая $\mathfrak{S}_p$-подгруппа содержащая y содержится в $\hat{D}$, а потому и в $\hat{A}$. Второе утверждение очевидно.

1.6. Следствие. *Если $\{A, B\}$ — C-разбиение группы G, то каждая связная (в частности — нильпотентная) подгруппа группы G содержится в одном из подмножеств $\hat{A}$, $\hat{B}$. Если, в частности, $\{A, B\}$ нормально и $p\in\pi(G)$, то одно из подмножеств $\hat{A}$, $\hat{B}$ содержит все $\mathfrak{S}_p$-подгруппы группы G.*

1.7. *Определение.* Емкостью $c(A)$ подмножества $A\subseteq G$ назовем наименьшее общее кратное порядков подгрупп группы G, содержащихся в $\hat{A}$. Очевидно, $c(G)=|G|$, $c(\emptyset)=c(\{1\})=1$. Если A замкнуто, то $\pi(A)=\pi(c(A))$.

1.8. Лемма. *Если $\emptyset\neq A\subseteq G^{\#}$ и A замкнуто, то $c(A)$ равно наименьшему общему кратному порядков $\mathfrak{S}$-подгрупп группы G содержащихся в $\hat{A}$.*

Доказательство. Очевидно, $c(A)$ делится на порядки всех $\mathfrak{S}$-подгрупп группы G, содержащихся в $\hat{A}$. Если $p\in\pi(c(A))$, то $p\in\pi(A)$ и, следовательно, в силу 1.5 $\hat{A}$ содержит $\mathfrak{S}_p$-подгруппу P группы G; ввиду 1.7 $|P|\mid c(A)$. Это доказывает утверждение.

1.9. Лемма. *Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества $G^{\#}$ и $A\cap B=\emptyset$, то $(c(A), c(B))=1$ и $c(A\cup B)=c(A)c(B)$.*

Доказательство. Если $(c(A), c(B))=m>1$ и $p\in\pi(m)$, то $p\in\pi(A)\cap\pi(B)$. Поэтому в силу 1.5 каждая $\mathfrak{S}_p$-подгруппа группы G содержится в $\hat{A}\cap\hat{B}=\{1\}$ — противоречие. Таким образом, $m=1$. Если $M=A\cup B$ и $P-\mathfrak{S}$-подгруппа группы G, то ввиду 1.5 $P\subseteqq\hat{M}$ тогда и только тогда, когда $P\subseteqq\hat{A}$, либо $P\subseteqq\hat{B}$. Ввиду 1.7, отсюда следует, что $c(M)=c(A)\cdot c(B)$.

1.10. Следствие. *Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества G,* то $c(A\cup B)\cdot c(A\cap B)=c(A)\cdot c(B)$.*

1.11. Следствие. *Если A и B — нормальные замкнутые подмножества множества $G^\#$, $A\cap B=\emptyset$, то порядки элементов подмножества $\hat{A}$ взаимно просты с порядками элементов подмножества $\hat{B}$.*

1.12. Лемма. *Если A — нормальное замкнутое подмножество множества $G^\#$ и $H\leqq G$, то $H\subseteqq\hat{A}$ равносильно $|H|\,\big|\,c(A)$.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $\emptyset\neq A\neq G^\#$, $H\neq\{1\}$. Если $H\subseteqq\hat{A}$, то $|H|\,\big|\,c(A)$ в силу 1.7. Обратно, пусть $|H|\,\big|\,c(A)$. Если $x\in H^\#, p\in\pi(x)$, то $p|c(A)$, откуда $p\in\pi(A)$ и, следовательно, в силу 1.5, $x^{\frac{|x|}{p}}\in\hat{A}$. Поэтому $x\in C_G\big(x^{\frac{|x|}{p}}\big)\subseteqq\hat{A}$. Таким образом, $H\subseteqq\hat{A}$.

1.13. Лемма. *Если A — нормальное замкнутое подмножество множества $G^\#$, то $\hat{A}=\{x\in G|x^{c(A)}=1\}$.*

Доказательство. Если $x\in\hat{A}$, то $\langle x\rangle\subseteqq\hat{A}$. Поэтому $|x|\,\big|\,c(A)$, откуда $x^{c(A)}=1$. Обратно, $x^{c(A)}=1$ влечет $x\in\hat{A}$ так как в противном случае $x\in B=G^\#\setminus A$ и по доказанному $x^{c(B)}=1$; так как $(c(A), c(B))=1$, то $x=1\notin B$ — противоречие.

1.14. Лемма. (Фробениус [4].) *Пусть n — натуральное число, $n\,\big|\,|G|$ и функция $\vartheta\colon G\to\mathbf{Z}$ определена так, что $\vartheta(x)=0$, если $x^n\neq1$ и $\vartheta(x)=\dfrac{|G|}{n}$, если $x^n=1$. Тогда ϑ — обобщенный характер группы G. В частности, число решений уравнения $x^n=1$ $(x\in G)$ делится на n.*

1.15. Лемма.[5]) *Пусть ϑ — обобщенный характер группы G принимающий значения в $\mathbf{Z}$. Если $u, v\in G$, $v-p$-элемент $(p\in\pi(G))$ и $uv=vu$, то $\vartheta(uv)\equiv\vartheta(u)$* $(\mathrm{mod}\ p)$.

1.16. Лемма. *Если $\{A, B\}$ — разбиение группы G, то следующие условия равносильны:*

(I) *$\{A, B\}$ — нормальное C-разбиение.*

(II) *Порядки элементов множества A взаимно просты с порядками элементов множества B.*

(III) *Группа G обладает обобщенным характером, принимающим на A и B соответственно значения 0 и 1.*

---

[5]) Доказательство легко получается, например, с помощью леммы 2 в [7] (стр. 77).

Доказательство. (I)$\Rightarrow$(II) в силу 1.11. Допуская (II), положим $|G|=$ $=\prod_{p\in\pi(G)} p^{\alpha_p}$, $a=\prod_{p\in\pi(A)} p^{\alpha_p}$, $b=\prod_{p\in\pi(B)} p^{\alpha_p}$. Очевидно, $|G|=a\cdot b$, $a>1$, $b>1$, $(a, b)=1$. В силу 1.14 существуют такие обобщенные характеры ϑ_A и ϑ_B, что

$$\vartheta_A(x)=\begin{cases} b, & \text{если} \quad x\in\hat{A}, \\ 0, & \text{если} \quad x\in B,\end{cases} \qquad \vartheta_B(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\in A \\ a, & \text{если} \quad x\in\hat{B}.\end{cases}$$

Функция $\eta=b\cdot 1_G-\vartheta_A$ (1_G — главный характер группы G) является обощенным характером, причем

$$\eta(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\in A \\ b, & \text{если} \quad x\in B.\end{cases}$$

Так как $(a, b)=1$, то $am+bn=1$, где $m, n\in\mathbf{Z}$. Полагая $\vartheta=n\eta+m\vartheta_B$, получим обобщенный характер, удовлетворяющий условию (III). Таким образом (II)$\Rightarrow$(III).

Докажем импликацию (III)$\Rightarrow$(I). Пусть ϑ — обобщенный характер, удовлетворяющий условию (III). Обозначим через C одно из подмножеств A, B. Если $u\in C$, $v\in G$, v примарен, $uv=vu\neq 1$, то $uv\in C$. Действительно, если v — p-элемент $\big(p\in\pi(G)\big)$, то ввиду 1.15 $\vartheta(uv)\equiv\vartheta(u) \pmod p$, откуда $uv\in C$. Докажем теперь, что $x\in A$, $y\in C_G(x)^{\#}$ влечет $y\in A$. Предполагая, что $y\in B$, рассмотрим разложения $x=x_1\dots x_r$, $y=y_1\dots y_s$ элементов x, y на отличные от 1 примарные компоненты. Так как $x_1, \dots, x_r$ попарно перестановочны и примарны, то в силу сделанного выше замечания $x_1\in C$ влечет последовательно $x_1x_2\in C, \dots, x=x_1\dots x_r\in C$. Поэтому $C=A$ и, следовательно, $x_1\in A$. Аналогично докажем, что $y_1\in B$. Замечая, что $x_1y_1=y_1x_1\neq 1$ [6]), положим $u=x_1$, $v=y_1$ и затем $u=y_1$, $v=x_1$. В силу сделанного выше замечания получим $x_1y_1\in A\cap B=\emptyset$ — противоречие. Следовательно, $y\in A$. Таким образом, A замкнуто. Нормальность A следует из (III). Таким образом (III)$\Rightarrow$(I).

1.17. Утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из 1.3 и 1.16.

§ 2. Доказательство теоремы 2

2.1. *Определение*. Подгруппу H группы G назовем чистой относительно C-разбиения $\{A, B\}$, если H содержится в одном из подмножеств $\hat{A}$, $\hat{B}$. В противном случае, подгруппу H будем называть смешанной.

2.2. Лемма. Всякий чистый относительно C-разбиения $\{A, B\}$ нормальный делитель N группы G нильпотентен. Каждая нильпотентная подгруппа группы G чиста относительно любого ее C-разбиения.

Доказательство. Пусть, например, $N\subseteq\hat{A}$. Если $x\in B$, $p\in\pi(x)$, то $y=x^{\frac{|x|}{p}}\in B$, $|y|=p$. Ввиду замкнутости B элемент y порождает на N регулярный автоморфизм простого порядка p, откуда вытекает первое утверждение. Второе утверждение следует из 1.4.

[6]) Так как $x_1\in\langle x\rangle$, $y_1\in\langle y\rangle$, $xy=yx$, то $x_1y_1=y_1x_1$. Из $x_1y_1=1$ следует $1=\vartheta(y_1)=\vartheta(x_1^{-1})=$ $=\vartheta(x_1)=0$ — противоречие.

2.3. Лемма. *Цоколь S несвязной группы G абелев, если $F(G)\neq\{1\}$; если $F(G)=\{1\}$, то S — нециклическая простая группа.*

Доказательство. В силу 2.2 $F(G)$ чиста относительно любого нормального C-разбиения $\{A, B\}$. Допустим, что $F(G)\neq\{1\}$, $F(G)\subseteq\hat{A}$. Если F — минимальный нормальный делитель группы G, $F\nsubseteq F(G)$, то $F\cap F(G)=\{1\}$; поэтому $F\subseteq C_G(F(G))\subseteq\hat{A}$. Следовательно, F нильпотентен, откуда $F\subseteq F(G)$ — противоречие. Таким образом, все минимальные нормальные делители группы G содержатся в $F(G)$ и, следовательно, абелевы. Поэтому S — абелева группа. Если $F(G)=\{1\}$, то S — прямое произведение нециклических простых групп: $S=P_1\times\ldots\times P_m$. Допустим, что $m>1$. Подгруппы P_i $(i=1, \ldots, m)$ — смешанные относительно C-разбиения $\{A, B\}$. Действительно, если например, $P_1\subseteq\hat{A}$, то $P_i\subseteq C_G(P_1)\subseteq\hat{A}$ $(i>1)$. Поэтому $|P_i|\,|\,c(A)$ $(i=1, \ldots, m)$; следовательно, $|S|=\prod_i|P_i|$ делит $\{c(A)\}^m$, откуда в силу 1.9 $(|S|, c(B))=1$. Поэтому $|S|\,|\,c(A)$, откуда ввиду 1.12, $S\subseteq\hat{A}$. Ввиду 2.2 отсюда вытекает нильпотентность S, что противоречит условию $F(G)=\{1\}$. Если $x, y\in P_1^{\#}$, $x\in A$, $y\in B$, $z\in P_2^{\#}$, то $z\in C_G(x)\cap C_G(y)\subseteq\hat{A}\cap\hat{B}=\{1\}$, откуда $z=1$ — противоречие. Таким образом, $m=1$: S — нециклическая простая группа.

2.4. Лемма. *Группы Фробениуса несвязны.*

Доказательство. Ядро N группы Фробениуса G нильпотентно, откуда в силу 1.4 $N^{\#}\subseteq D$. где D компонента связности G. Так как $N^{\#}$ замкнуто, то $N^{\#}=D$, откуда, ввиду $N^{\#}\neq G^{\#}$, вытекает утверждение[7]).

2.5. *Определение*. Группа G называется двойной группой Фробениуса, если она содержит такой нормальный делитель F, что (I) F-группа Фробениуса; (II) G/N (N — ядро F)[8])-группа Фробениуса с ядром F/N [9]).

Леммы 2.6—2.10 являются известными утверждениями.

2.6. Лемма. *Пусть $\Phi\lhd G$, Φ-группа Фробениуса с ядром N и дополнением H. Тогда $G=N\cdot N_G(H)$*).*

2.7. Лемма. *Пусть G — двойная группа Фробениуса, N и F — подгруппы удовлетворяющие условиям* (I) *и* (II) *определения* 2.5, *H — дополнительный множитель F, $F_1=N_G(H)$. Тогда* (I) *$F_1\cong G/N$;* (II) *ядро группы Фробениуса F_1 совпадает с H;* (III) *$G=N\cdot F_1=F\cdot K$, где K — дополнительный множитель F_1.*

2.8. Подгруппы F и F_1 называются соответственно левым и правым фробениусовыми множителями двойной группы Фробениуса G. F определяется группой G однозначно, F_1 — с точностью до сопряженности.

2.9. Лемма. *Правый фробениусов множитель F_1 двойной группы Фробениуса метацикличен: его ядро H и дополнительный множитель K цикличны; $|H|$ нечетно.*

---

[7]) Легко видеть, что кроме $N^{\#}$ компонентами связности G являются подмножества $H_i^{\#}$ $(i=1, \ldots, n)$, где H_i $(i=1, \ldots, n)$ — дополнительные множители группы G.

[8]) Очевидно, $N\triangle G$.

[9]) Пример: S_4; здесь $F=A_4$, $N=V_4$.

*) $A\cdot B$ означает полупрямое произведение нормального делителя A и подгруппы B.

2.10. *Следствие.* Двойные группы Фробениуса разрешимы.

2.11. Лемма. *Двойные группы Фробениуса несвязны.*

Доказательство. Пусть G — двойная группа Фробениуса, F — ее левый фробениусов множитель, N-ядро F. Рассмотрение фактор-группы G/N позволяет убедиться в замкнутости подмножества $A=F\setminus N$. Следовательно, группа G несвязна.

2.12. Лемма. *Если G несвязна и не является группой Фробениуса, то $G/F(G)$ несвязна.*

Доказательство. Если $F(G)=\{1\}$ утверждение очевидно. Допустим, что $F(G)\neq\{1\}$. Пусть $\{A, B\}$ — нормальное C-разбиение G, и например, $F(G)\subseteq\hat{A}$. Если $F(G)=\hat{A}$, то G-группа Фробениуса с ядром $F(G)$ — противоречие. Следовательно, $F(G)\subset\hat{A}$. Обозначим через $\overline{M}$ канонический образ в группе $\overline{G}=G/F(G)$ подмножества $M\subseteq G$. Так как $\emptyset\neq F(G)^{\#}\subset A$, то $\overline{A}^{\#}\neq\emptyset$. Из $B\neq\emptyset=B\cap F(G)$ следует, что $\overline{B}\neq\emptyset$, $\overline{B}\subseteq\overline{G}^{\#}$. Очевидно также, что $\overline{G}^{\#}=\overline{A}^{\#}\cup\overline{B}$. Если $\bar{a}\in\overline{A}^{\#}$, $\bar{b}\in\overline{B}$ $(a, b\in G)$, то a и b можно выбрать так, чтобы имело место $a\in A$, $b\in B$. Так как $(|a|, |b|)=1$ и $|\bar{a}|\,\big|\,|a|$, $|\bar{b}|\,\big|\,|b|$, то $(|\bar{a}|, |\bar{b}|)=1$. Таким образом, порядки элементов $\overline{A}^{\#}$ взаимно просты с порядками элементов $\overline{B}$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\overline{A}^{\#}\cap\overline{B}=\emptyset$. Следовательно, $\{\overline{A}^{\#}, \overline{B}\}$ — разбиение группы $\overline{G}$. Так как для него выполнено условие (II) леммы 1.16, то оно является нормальным C-разбиением группы $\overline{G}$. Поэтому $\overline{G}$ несвязна.

2.13. Лемма. *Если группа G несвязна и $F(G/F(G))\neq\{1\}$, то $F(G)$ выделяется в G инвариантым полупрямым множителем:*

$$G = F(G)\cdot L, \quad \text{где} \quad L \leqq G.$$

Доказательство. Положим $\overline{G}=G/F(G)$. По условию $F(\overline{G})\neq\{\bar{1}\}$. Если R — полный прообраз $F(\overline{G})$ в G, то $R\lhd G$, $R\supset F(G)$, $R/F(G)=F(\overline{G})$. Пусть $\Phi\lhd G$, $\Phi\subseteq R$, Φ покрывает $F(G)$ [10]). Φ — смешанная подгруппа относительно нормального C-разбиения $\{A, B\}$ группы G. В противном случае Φ нильпотентна, вопреки условию $\Phi\supset F(G)$. Если, например, $F(G)\subseteq\hat{A}$, то

$$(\Phi\setminus F(G))\cap B \neq \emptyset.$$

Пусть $g\in(\Phi\setminus F(G))\cap B$. Так как $\Phi/F(G)$ — главный фактор и $\Phi/F(G)\subseteq R/F(G)=F(\overline{G})$, то $\Phi/F(G)$ — элементарная абелева p-группа $(p\in\pi(\overline{G}))$. Поэтому $g^p\in F(G)$. С другой стороны, так как $g\in B$, то $g^p\in\hat{B}$. Следовательно, $g^p\in F(G)\cap\hat{B}\subseteq\hat{A}\cap\hat{B}=\{1\}$, откуда $|g|=p$. Если $x\in\Phi\setminus F(G)$, то $x^p\in F(G)$. Из $x\in A$ следует, ввиду 1.11, что $(|x|, p)=(|x|, |g|)=1$. Ввиду $x^p\in F(G)$, отсюда следует $x\in F(G)$ — противоречие. Таким образом, $x\in B$. Следовательно, $\Phi\setminus F(G)\subseteq B$. Так как $F(G)\subseteq\hat{A}$ и элементы B действуют регулярно на нормальных делителях содержащихся в $\hat{A}$, то Φ-группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Если H — ее дополнительный множитель, то в силу 2.6 $G=F(G)\cdot L$, где $L=N_G(H)$.

---

[10]) Это означает, что $\Phi\supset F(G)$ и $\Phi/F(G)$ — главный фактор группы G.

В дальнейшем (леммы 2.14—2.16) группа G предполагается удовлетворяющей условиям леммы 2.13; при этом сохраняются обозначения принятые в доказательстве последней.

2.14. Лемма. *$|H|=p$; если $F(G)\subseteqq \hat{A}$, то $H\subseteqq \hat{B}$.*

Доказательство. Так как $H\cong \Phi/F(G)$, то H — элементарная абелева p-группа. Как группа без неподвижных точек, H циклична; следовательно, $|H|=p$. Если $F(G)\subseteqq \hat{A}$, то как было доказано выше $\Phi\setminus F(G)\subseteqq B$. Так как $\Phi=F(G)\cdot H$, то $H^{\#}\subset \Phi\setminus F(G)$, откуда $H\subseteqq \hat{B}$.

2.15. Лемма. *Если подгруппа L чиста относительно нормального C-разбиения $\{A, B\}$, то G-группа Фробениуса с ядром $F(G)$.*

Доказательство. Пусть, как и выше, $F(G)\subseteqq \hat{A}$. Так как L чиста, $L=N_G(H)\supseteqq H$ и в силу 2.14, $H\subseteqq \hat{B}$, то $L\subseteqq \hat{B}$. Если $g\in G\setminus F(G)$, то $g^{|L|}=g^{|G/F(G)|}\in F(G)$. Ввиду $L\subseteqq \hat{B}$ и 1.11 условие $g\in A$ влечет $(|g|, |L|)=1$. Поэтому $g\in F(G)$ — противоречие. Таким образом, $G\setminus F(G)\subseteqq B$. Так как $F(G)\subseteqq \hat{A}$, то элементы B действуют на $F(G)$ регулярно. Поэтому G-группа Фробениуса с ядром $F(G)$.

2.15. Лемма. *Если L смешана относительно нормального C-разбиения $\{A, B\}$, то G — двойная группа Фробениуса.*

Доказательство. Так как L смешанная, то $A_L=A\cap L\neq\emptyset$, $B_L=B\cap L\neq\emptyset$. Поэтому $\{A_L, B_L\}$ — нормальное C-разбиение подгруппы L, откуда вытекает несвязность L. Так как $H\lhd N_G(H)=L$ и H абелева, то $H\lhd F(L)$; поскольку в силу 2.14 H имеет простой порядок, то $H\subseteqq Z(F(L))$. Следовательно, $F(L)\subseteqq C_G(H)$. Если $F(G)\subseteqq \hat{A}$, то ввиду 2.14 $H\subseteqq \hat{B}$. Поэтому $C_G(H)\subseteqq \hat{B}$. Так как $C_G(H)\subseteqq N_G(H)=L$, отсюда следует, что $C_G(H)\subseteqq \hat{B}_L$. Следовательно, $C_G(H)$ чиста относительно нормального C-разбиения $\{A_L, B_L\}$ подгруппы L. Так как $C_G(H)\lhd L$, то в силу 2.2 $C_G(H)$ нильпотентна. Поэтому $C_G(H)\subseteqq F(L)$ и, следовательно, $C_G(H)=F(L)$. Так как $L/F(L)=N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}(H)$, то ввиду цикличности H, $L/F(L)$ — абелева группа. Таким образом, L несвязна и $F(L/F(L))=L/F(L)\neq\{1\}$[11]. Применяя к L лемму 2.13, получаем $L=F(L)\cdot K$, где $K\leqq L$. Так как $K\cong L/F(L)$ абелева группа, то K связна и, следовательно, чиста относительно любого нормального C-разбиения группы L. В силу 2.15 L-группа Фробениуса с ядром $F(L)$. Докажем, что $\Phi=F(G)\cdot F(L)$-группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Допустим, что $g\in\Phi\setminus F(G)$. Тогда $g^{|F(L)|}=g^{|\Phi/F(G)|}\in F(G)$. Так как $F(L)=C_G(H)\subseteqq \hat{B}$, то $g\in A$ влечет $(|g|, |F(L)|)=1$, следовательно, $g\in N$ — противоречие. Таким образом, $g\in B$. Тем самым доказано, что $\Phi\setminus F(G)\subseteqq B$. Так как $F(G)\lhd G$, $F(G)\subseteqq \hat{A}$, то элементы $\Phi\setminus F(G)$ действуют на $F(G)$ регулярно; поэтому Φ-группа Фробениуса с ядром $F(G)$. Так как $G/F(G)\cong L$-группа Фробениуса, $\Phi/F(G)\cong F(L)$ и $F(L)$ — ядро L, то ядро $G/F(G)$ совпадает с $\Phi/F(G)$. Поэтому G — двойная группа Фробениуса, левый фробениусов множитель, которой совпадает с Φ, а правый — с L.

---

[11]) Из $L/F(L)=\{1\}$ вытекает нильпотентность, а поэтому и связность L.

2.17. Теорема 2 вытекает из 2.12—2.16 и 2.3 [12]). Если G — несвязная разрешимая группа, то $F(G) \neq \{1\}$. Ввиду несвязности, группа G не является нильпотентной. Поэтому $F(G) \neq G$. Так как $G/F(G)$ разрешима, то $F(G/F(G)) \neq \neq \{1\}$.

Поэтому в силу теоремы 2 G либо разрешимая группа Фробениуса, либо двойная группа Фробениуса. Обратно, если это имеет место, то в силу 2.4, 2.10 и 2.11, G — несвязная разрешимая группа. Тем самым доказано сформулированное во введении следствие теоремы 2.

§ 3. Доказательство теоремы 3

3.1. Лемма. *(Кронекер.) Если модули целого алгебраического числа α и всех чисел с ним сопряженных равны единице, то α — корень из единицы.*

3.2. Для любой конечной группы G и ее неприводимого комплексного характера χ T_χ будет означать множество нулей характера χ,

$$U_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) \text{ — корень из } 1\}$$

— множество «унитарных элементов» характера χ, $f_\chi = \chi(1)$, $g_\chi = |G|/f_\chi$.

3.3. Начиная с этого момента и до п. 3.11 включительно характер χ группы G удовлетворяет условию (1) теоремы 3. В этом случае, как легко видеть,

$$(1) \qquad |T_\chi| = f_\chi^2 - 1. \quad ^{13)}$$

При помощи 3.1 легко показать, что

$$(2) \qquad G^* = T_\chi \cup U_\chi \quad ^{14)}$$

3.4. Лемма. *$\{T_\chi, U_\chi\}$ — нормальное C-разбиение группы G.*

Доказательство. Так как $f_\chi > 1$, то $T_\chi \neq \emptyset$ [1]. Из $U_\chi = \emptyset$ следует в силу (1) $|G| = f_\chi^2$, откуда $f_\chi = 1$ — противоречие. Таким образом, $U_\chi \neq \emptyset$. Ввиду (2) и 3.2 некоторая степень $\vartheta = \chi^n$ характера χ принимает на T_χ и U_χ соответственно значения 0 и 1. Утверждение поэтому следует из 1.16.

3.5. Следствие. *Группа G несвязна.*

3.6. Следствие. *Порядки нулей характера χ взаимно просты с порядками унитарных элементов.*

3.7. Лемма. *Если $H \leqq G$, то $H \subseteqq T_\chi$ равносильно $|H| \mid f_\chi$.*

Доказательство. Так как $f_\chi + \sum_{x \in U_\chi \cap H} \chi(x) = \sum_{x \in H} \chi(x) \equiv 0 \pmod{|H|}$, то $H \subseteqq \hat{T}_\chi$ влечет $|H| \mid f_\chi$. Так как $f_\chi^2 + |U_\chi \cap H| = \sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 \equiv 0 \pmod{|H|}$, то $|H| \mid f_\chi$ влечет $|U_\chi \cap H| \equiv \pmod{|H|}$, откуда $U_\chi \cap H = \emptyset$ и, следовательно, $H \subseteqq \hat{T}_\chi$.

---

[12]) Другое доказательство теоремы 2 получено А. И. Вейцблитом.

[13]) (1), как можно показать ([2]), равносильно условию (1) теоремы 3.

[14]) (2), очевидно, в свою очередь, влечет условие (1) теоремы 3.

3.8. Лемма. $f_\chi = c(T_\chi)$, $g_\chi = c(U_\chi)$.

Доказательство. Ввиду 3.7 и 1.7 $c(T_\chi)|f_\chi$. Полагая $f_\chi = c(T_\chi)m$, в силу 3.4 и 1.9 будем иметь $(m, c(T_\chi)) = 1$. Допустим, что $m > 1$, $p \in \pi(m)$, $x \in G$, $|x| = p$. Так как $|\langle x \rangle| \,|\, f_\chi$, то ввиду 3.7 $\langle x \rangle \subseteqq \hat{T}_\chi$ откуда, в силу 1.12, $p | c(T_\chi)$ — противоречие. Следовательно, $m = 1$, $f_\chi = c(T_\chi)$. Отсюда, в силу 1.9, $g_\chi = c(U_\chi)$.

3.9. Следствие. $\hat{T}_\chi = \{x \in G | x^{f_\chi} = 1\}$, $\hat{U}_\chi = \{x \in G | x^{g_\chi} = 1\}$.

3.10. Следствие. $(f_\chi, g_\chi) = 1$.

3.11. Следствие. *Если* $H \leqq G$, *то* $H \subseteqq \hat{U}_\chi$, *равносильно* $|H| \,|\, g_\chi$.

Доказательство. Вытекает из 3.8 и 1.12.

3.12. Лемма. *Пусть Ф-группа Фробениуса с ядром Фробениуса N порядка n, Г — транзитивное подстановочное представление n-й степени группы Ф. Тогда Г точно и Г(Ф) — подстановочная группа Фробениуса* [15]).

3.13. Начиная с этого пункта группа G и характер χ удовлетворяют всем условиям (I)—(III) теоремы 3. Так как подгруппа H связна, то $H \subseteqq \hat{D}$, где D — компонента связности группы G. Так как $|H| = f_\chi$, то в силу 3.7 $H \subseteqq \hat{T}_\chi$, откуда (ввиду 3.4 и несвязности T_χ) $D \subset T_\chi$. Полагая $N = N_G(D)$, будем иметь $\hat{D} \subseteqq N$. Если $\Omega = \{D_0, D_1, \ldots, D_n\}$ — класс компонент связности сопряженных с $D = D_0$, то

(3) $$n + 1 = (G : N).$$

Так как T_χ нормально, то $D_i \subset T_\chi$ $(i = 0, \ldots, n)$ и, следовательно, $\bigcup_{i=0}^{n} D_i \subseteqq T_\chi$. Докажем, что

(4) $$\bigcup_{i=0}^{n} D_i = T_\chi.$$

Заметим, что $A = \bigcup_i D_i$ непусто, замкнуто и нормально. Полагая $B = T_\chi \setminus A$ получим в силу 1.9 и 3.8: $f_\chi = c(T_\chi) = c(A)c(B)$. Так как H связна и $H \subseteqq \hat{T}_\chi$, то H содержится в одном из подмножеств $\hat{A}$, $\hat{B}$. Если, например, $H \subseteqq \hat{A}$, то в силу $|H| = f_\chi$ и 1.7 будем иметь $f_\chi | c(A)$. Поэтому $c(B) = 1$, откуда $B = \emptyset$, $A = T_\chi$, что и доказывает (4). Из (4) и несвязности T_χ вытекает, что $n > 1$.

Докажем справедливость включения

(5) $$N \setminus \hat{D} \subseteqq U_\chi.$$

Если $\hat{D} = N$, (5) очевидно. Если $\hat{D} \neq N$, то применяя 1.16 к группе N и N-инвариантому замкнутому подмножеству $D \subset N^{\#}$, заключаем что порядки элементов $N \setminus \hat{D}$ взаимно просты с порядками элементов $\hat{D}$. Так как $\hat{D} \supseteqq H$, $|H| = f_\chi$, то порядки элементов $N \setminus \hat{D}$ взаимно просты с f_χ и, следовательно, делят g_χ, откуда ввиду 3.9, вытекает (5). В силу (5) и 3.9

(6) $$\hat{D} = \{x \in N | x^{f_\chi} = 1\}.$$

[15]) Т. е. $\Gamma(\Phi)$ строго транзитивна, но не регулярна.

Так как $f_\chi \,\|\, |N|$, то ввиду 1.14 $|\hat{D}| \equiv 0 \pmod{f_\chi}$, откуда

$$(7) \qquad |D| \equiv -1 \pmod{f_\chi}.$$

Учитывая вытекающие из (1) и (4) равенство $f_\chi^2 - 1 = \sum_{i=0}^{n} |D_i| = (n+1)|D|$, получаем из (7): $n \equiv 0 \pmod{f_\chi}$. Так как $n \geqq 1$, то $n = kf_\chi$ $(k \in \mathbf{Z},\, k \geqq 1)$. Поскольку в силу (7) $|D| = lf_\chi - 1$ $(l \in \mathbf{Z},\, l \geqq 1)$, то $f_\chi^2 - 1 = (n+1)|D| = (kf_\chi + 1)(lf_\chi - 1) \geqq \geqq f_\chi^2 - 1$, откуда $k = l = 1$. Поэтому $|D| = n - 1$, $n = f_\chi$ и, следовательно, $|\hat{D}| = = f_\chi = |H|$, откуда, ввиду $\hat{D} \supseteqq H$,

$$(8) \qquad \hat{D} = H.$$

Вместе с тем, $N = N_G(\hat{D}) = N_G(H)$, откуда, ввиду (3),

$$(9) \qquad (G : N_G(H)) = n + 1.$$

Полагая $H_i = \hat{D}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, получим класс сопряженных подгрупп $\{H_0 = H, H_1, \ldots, H_n\}$. Так как подмножества D_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ попарно не пересекаются, то

$$(10) \qquad H_i \cap H_j = \{1\}, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Рассмотрим две возможности.

Случай 1: $N = N_G(H) = H$ и, следовательно,

$$(11) \qquad N_i = N_G(H_i) = H_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Будем рассматривать $\Omega = \{D_0, \ldots, D_n\}$ как множество «точек», на котором группа G действует сопряжениями. Соответствующее представление Γ группы G подстановками множества Ω транзитивно; из (10) и (11) следует, что Γ точно и $\Gamma(G)$ — подстановочная группа Фробениуса степени $n + 1 = f_\chi + 1$. Порядок ее ядра равен, как известно, $n + 1$. Дополнительными множителями являются подгруппы $\Gamma(H_i) \cong H_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Так как $|\Gamma(H_i)| = |H_i| = f_\chi = n$, то $\Gamma(G)$ — дважды транзитивная группа Фробениуса. Следовательно, G — Z-группа.

Случай 2: $N = N_G(H) \supset H$. Так как $|H| = f_\chi = n$, $|G| = f_\chi \cdot g_\chi$, то $|N| = n \cdot m$, где $m = (N : H) > 1$, $m | g_\chi$. В силу (5) и (8) $N \setminus H \subseteqq U_\chi$. Так как $H \subset \hat{T}_\chi$ и T_χ замкнуто, то элементы $N \setminus H$ действуют на H регулярно. Поэтому N-группа Фробениуса с ядром H. Пусть Γ-введенное выше подстановочное представление группы G. Стабилизатор $St(D_i)$ «точки» D_i совпадает с $N_i = N_G(D_i) = = N_G(H_i)$. Докажем, что группа N_i действует на $\Omega_i = \{D_0, \ldots, D_{i-1}, D_{i+1}, \ldots, D_n\}$ транзитивно. Заметим, что N_i-стабилизатор $St_{N_i}(D_j)$ «точки» D_j $(j \neq i)$ совпадает с $L_{ij} = N_i \cap N_j$. Легко видеть, что $L_{ij} \cap H_i = \{1\}$. Действительно, $L_{ij} \cap H_i = (N_i \cap N_j) \cap H_i = (N_i \cap H_i) \cap N_j = H_i \cap N_j$. Если $x \in H_i \cap N_j$, то $x^{f_\chi} = 1$; так как, ввиду (6) и (8), $H_j = \hat{D}_j = \{x \in N_j \mid x^{f_\chi} = 1\}$, то $x^{f_\chi} = 1$, $x \in N_j$ влечет $x \in H_j$. Поэтому $x \in H_i \cap N_j$ влечет $x \in H_i \cap H_j$, откуда, ввиду (10), $x = 1$. Итак, $L_{ij} \cap H_i = \{1\}$ $(i \neq j)$. Так как $L_{ij} \subseteqq N_i$ и $H_i \lhd N_i$, отсюда вытекает, что $|L_{ij}| \,|\, (N_i : H_i)$, т. е. $|L_{ij}| \,|\, m$. Таким образом, $m' = |St_{N_i}(D_j)|$ делит m: $m = m' \cdot m''$ $(m'' \in \mathbf{Z},\, m'' \geqq 1)$. Поэтому длина N_i-орбиты «точки» D_j равна $(N_i : St_{N_i}(D_j)) =$

$=\frac{nm}{m'}=nm''\geqq n=|\Omega_i|$. Следовательно, N_i — орбита «точки» D_j $(j\neq i)$ совпадает с Ω_i. Поэтому группа N_i действует на Ω_i транзитивно. Пусть Γ_i — соответствующее представление группы N_i подстановками множества Ω_i. Так как Γ_i транзитивно при любом $i=0, 1, \ldots, n$, то Γ дважды транзитивно. Так как N_i-группа Фробениуса, порядок ядра H_i которой равен степени n представления Γ_i, то в силу 3.12 Γ_i точно и $\Gamma_i(N_i)$ — подстановочная группа Фробениуса. Поэтому Γ — точное строго дважды транзитивное представление группы G, откуда следует, что G — Z-группа степени $n+1$.

Обратное утверждение очевидно: если G — подстановочная Z-группа степени $n+1$ действующая на $\Omega=\{0, 1, \ldots, n\}$, χ_s — ее естественный, подстановочный характер, то $\chi=\chi_s-1$ — неприводимый над $\mathbf{C}$ характер, принимающий на $G^\#$ значения 0, 1, -1. При этом, $f_\chi=\chi_s(1)-1=n$. Если $i\in\Omega$, то $St(i)$-группа Фробениуса степени n; ее ядро H_i имеет порядок $n=f_\chi$; ввиду нильпотентности H_i связна. Под множества H_i замкнуты и поэтому $T_\chi=\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i^\#$ несвязно. Теорема 3 доказана.

3.14. Лемма.[16]) *Пусть G — несвязная группа четного порядка, $\{A, B\}$ — ее нормальное C-разбиение. Если $c(A)$ четно и неприводимый комплексный характер группы G принимает всюду на A значение $\alpha\neq f_\chi$, то* (I) $\alpha\in\mathbf{Z}$; (II) $\chi=\bar\chi$ *и индекс Шура* $\operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\chi$ *характера χ над $\mathbf{R}$ равен* 1; (III) *множество $I(G)$ инволюций группы G является G — классом;* (IV) *если $x\in I(G)$, то $C_G(x)$ — холловская подгруппа порядка $c(A)=f_\chi-\alpha$.*

Доказательство. Так как $I(G)\subset A$, то $\alpha=\chi(x)\,(x\in I(G))$. Поэтому $\alpha\in\mathbf{Z}$. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся формулой Фробениуса—Шура:

$$(12)\qquad \sum_{x\in G}\chi(x^2)=\begin{cases}|G|, & \text{если}\quad \chi=\bar\chi \quad \text{и } \operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\quad \chi=1\\ -|G|, & \text{если}\quad \chi=\bar\chi \quad \text{и } \operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\quad \chi=2\\ 0, & \text{если}\quad \chi\neq\bar\chi.\end{cases}$$

Обозначив левую часть (12) через σ и использовав замкнутость A, получим $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, где $\sigma_1=\sum\limits_{x\in I(G)}\chi(x^2)=f_\chi+\alpha|I(G)|$, $\sigma_2=\sum\limits_{\alpha\in A\setminus I(G)}\chi(x^2)=\alpha|A|-\alpha|I(G)|$, $\sigma_3=\sum\limits_{x\in B}\chi(x^2)$. Так как элементы B имеют нечетные порядки и χ — неглавный характер, то, ввиду замкнутости B, $\sigma_3=\sum\limits_{x\in B}\chi(x)=-\sum\limits_{x\in\hat A}\chi(x)=-f_\chi-\alpha|A|$. Следовательно, $\sigma=(f_\chi-\alpha)|I(G)|$. Так как $\alpha\in\mathbf{Z}$, $\alpha\neq f_\chi$, то $\sigma>0$[17]). Следовательно, ввиду (12), $\sigma=|G|$, $\chi=\bar\chi$, $\operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\chi=1$. Таким образом

$$(13)\qquad |G|=(f_\chi-\alpha)|I(G)|.$$

Пусть $x\in I(G)$. Тогда $x\in A$ и, следовательно, $C_G(x)\subseteq\hat A$. Если $H\leqq G$, $H\subseteq\hat A$, то $\sum\limits_{x\in H}\chi(x)=f_\chi+\alpha|H^\#|$, откуда $|H|\,|\,f_\chi-\alpha$. В частности, $|C_G(x)|\,|\,f_\chi-\alpha$. Полагая

[16]) Частный случай $(\alpha=0)$ сформулирован в [6].

[17]) Так как $\alpha=\chi(x)\,(x\in I(G))$, то $|\alpha|\leqq\chi(1)=f_\chi$, откуда ввиду $\alpha\neq f_\chi$, имеем $\alpha<f_\chi$.

$f_\chi - \alpha = m|C_G(x)|$, ввиду (13), получим $|x^G| = (G : C_G(x)) = m|I(G)| \geqq |I(G)|$. С другой стороны, так как $x^G \subseteqq I(G)$, то $|x^G| \leqq |I(G)|$. Следовательно, $I(G) = x^G$.

Таким образом $|C_G(x)| = f_\chi - \alpha$ и $I(G)$ — G-класс. Далее, из $C_G(x) \subseteqq \hat{A}$ следует, ввиду 1.12, $|C_G(x)| \, | \, c(A)$. Поэтому $f_\chi - \alpha | c(A)$. Так как $H \leqq G$, $H \subseteqq \hat{A}$ влечет $|H| \, | \, f_\chi - \alpha$, то в силу 1.7 $c(A) | f_\chi - \alpha$. Следовательно, $c(A) = f_\chi - \alpha$. Таким образом $|C_G(x)| = c(A) = f_\chi - \alpha$. Отсюда и из 1.9 следует, что $C_G(x)$ — холловская подгруппа.

3.15. Следствие. *Если характер χ группы удовлетворяет условиям* (I) *и* (III) *теоремы* 3 *и f_χ четно, то G является Z-группой.*

Доказательство. Применяем лемму 1.14 к группе G, полагая $A = T_\chi$, $\alpha = 0$. В силу 3.14 подгруппа $H = C_G(x)$ $(x \in I(G))$ имеет порядок f_χ. Так как H связна, то условие (II) теоремы 3 выполняется автоматически.

Литература

[1] W. Burnside, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, **1** (1904), 112—116.

[2] P. X. Gallagher, Group characters and commutators, *Math. Zeitschr.*, **79**, № 2 (1962), 122—126.

[3] R. Brauer and K. A. Fauler, On groups of even order, *Ann. of Math.* **62** (1955), 565—583.

[4] G. Frobenius, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1907), 428—437.

[5] J. S. Williams, A sufficient condition on centralizers for a Finite Group to contain a proper CCT-subgroup, *J. Algebra*, **42** (1976), 549—556.

[6] А. И. Вейцблит—Э. М. Жмудь, «Связность конечной группы и группы Цассенхауза». *Сообщения АН Грузинской ССР, том.* **90**, *№ 2* (1978).

[7] Ж. П. Серр, Линейные представления конечных групп, «*МИР*», *Москва*, 1970.