Доверительное множество для коэффициента простейшего авторегрессионного поля

ДЬ. ТЕРДИК (Дебрецен)

1. **Постановка задачи.** Одной из первоочередных задач при статистическом анализе модели стохастического разностного уравнения является построение доверительного множества для коэффициентов уравнения. Рассматриваются две модели,

I $$x_{k,l} = ax_{k-1,l} + \varepsilon_{k,l}$$

II $$x_{k,l} = ax_{k-1,l-1} + \varepsilon_{k,l}$$

где случайные величины $x_{k,l}$ $(k, l \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$ имеют моменты второго порядка, $\varepsilon_{k,l}$ независимы и гауссовские случаиные величины, $\mathbf{E}\varepsilon_{k,l} = m_\varepsilon$, $\mathbf{D}^2\varepsilon_{k,l} = \sigma_\varepsilon^2$, и a вещественное число из отрезка $(-1; 1)$. Строится доверительное множество для коэффициента a по наблюдениям на прямоуголнике $[(0, 0); (K, L)] = \{(k, l) \in \mathbf{Z}^2 | 0 \leqq k \leqq K,\ 0 \leqq l \leqq L\}$ ряда $x_{0,0}; x_{0,1}; x_{0,2}; \ldots x_{0,L}; x_{1,0} \ldots x_{K,L}$. Будем различать 4 случая: 1) значения $\mathbf{E}x_{k,l} = m$ и $\mathbf{D}^2x_{k,l} = \sigma^2$ известны, 2) m неизвестно, σ^2 известно, 3) m известно, σ^2 неизвестно, 4) m и σ^2 неизвестны. Используется метод *Линника* [1], для построения доверительного множества в случае простейшего стационарного ряда.

2. **Структура ковариации.** Легко видеть, что поле $x_{k,l}$ $((k, l) \in \mathbf{Z}^2)$ можно представить в форме скальзящего среднего

$$\text{I} \quad x_{k,l} = \sum_{r=0}^{\infty} a^r \varepsilon_{k-r,l}$$

$$\text{II} \quad x_{k,l} = \sum_{r=0}^{\infty} a^r \varepsilon_{k-r,l-r}$$

(ходимость понимается в среднеквадратическом смысле). Ясно, что $x_{k,l}$ $((k, l) \in \mathbf{Z}^2)$ гауссовские случайные величины $\mathbf{E}x_{k,l} = m = \dfrac{m_\varepsilon}{1-a}$ и $\mathbf{D}^2x_{k,l} = \sigma^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a^2}$. Поле $x_{k,l}$ является однородным, т. е. $\mathbf{cov}(x_{i,j}, x_{k,l}) = C(i-k, j-l)$ для каждого $(i, j), (k, l) \in \mathbf{Z}^2$, так что

$$\text{I} \quad C(s, 0) = a^s\sigma^2 \quad \text{и} \quad C(s, t) = 0 \quad \text{если} \quad t \neq 0$$

$$\text{II} \quad C(s, s) = a^s\sigma^2 \quad \text{и} \quad C(s, t) = 0 \quad \text{если} \quad s \neq t.$$

Таким образом, матрица корреляции $\mathbf{H}$ для гауссовского вектора $\underline{x}_{K,L}=(x_{0,0};x_{0,1};\dots x_{0,L};x_{1,0};\dots x_{K,L-1};x_{K,L})$ имеет вид $\mathbf{H}=(h_{i,j})$, где $h_{i,j}=h_{j,i}$ и если $i\leqq j$

I $h_{i,j}=a^s$ при $(i;j)=(i;\,i+s(L+1)),\quad s=0,1,2,\dots,\left[\dfrac{(K+1)(L+1)-i}{L+1}\right].$

$h_{i,j}=0$ в противном случае

II $h_{i,j}=a^s$ при $(i,j)=(k(L+1)+l,\,k(L+1)+l+s(L+2))$

$$k=0,1,2,\dots,K;\; l=1,2,\dots,L+1;\; s\geqq 0 \quad \text{и} \quad (k+s,\,l-1+s)\leqq(K,L)$$

$h_{i,j}=0$ в противном случае.

Через $\mathbf{H}^{-1}=(1-a^2)^{-1}\mathbf{G}=(1-a^2)^{-1}(g_{i,j})$ обозначим обратную матрицу корреляции, где

I $g_{i,i}=1$ если $1\leqq i\leqq L+1$ или $K(L+1)<i\leqq(K+1)(L+1)$
$=1+a^2$ в противном случае
$g_{i,j}=-a$ если $j=i\pm(L+1)$
$=0$ в противном случае $(i\neq j)$

II $g_{i,i}=1-a^2$ если $i=L+1$ или $i=K(L+1)+1$
$=1+a^2$ если $i=k(L+1)+l$ и $(k+1,l)\leqq(K,L)$ и $(k-1,l-2)\geqq(0,0)$
$=1$ в противном случае
$g_{i,j}=-a$ если $j=i\pm(L+2)$ и $i\neq L+1$ и $i\neq K(L+1)+1$
$=0$ в противном случае.

Полагая $y_{k,l}=(x_{k,l}-m)/\sigma$ видим, что плотность вероятности для вектора $\underline{x}_{K,L}$ можно записать в виде

$$f(\underline{x}_{K,L})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}}\sigma^{(K+1)(L+1)}D_{K,L}(a)}e^{-1/2Q(\underline{y}_{K,L})}$$

где $D_{K,L}(a)$ зависит лишь от (K,L) и a и

I $$Q(\underline{y}_{K,L})=\frac{1}{1-a^2}\left(\sum_{(0,0)}^{(K,L)}y_{k,l}^2+a^2\sum_{(1,0)}^{(K-1,L)}y_{k,l}^2-2a\sum_{(0,0)}^{(K-1,L)}y_{k,l}y_{k+1,l}\right)$$

II $$Q(\underline{y}_{K,L})=\frac{1}{1-a^2}\left(\sum_{(0,0)}^{(K,L)}y_{k,l}^2-a^2(y_{0,L}^2+y_{K,0}^2)+\right.$$
$$\left.+a^2\sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)}y_{k,l}^2-2a\sum_{(1,1)}^{(K,L)}y_{k,l}y_{k-1,l-1}\right).$$

3. **Значения m и σ^2 известны.** Не нарушая общности положим $m=0$ и $\sigma^2=1$, так что $y_{k,l}=x_{k,l}$. Вычисляя характеристическую функцию для квадратичной формы $1/2Q(\underline{x}_{K,L})$, находим

$$\mathbf{E}e^{it\,1/2\,Q(\underline{x}_{K,L})}=\frac{1}{(1-it)^{(K+1)(L+1)}}.$$

Следовательно, $1/2Q(\underline{x}_{K,L})$ имеет распределение типа χ^2 с $(K+1)(L+1)$ степенями свободы. При $\beta \geqq \alpha \geqq 0$ мы имеем

$$P\left\{\alpha \leqq \frac{1}{1-a^2}(S_1+a^2S_2-2aR) \leqq \beta\right\} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{(K+1)(L+1)}{2}\right)} \int\limits_{\alpha/2}^{\beta/2} x^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}-1} e^{-x}\,dx =$$

$$= \varphi(\alpha, \beta),$$

где через S_1, S_2 и R обозначены следующие статистики:

I $$S_1 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}^2;\ S_2 = \sum_{(1,0)}^{(K-1,l)} x_{k,l}^2;\ R = \sum_{(0,0)}^{(K-1,L)} x_{k,l}x_{k+1,l}.$$

II $$S_1 = \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}^2;\ S_2 = \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} x_{k,l}^2-(x_{0,L}^2+x_{K,0}^2)$$

$$R = \sum_{(1,1)}^{(K,L)} x_{k,l}x_{k-1,l-1}.$$

$\varphi(\alpha, \beta)$ есть вероятность совмещения двух неравенств:

$$\left.\begin{aligned} a^2(S_2+\beta)-2aR+S_1-\beta \leqq 0 \\ a^2(S_2+\alpha)-2aR+S_1-\alpha \geqq 0 \end{aligned}\right\}$$

Совмещение этих неравенств отвечает местонахождению в некотором множестве $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ на реальной оси, которое и будет доверительным множеством для a.

4. m **неизвестно,** σ^2 **известно.** Введем вместо $x_{k,l}$, $(k, l)\in[(0, 0);\ (K, L)]$ новые переменные по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{(K+1)(L+1)} \sum_{(0,0)}^{(K,L)} x_{k,l}$$

$$z_{0,0} = \bar{x};\quad z_{k,l} = x_{k,l}-\bar{x},\quad (k, l) \neq (0, 0),$$

$$x_{0,0} = \sum_{(k,l)>(0,0)} z_{k,l},\quad x_{k,l} = z_{k,l}+z_{0,0},\quad (k, l) \neq (0, 0).$$

Можно считать, что $\sigma^2=1$ и тогда закон распределение для вектора $\underline{z}_{K,L}= =(z_{0,0};\ z_{0,1};\ \dots\ z_{0,L};\ z_{1,0};\ \dots\ z_{K,L})$ имеет вид

$$f(\underline{z}_{K,L}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{(K+1)(L+1)}{2}} D_{K,L}(a)} e^{-1/2Q_1(\underline{z}_{K,L})}$$

где

$$Q_1(z_{K,L}) = Q\big(z_{0,0} - m - \sum_{(k,l)>(0,0)} z_{k,l};\ z_{00} - m + z_{01};\ \dots;\ z_{00} - m + z_{K,L}\big).$$

Нас будет интересовать плотность вероятности вектора

$$(z_{0,1};\ z_{0,2};\ \dots;\ z_{0,L};\ z_{1,0};\ \dots z_{K,L}),$$

которая равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z_{K,L})\, d\xi, \quad (\xi = z_{00} - m).$$

мы имеем

$$Q\big(z_{00} - m - \sum_{(k,l)>(0,0)} z_{k,l};\ z_{00} - m + z_{01};\ \dots z_{00} - m + z_{K,L}\big) =$$

$$= (1 - a^2)^{-1}\big(A_{K,L}(a)\xi^2 + B_{K,L}(a, z)\xi + Q_2(z)\big),$$

где

I $$A_{K,L}(a) = a^2(K-1)(L+1) - 2aK(L+1) + (K+1)(L+1),$$

$$B_{K,L}(a, z) = -2a(1-a) \sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}$$

$$Q_2(z) = (1 - a^2)Q\big(-\sum_{k,l)>(0,0)} z_{k,l};\ z_{0,1};\ z_{0,2};\ \dots z_{K,L}\big).$$

II $$A_{K,L}(a) = a^2[(K-1)(L-1) - 2] - 2aKL + (K+1)(L+1),$$

$$B_{K,L}(a, z) = -2a^2(z_{0,L} + z_{K,0}) - 2a(1-a) \sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l},$$

$$Q_2(z) = (1 - a^2)Q\left(-\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l};\ z_{0,1};\ z_{0,2};\ \dots z_{K,L}\right).$$

Отсюда получим

$$f(z_{0,1};\ z_{0,2};\ \dots z_{0,2};\ z_{1,0};\ \dots z_{K,L}) = C_{K,L}(a) e^{-1/2\left(\frac{1}{1-a^2} Q_3(z)\right)},$$

где

$$Q_3(z) = Q_3(z_{0,1};\ z_{0,2};\ \dots z_{K,L}) = Q_2(z) - \frac{B_{K,L}^2(a, z)}{4A_{K,L}(a)},$$

и $C_{K,L}(a)$ зависит лишь от a и (K, L). Полагая $Q_4(z) = (1-a^2)^{-1}Q_3(z)$ видим, что $1/2Q_4(z)$ имеет распределение типа χ^2 с $(K+1)(L+1)-1$ степенями свободы. При $\beta \geqq \alpha \geqq 0$ вероятность совмещения неравенств может быть выражена в виде

$$\mathbf{P}(\alpha \leqq Q_4(z) \leqq \beta) = \varphi_1(\alpha, \beta).$$

Введем статистики

I
$$S_1=\Big(\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}\Big)^2+\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}^2=\sum_{(0,0)}^{(K,L)}(x_{k,l}-\bar{x})^2,$$

$$S_2=\sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}^2=\sum_{(1,0)}^{(K-1,L)}(x_{k,l}-\bar{x})^2,$$

$$R=\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}z_{k+1,l}-z_{1,0}\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}=\sum_{(1,0)}^{(K,L)}(x_{k,l}-\bar{x})(x_{k-1,l}-\bar{x}),$$

$$B=-\sum_{(1,0)}^{(K-1,L)} z_{k,l}=\sum_{l=0}^{L}(x_{0,l}-\bar{x})+\sum_{l=0}^{L}(x_{K,l}-\bar{x}),$$

II
$$S_1=\Big(\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}\Big)^2+\sum_{(k,l)>(0,0)}^{(K,L)} z_{k,l}^2=\sum_{(0,0)}^{(K,L)}(x_{k,l}-\bar{x})^2,$$

$$S_2=\sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l}^2-(z_{0,L}^2+z_{K,0}^2)=\sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)}(x_{k,l}-\bar{x})^2-(x_{0,L}-\bar{x})^2-(x_{K,0}-\bar{x})^2,$$

$$R=\sum_{(1,1)<(k,l)} z_{k,l}z_{k-1,l-1}-z_{1,1}\sum_{(k,l)>(0,0)} z_{k,l}=\sum_{(1,1)}^{(K,L)}(x_{k,l}-\bar{x})(x_{k-1,l-1}-\bar{x}),$$

$$B_1=z_{0,L}+z_{K,0}=x_{0,L}+x_{K,0}-2\bar{x},$$

$$B_2=-\sum_{(1,1)}^{(K-1,L-1)} z_{k,l}=\sum_{l=0}^{L}(x_{0,l}-\bar{x})+\sum_{l=0}^{L}(x_{K,l}-\bar{x})+\sum_{k=1}^{K-1}(x_{k,0}-\bar{x})+\sum_{k=1}^{K-1}(x_{k,L}-\bar{x}).$$

В терминах этих статистик

I
$$Q_4(z)=\frac{1}{1-a^2}\left\{S_1+a^2S_2-2aR-\frac{a^2(1-a)^2B^2}{A_{K,L}(a)}\right\},$$

II
$$Q_4(z)=\frac{1}{1-a^2}\left\{S_1+a^2S_2-2aR-\frac{(2a(1-Q)B_2-2a^2B_1)^2}{4A_{K,L}(a)}\right..$$

Таким образом с вероятностью $\varphi_1(\alpha,\beta)$

I
$$\left.\begin{aligned}a^2(S_2+\beta)-2aR+(S_1-\beta)-\frac{a^2(1-a)^2B^2}{A_{K,L}(a)}\leqq 0\\ a^2(S_2+\alpha)-2aR+(S_1-\alpha)-\frac{a^2(1-a)^2B^2}{A_{K,L}(a)}\geqq 0\end{aligned}\right\},$$

II
$$\left.\begin{aligned}a^2(S_2+\beta)-2aR+(S_1-\beta)-\frac{(2a(1-a)B_2-2a^2B_1)^2}{4A_{K,L}}\leqq 0\\ a^2(S_2+\alpha)-2aR+(S_1-\alpha)-\frac{(2a(1-a)B_2-2a^2B_1)^2}{4A_{K,L}}\geqq 0\end{aligned}\right\}.$$

Совмещение этих неравенств определяет доверительное множество для неизвестного параметра a.

5. **m известно, σ^2 неизвестно.** Положим $\mu=[K/3]$, и определим ν как наибольшее целое число, для которого $\mu+2\nu\leqq K$. Составим две квадратичной формы

$$\text{I}\qquad u(\underline{x})=\sum_{(1,0)}^{(\mu,L)}(x_{k,l}-ax_{k-1,l})^2=\sum_{(1,0)}^{(\mu,L)}x_{k,l}^2+a^2\sum_{(1,0)}^{(\mu,L)}x_{k-1,l}^2-2a\sum_{(1,0)}^{(\mu,L)}x_{k-1,l}x_{k,l},$$

$$W(\underline{x})=\sum_{(1,0)}^{(\nu,L)}(x_{\mu+2k,l}-a^2x_{\mu+2(k-1),l})^2=$$

$$=\sum_{(1,0)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2k,l}^2+a^4\sum_{(1,0)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2(k-1),l}^2-2a^2\sum_{(1,0)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2k,l}x_{\mu+2(k-1),l},$$

$$\text{II}\quad u(\underline{x})=\sum_{(1,1)}^{(\mu,L)}(x_{k,l}-ax_{k-1,l-1})^2=\sum_{(1,1)}^{(\mu,L)}x_{k,l}^2+a^2\sum_{(1,1)}^{(\mu,L)}x_{k-1,l-1}^2-2a\sum_{(1,1)}^{(\mu,L)}x_{k,l}x_{k-1,l-1},$$

$$W(\underline{x})=\sum_{(1,2)}^{(\nu,L)}(x_{\mu+2k,l}-a^2x_{\mu+2(k-1),l-2})^2=$$

$$=\sum_{(1,1)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2k,l}^2+a^4\sum_{(1,2)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2(k-1),l-2}^2-2a^2\sum_{(1,2)}^{(\nu,L)}x_{\mu+2k,l}x_{\mu+2(k-1),l-2}.$$

Величины $x_{k,l}-ax_{k-1,l}$ или $x_{k,l}-ax_{k-1,l-1}$ в совокуиности нормальны и независимы, точно также как и величины $x_{k,l}-a^2x_{k-2,l}$ или $x_{k,l}-a^2x_{k-2,l-2}$. Средние значения этих величин суть 0, а их диперсии $(1-a^2)/\sigma^2$ и $(1-a^4)/\sigma^2$. Отсюда следует, что

$$T=\frac{U(\underline{x})\dfrac{\sigma^2}{1-a^2}}{W(\underline{x})\dfrac{\sigma^2}{1-a^4}}=\frac{U(\underline{x})}{W(\underline{x})}(1+a^2)$$

имеет плотность распределения **F** (Фишера) т. е.

$$\psi(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu L+\mu L}{2}\right)x^{\frac{\mu L-1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{\mu L}{2}\right)x^{\frac{\mu L+\nu L-1}{2}-1}},\quad x>0.$$

При $\beta\geqq\alpha>0$ вероятность того что T удовлетворяет неравенству $\alpha\leqq T<\beta$

может быть определена. Введем статистики

I $$S_1 = \sum_{(1,0)}^{(\mu, L)} x_{k,l}^2;\ S_2 = \sum_{(1,0)}^{(\mu, L)} x_{k-1,l}^2;\ R = \sum_{(1,0)}^{(\mu, L)} x_{k,l}x_{k-1,l};$$

$$S_1' = \sum_{(1,0)}^{(\nu, L)} x_{x+2k,l}^2;\ S_2' = \sum_{(1,0)}^{(\nu, L)} x_{\mu+2(k-1),l}^2;\ R' = \sum_{(1,0)}^{(\nu, L)} x_{\mu+2k,l}x_{\mu+2(k-1),l};$$

II $$S_1 = \sum_{(1,1)}^{(\mu, L)} x_{k,l}^2;\ S_2 = \sum_{(1,1)}^{(\mu, L)} x_{k-1,l-1}^2;\ R = \sum_{(1,1)}^{(\mu, L)} x_{k,l}x_{k-1,l-1};$$

$$S_1' = \sum_{(1,2)}^{(\nu, L)} x_{\mu+2k,l}^2;\ S_2' = \sum_{(1,2)}^{(\nu, L)} x_{\mu+2(k-1),l-2}^2;\ R' = \sum_{(1,2)}^{(\nu, L)} x_{\mu+2k,l}x_{\mu+2(k-1),l-9}.$$

Возвращаясь к неравенству для T, перепишем его в виде

$$\alpha \leqq (1+a^2)\frac{S_1+a^2 S_2-2aR}{S_i+a^2 S_2'-2aR'} < \beta.$$

Теперь вероятность совмещения неравенств

$$\left.\begin{aligned} (1+a^2)(S_1+a^2S_2-2aR)-\alpha(S_1'+a^2S_1-2aR') \geqq 0 \\ (1+a^2)(S_1+a^2S_2-2aR)-\beta(S_1'+a^2S_1-2aR') \leqq 0 \end{aligned}\right\}$$

зависит только от α, β и (K, L) и определяет доверительное множество для a.

6. **Значения m и σ^2 неизвестно.** Пусть $\mu' = \left[\frac{\mu}{2}\right]$, $\nu' = [\nu/2]$, где μ и ν вышеопределены. Положим

I $$z_{k,l} = x_{k,l} - a x_{k-1,l}, \quad (k, l) \in [(1, 0); (\mu, L)],$$

$$y_{k,l} = x_{\mu+2k,l} - a^2 x_{\mu+2(k-1),l}, \quad (k, l) \in [(1, 0); (\nu, L)],$$

II $$z_{k,l} = x_{k,l} - a x_{k-1,l-1}, \quad (k, l) \in [(1, 1); (\mu, L)],$$

$$y_{k,l} = -a^2 x_{\mu+2(k-1),l-2} + x_{\mu+2k,l}, \quad (k, l) \in [(1, 2), (\nu, L)].$$

Эти величины независимы и нормальны. При помощи этих величин определим

I $$u_{k,l} = z_{2k,l} - z_{2k-1,l}, \quad (k, l) \in [(1, 0); (\mu', L)],$$

$$w_{k,l} = y_{2k,l} - y_{2k-1,l}, \quad (k, l) \in [(1, 0); (\nu', L)],$$

II $$u_{k,l} = z_{2k,l} - z_{2k-1,l}, \quad (k, l) \in [(1, 1); (\mu', L)],$$

$$w_{k,l} = y_{2k,l} - y_{2k-1,l}, \quad (k, l) \in [(1, 2); (\nu', L)].$$

Легко удебатая, что $\mathbf{E}u_{k,l} = \mathbf{E}w_{k,l} = 0$,

$$\mathbf{D}^2 u_{k,l} = \frac{2(1-a^2)}{\sigma^2}, \quad \mathbf{D}^2 w_{k,l} = \frac{2(1-a^4)}{\sigma^2}.$$

Введем квадратичные формы

$$U=\frac{\sigma^2}{2(1-a^2)}\sum_{(k,l)}u_{k,l}^2,\quad W=\sum_{(k,l)}\frac{\sigma^4}{2(1-a^4)}w_{k,l}^2.$$

Из предыдущего явствует, что они независимы и распределены по χ^2

I $\mu'(L+1)$, $\nu'(L+1)$

II $\mu' L$, $\nu'(L-1)$ степенямы свободы

Отсюда u/w имеет распределение $\mathbf{F}$, и при $\beta>\alpha>0$ вероятность

$$\mathbf{P}(\alpha \leqq u/w < \beta) = z(\alpha, \beta)$$

может быть определена. Далее, мы имеем

$$U=\frac{\sigma^2}{2(1-a^2)}(S_1+a^2S_2-2aR),$$

$$W=\frac{\sigma^2}{2(1-a^4)}(S_1'+a^4S_2'-2a^2R'),$$

где

I
$$S_1=\sum_{(1,0)}^{(\mu',L)}(x_{2k,l}-x_{2k-1,l})^2;\ S_2=\sum_{(1,0)}^{(\mu',L)}(x_{2k-1,l}-x_{2k-2,l})^2;$$

$$R=\sum_{(1,0)}^{(\mu',L)}(x_{2k,l}-x_{2k-1,l})(x_{2k-1,l}-x_{2k-2,l});$$

$$S_1'=\sum_{(1,0)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k,l}-x_{\mu+4k-2,l})^2;\ S_2'=\sum_{(1,0)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k-2,l}-x_{\mu+4k-4,l})^2;$$

$$R'=\sum_{(1,0)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k,l}-x_{\mu+4k-2,l})(x_{\mu+4k-2,l}-x_{\mu+4k-4,l}).$$

II
$$S_1=\sum_{(1,1)}^{(\mu',L)}(x_{2k,l}-x_{2k-1,l})^2;\ S_2=\sum_{(1,1)}^{(\mu',L)}(x_{2k-1,l-1}-x_{2k-2,l-1})^2;$$

$$R=\sum_{(1,1)}^{(\mu',L)}(x_{2k,l}-x_{2k-1,l})(x_{2k-1,l-1}-x_{2k-2,l-1}),$$

$$S_1'=\sum_{(1,2)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k,l}-x_{\mu+4k-2,l-2})^2;\ S_2'=\sum_{(1,2)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k-2,l}-x_{\mu+4k-4,l-2})^2;$$

$$R'=\sum_{(1,2)}^{(\nu',L)}(x_{\mu+4k,l}-x_{\mu+4k-2,l-2})(x_{\mu+4k-2,l}-x_{\mu+4k-4,l-2}).$$

Отсюда следует, что вероятность совмещения неравенств

$$\alpha\leqq\frac{(1+a^2)(S_1+a^2S_2-2aR)}{S_1'+a^4S_2'-2a^2R'}\leqq\beta$$

совподает $z(\alpha, \beta)$. Эти неравенства дают доверительное множество для a.

7. **Замечание.** *По наблюдению*

$$x_{0,0};\ x_{0,1};\ x_{0,2};\ \dots x_{0,L};\ \dots x_{K,L}$$

доверительные множества находятся решая системы состоящей из двух алгебраических неравенств.

Может быть доказано см. [1], что эти доверительные множества определяют значение a в смысле сходимости по вероятности, если по крайней мере K или L стремится к бесконечности. В случае больших выборок мы можем оценить коэффициенты авторегрессионного поля, см [3], и по ассимитотическим свойствам оценок построить доверительные множества для них.

Литература

[1] Ю. В. Линник, Об одном вопросе статистики зависимых наблюдений, *Изв. А. Н. СССР сер. мат.* **14** (1950), 501—522.

[2] Т. Андерсон, Статистический анализ временных рядов. Москва, 1976.

[3] Д. Тердик, Представление авторегрессионного поля в форме скальзящего среднего (на венгерском языке). *Прикладная Математика А. Н. ВНР* **3** (1977), 379—388.

(Поступила: 21. XII. 1978)