Обобщенные группы Цассенхауза

А. И. ВЕЙЦБЛИТ (Херсон), Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

В дальнейшем «группа» и «характер» означают соответственно «конечная группа» и «комплексный характер».

Каждая группа Цассенхауза («Z-группа») обладает неприводимым нелинейным характером, модули значений которого на отличных от единицы элементах группы равны 0 или 1: так как Z-группа является строго дважды транзитивной группой подстановок,[1]) то вычитание главного характера Z-группы от ее естественного подстановочного характера дает неприводимый характер, принимающий на нееденичных элементах группы значения $0, \ -1, \ 1$ [2]).

В настоящей работе изучается класс групп, для которых вышеуказанное свойство Z-групп является определяющим. Неприводимый нелинейный характер χ группы G назовем VZ-характером, если функция $|\chi(x)|$ $(x \in G)$ принимает на $G^{\#} = G \setminus \{1\}$ значения 0 и 1. Группу с отмеченным VZ-характером назовем VZ-группой[3]); VZ-группу будем называть VZ-группой 1-го рода, если она порождается множеством нулей ее VZ-характера и VZ-группой 2-го рода — в противном случае. Известны примеры VZ-групп, не являющихся Z-группами: $PSL(3, 4)$, M_{11}, простая группа Янко J_1 порядка 175.560.

Основные результаты работы

1. Доказана простота VZ-групп 1-го рода с тривиальной подгруппой Фиттинга и VZ-характером нечетной степени. (Теорема 3.2.)[4])

2. Доказано (предложение 2.28 и теорема 3.8), что VZ-группа с тривиальной подгруппой Фиттинга и VZ-характером χ четной степени является VZ-группой 1-го рода, ее инволюции сопряжены, централизаторы инволюций являются холловскими подгруппами порядка $\chi(1)$, цоколь является нециклической простой группой, вне которой характер χ обращается в нуль; если централизаторы инволюций не самонормализуются, VZ-группа рассматриваемого типа изоморфна одной из простых групп $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 7)$, $PSL(2, q)$ $(q = 2^{\lambda}, \ \lambda > 1)$, $\mathrm{Sz}\,(q)$ $(q = 2^{2\lambda+1})$, $PSL(3, 4)$[5]).

---

[1]) См. [18].

[2]) Значение 1 может выпускаться.

[3]) Существуют группы с несколькими VZ-характерами ($A_5 \cong PSL(2, 5)$ имеет два VZ-характера χ_1 и χ_2: $\chi_1(1) = 4$, $\chi_2(1) = 5$). Каждая такая группа определяет несколько VZ-групп.

[4]) Примеры: $M_{11}(\chi(1) = 55)$, $J_1(\chi(1) = 209)$.

[5]) Среди этих групп лишь $PSL(3, 4)$ не является Z-группой.

3. Дано описание класса VZ-групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга: этот класс совпадает с классом Z-групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга (теорема 4.4 и следствие 4.6).

Изложение в настоящей работе существенно опирается на результаты статьи [18], содержание которой предполагается известным.

Обозначения и термины

В настоящей работе сохраняются обозначения и терминология принятые в [18]. Дополнительно вводятся следующие обозначения: $\mathrm{Sc}(X)$ — цоколь группы X; $I(X)$ — множество всех инволюций группы X; $\mathrm{Irr}(X)$ — множество всех неприводимых характеров группы X; f_χ — степень $\chi(1)$ характера $\chi \in \mathrm{Irr}(X)$; $\mathrm{Ker}\,\chi = \{x \in X \mid \chi(x) = f_\chi\}$ — ядро характера χ, ψ^x $(x \in X)$-характер X — сопряженный с характером ψ подгруппы $Y \lhd X$: $\psi^x(y) = \psi(xyx^{-1})$ $(y \in Y)$, $\chi{\downarrow}Y$ — ограничение характера χ группы X на подгруппу Y; 1_X — главный характер группы X. $(\Theta_1, \Theta_2)_X$ — скалярное произведение $|X|^{-1} \sum \Theta_1(x)\overline{\Theta_2(x)}$ функций Θ_j: $X \to \mathbf{C}$ $(j=1, 2)$: $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел.

§ 1. Некоторые леммы

В этом параграфе G — неабелева группа с заданным нелинейным характером $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$; $T_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = 0\}$ — множество «нулей» характера χ; $U_\chi = \{x \in G \mid \chi(x)$ — корень из $1\}$ — множество «унитарных элементов» характера χ; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$ (очевидно, $N_\chi \lhd G$). Подгруппу $H \leqq G$ будем называть T-подгруппой, если $H \subseteq \hat{T}_\chi$ и U-подгруппой, если $H \subseteq \hat{U}_\chi$.

1.1. Лемма (Бернсайд [1]). $T_\chi \neq \emptyset$.

1.2. Лемма (Галлакер [9]). (I) $\chi{\downarrow}N_\chi \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$; (II) $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

1.3. Лемма (Галлакер [8]). *Имеет место неравенство*

$$f_\chi^2 - 1 \leqq \frac{|T_\chi|}{|Q(\chi)|}. \quad (1)$$ [6])

Знак равенства в (1) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus Q(\chi) = T_\chi \cup U_\chi$.

1.4. Лемма. *Если* $N \lhd G$, $N \cap U_\chi \neq \emptyset$, *то* $\chi{\downarrow}N$ *неразветвлен.*

Доказательство. Пусть $\chi{\downarrow}N = e(\psi_1 + \ldots + \psi_r)$, где $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \mathrm{Irr}(N)$ и попарно различны, e — индекс ветвления $\chi{\downarrow}N$. Если $x \in N \cap U_\chi$, то $e(\psi_1(x) + \ldots + \psi_r(x))$ — корень из 1, откуда $e = 1$.

1.5. Лемма. *Порядок каждого унитарного (т. е. состоящего из унитарных элементов характера χ) G — класса делится на f_χ.*

[6]) $Q(\chi) = \{x \in G \mid |\chi(x)| = f_\chi\}$ — «квазиядро» характера χ.

Доказательство. Пусть $x\in U_\chi$, $h_x=|x^G|$. Так как $\dfrac{h_x\chi(x)}{f_\chi}$ — целое алгебраическое число и $\chi(x)$ — корень из 1, то $f_\chi|h_x$.

1.6. Лемма. *Если — T-подгруппа, то* $|H|\,|f_\chi$.

Доказательство. $f_\chi=\sum_{x\in H}\chi(x)=|H|k$, где $k=(\chi\downarrow H, 1_H)_H\in\mathbf{Z}$.

1.7. Лемма. (Фейт—Томпсон [7][7]). *Если* $N\lhd G$ *и* $\operatorname{Ker}\chi\not\supseteq N$, *то из* $x\in G$, $C_G(x)\cap N=\{1\}$ *следует* $x\in T_\chi$.

1.8. Лемма. ([14]). $x\in T_\chi$ *влечет* $C_G(x)\subseteq N_\chi$.

1.9. Следствие. $Sc(G)\subseteq N_\chi$.

Доказательство. Если F — минимальный нормальный делитель группы G, $F\not\subseteq N_\chi$, то $F\cap N_\chi=\{1\}$, откуда $F\subseteq C_G(N_\chi)$; ввиду 1.8 отсюда вытекает $F\subseteq N_\chi$ — противоречие.

1.10. Лемма (Фробениус—Шур [3])

$$\sum_{x\in G}\chi(x^2)=\begin{cases}|G|, & \text{если}\quad \chi=\bar\chi \quad \text{и } \operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\ \chi=1\\ -|G|, & \text{если}\quad \chi=\bar\chi \quad \text{и } \operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\ \chi=2\,.\\ 0, & \text{если}\quad \chi\neq\bar\chi.\end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\chi$ — индекс Шура характера χ относительно поля $\mathbf{R}$.

1.11. Лемма[8]). *Пусть G — несвязная группа четного порядка,* $\{A, B\}$ *— ее нормальное C-разбиение, причем* $c(A)$ *четно (т. е. A содержит все элементы четного порядка группы G). Если* $\chi\in\operatorname{Irr}(G)$ *и* $A\subseteq T_\chi$, *то* (I) $\chi=\bar\chi$ *и* $\operatorname{ind}_{\mathbf{R}}\chi=1$; (II) *Инволюции группы G сопряжены;* (III) *Если* $x\in I(G)$, *то* $C_G(x)$ *— холловская подгруппа,* $|C_G(x)|=f_\chi=c(A)$; (IV) $N_\chi=G$.

Доказательство. Утверждения (I)—(III) вытекают из леммы 3.14 статьи [18] при $\alpha=0$. Для доказательства (IV) заметим что в силу 1.2 $\Theta=\chi\downarrow N_\chi\in\operatorname{Irr}(N_\chi)$. Поскольку A — замкнутое нормальное подмножество множества $N_\chi^\#$, то к группе N_χ ее характеру Θ и подмножеству $A\subseteq N_\chi^\#$ применимы уже доказанные утверждения (II) и (III). В частности, $I(N_\chi)-N_\chi$-класс. С другой стороны, так как $I(G)\subset A\subseteq N_\chi$, то $I(N_\chi)=I(G)$. Таким образом, $I(G)$ является G-классом и, вместе с тем, N_χ-классом, откуда $(G:C_G(x))=(N_\chi:C_{N_\chi}(x))$ для любого $x\in I(G)$. Так как $x\in T_\chi$, то ввиду 1.8 $C_G(x)=C_{N_\chi}(x)$. Поэтому $N_\chi=G$, что доказывает (IV).

1.12. Лемма (Кронекер). *Если модули целого алгебраического числа* α *и всех чисел сопряженных с ним (относительно поля* $\mathbf{Q}$*) равны единице, то* α *— корень из единицы.*

---

[7]) См. также [6].

[8]) В формулировке этой леммы используются терминология и обозначения принятые в [18].

§ 2. Общие свойства VZ-групп

При помощи 1.12 легко показать, что данное во введении определение VZ-характера равносильно следующему:

2.1. *Определение*. Неприводимый нелинейный характер χ неабелевой группы G называется VZ-характером, если $G^{\#}=T_\chi \cup U_\chi$.

Некоторые из нижеследующих утверждений частично или полностью содержатся в статье [18] (см. доказательство теоремы 3 статьи [18])[9]) и поэтому сформулированы, как правило, без доказательств.

2.2. Предложение. *Неприводимый нелинейный характер χ группы G является VZ-характером тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f_\chi^2-1=|T_\chi|. \tag{3}$$

Доказательство. Если χ VZ-характер, то

$$|G|=\sum_{x\in G}|\chi(x)|^2=f_\chi^2+\sum_{x\in T_\chi}|\chi(x)|^2+\sum_{x\in U_\chi}|\chi(x)|^2=f_\chi^2+|U_\chi|=f_\chi^2+|G^{\#}\setminus T_\chi|,$$

откуда вытекает (3). Обратно, из (3) следует, что в (1) имеет место знак равенства. Поэтому $|Q(\chi)|=1$ и в силу 1.3 $G^{\#}=T_\chi\cup U_\chi$, т. е. χ — VZ-характер.

В дальнейшем G — VZ-группа с VZ-характером χ.

2.3. Предложение. $Z(G)=\operatorname{Ker}\chi=\{1\}$.

Доказательство. Вытекает из 2.1.

2.4. Предложение ([18], Лемма 3.4). *$\{T_\chi, U_\chi\}$-нормальное C-разбиение группы G.*

2.5. Следствие. *VZ-группы несвязны.*

2.6. Предложение ([18], лемма 3.7 и следствие 3.11). *Если $H\leqq G$, то* (I) *H является T-подгруппой тогда и только тогда, когда $|H|\mid f_\chi$,* (II) *H является U-подгруппой тогда и только тогда, когда $|H|\mid g_\chi$, где $g_\chi=\dfrac{|G|}{f_\chi}$.*

2.7. Предложение ([18], лемма 3.8)

$$f_\chi=c(T_\chi),\quad g_\chi=c(U_\chi).$$

2.8. Следствие ([18], следствие 3.10)

$$\hat{T}_\chi=\{x\in G\mid x^{f_\chi}=1\},\quad \hat{U}_\chi=\{x\in G\mid x^{g_\chi}=1\}.$$

2.9. Следствие ([18], следствие 3.11)

$$(f_\chi, g_\chi)=1.$$

2.10. Предложение. $g_\chi\mid f_\chi^2-1$.

---

[9]) Как видно из определения VZ-характеров, утверждения 3.3—3.11 статьи [18] относятся к VZ-группе G с VZ-характером χ.

Доказательство. Если $p\in\pi(g_\chi)$, то в силу 2.6 любая $\mathfrak{S}_p$-подгруппа P группы G содержится в U_χ. Следовательно, $\sum_{x\in P}|\chi(x)|^2=f_\chi^2+|P|-1$. Так как левая часть $\equiv 0 \pmod{|P|}$, то $|P|\,|\,f_\chi^2-1$. Таким образом, при любом $p\in\pi(g_\chi)$ f_χ^2-1 делится на p-часть g_χ, откуда и вытекает утверждение.

2.11. Предложение. *Группа G не содержит отличных от $\{1\}$ нормальных T-подгрупп.*

Доказательство. Если $\{1\}\neq N\lhd G$, $N\subseteqq\hat{T}_\chi$, то, ввиду 2.3 и 1.7, $x\in U_\chi$ влечет $C_G(x)\cap N\neq\{1\}$. Так как (в силу 2.4) $C_G(x)\subseteqq\hat{U}_\chi$, то $U_\chi\cap N\neq\emptyset$-противоречие.

Из 2.11 и 1.4 вытекает

2.12. Следствие. *Если $\{1\}\neq N\lhd G$, то характер $\chi\downarrow N$ неразветвлен.*

2.13. Предложение. *Нормальный делитель группы G является U-подгруппой тогда и только тогда, когда он нильпотентен.*

Доказательство. Если $N\lhd G$ и N нильпотентен, то N — U-подгруппа, ввиду 2.6, 2.11 и следствия 1.6 статьи [18]. Обратно, если $N\lhd G$, $N\subseteqq\hat{U}_\chi$, то N нильпотентен ввиду замкнутости U_χ и леммы 2.2 статьи [18].

2.14. Предложение. *Если G — VZ-группа 2-го рода, то N_χ — VZ-группа 1-го рода с VZ-характером $\Theta=\chi\downarrow N_\chi$; при этом, $G\setminus N_\chi\subset U_\chi$* (включение строгое!).

Доказательство. Вытекает из 1.2.

2.15. Предложение. *Если G — VZ-группа 1-го рода и H — собственная подгруппа группы G, то $\Theta=\chi\downarrow H$ приводим.*

Доказательство. Очевидно, $f_\chi^2+|U_\chi\cap H|=\sum_{x\in H}|\Theta(x)|^2=\mu\cdot|H|$ где $\mu=(\Theta,\Theta)_H\in\mathbf{Z}$. Поэтому $|T_\chi\cap H|=|H^\#|-|U_\chi\cap H|=f_\chi^2-1-(\mu-1)|H|$. Если $\Theta\in\operatorname{Irr}(H)$, то $\mu=1$ и $|T_\chi\cap H|=f_\chi^2-1=|T_\chi|$, откуда $T_\chi\subset H$, $G=\langle T_\chi\rangle\subseteqq H$ — противоречие.

2.16. Предложение. *Если G — VZ-группа 1-го рода, $\{1\}\neq N\lhd G$, то*
(I) $\chi=\psi^G$, *где* $\psi\in\operatorname{Irr}(N)$
(II) $G\setminus N\in T_\chi$
(III) $\chi\downarrow N$ *неразветвлен;* $\chi\downarrow N=\psi_1+\ldots+\psi_r$, *где* $\psi_1=\psi$ *и* $\{\psi_i\}$*-класс характеров подгруппы N G — сопряженных с ψ;* $r=(G:N)$.

Доказательство. Случай $N=G$ тривиален. Если $N\neq G$, то в силу 2.15 и 2.12 характер $\chi\downarrow N$ приводим и неразветвлен. Пусть ψ — неприводимая компонента $\chi\downarrow N$, I_ψ-группа инерции ψ, $r=(G:I_\psi)$, $G=\bigcup_{i=1}^{r}I_\psi t_i$ $(t_1=1)$ — разложение G по I_ψ, $\psi_i=\psi^{t_i}$ $(i=1,\ldots,r)$. Тогда

$$\chi\downarrow N=\psi_1+\ldots+\psi_r, \tag{4}$$

откуда $r>1$. Так как $|G|=(G:I_\psi)(I_\psi:N)=r|N|(I_\psi:N), f_\chi=rf_\psi$, то $g_\chi=\dfrac{|N|}{f_\psi}(I_\psi:N)$, откуда

(5) $$|I_\psi / N| \,|\, g_\chi$$

Докажем, что $I_\psi = N$. Допуская противное, докажем сначала, что

(6) $$D = I_\psi \diagdown N \subseteqq U_\chi.$$

Если $D \cap T_\chi \neq \emptyset$, $x \in D \cap T_\chi$, то $x^{|I_\psi/N|} \in N$, откуда, ввиду (5), 2.8 и 2.9, $x \in N$ — противоречие. Следовательно, $D \cap T_\chi = \emptyset$, откуда и вытекает (6). Ввиду $I_{\psi_i} = I_\psi^{t_i}$ $(i=1, \ldots, r)$ из (6) следует

(7) $$D_i = D^{t_i} = I_{\psi_i} \diagdown N \subseteqq U_\chi \diagdown N \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Докажем, что подмножества D_i $(i=1, \ldots, r)$ попарно не пересекаются. Так как $|D_i| = |D|$ $(i=1, \ldots, r)$, то $\sum_{i=1}^{r} |D_i| = r|D| = r|I_\psi| - r|N| = |G| - r|N|$. С другой стороны, в силу (4), $|G| - r|N| = \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 - \sum_{x \in N} |\chi(x)|^2 = \sum_{x \in G \diagdown N} |\chi(x)|^2 =$ числу $|U_\chi \diagdown N|$ унитарных элементов входяших в $G \diagdown N$. Следовательно,

(8) $$\sum_{i=1}^{r} |D_i| = |U_\chi \diagdown N|.$$

Далее, так как χ индуцируется из I_ψ и $\{I_{\psi_i}\}$ — полная система (возможно, с повторениями) подгрупп сопряженных с I_ψ, то $G \diagdown \bigcup_{i=1}^{r} I_{\psi_i} \subseteqq T_\chi$. Поэтому $\bigcup_{i=1}^{r} I_{\psi_i} \supseteqq \hat{U}_\chi$, откуда $\bigcup_{i=1}^{r} D_i = \bigcup_{i=1}^{r} (I_{\psi_i} \diagdown N) = \left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{\psi_i}\right) \diagdown N \supseteqq U_\chi \diagdown N$. Ввиду (7) отсюда вытекает, что $\bigcup_{i=1}^{r} D_i = U_\chi \diagdown N$, откуда следует ввиду (8), что подмножества D_i $(i=1, \ldots, r)$ попарно не пересекаются. Следовательно, подгруппы $\{I_{\psi_i}\}$ попарно различны и образуют класс подгрупп сопряженных с I_ψ. Поэтому $(G : N_G(I_\psi)) = r = (G : I_\psi)$, откуда $N_G(D) = N_G(I_\psi) = I_\psi$. Следовательно,

(9) $$N_G(D_i) = N_G(I_{\psi_i}) = I_{\psi_i} \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Очевидно также, что

(10) $$I_{\psi_i} \cap I_{\psi_j} = N \quad (i \neq j).$$

Рассмотрим транзитивное представление σ группы G подстановками $\sigma(x) = \begin{pmatrix} D_1, & \ldots, & D_r \\ D_1^x & & D_r^x \end{pmatrix}$ $(x \in G)$ множества $\Omega = \{D_1, \ldots, D_r\}$. Группа $\mathfrak{G} = \sigma(G)$ является подстановочной группой Фробениуса[10]). Действительно, если $\sigma(x)$ имеет две неподвижные «точки» D_i и D_j $(i \neq j)$, то в силу (9) и (10) $x \in N_G(D_i) \cap N_G(D_j) = I_{\psi_i} \cap I_{\psi_j} = N$, откуда $\sigma(x) = 1$; вместе с тем, если $x \in D_i$, подстановка $\sigma(x)$ имеет единственную неподвижную точку D_i. Очевидно, $\operatorname{Ker} \sigma = N$. Пусть $\mathfrak{F}$ — ядро

---

[10]) Подстановочной группой Фробениуса мы называем строго транзитивную, но не регулярную, группу подстановок.

группы Фробениуса $\mathfrak{G}$, $F=\sigma^{-1}(\mathfrak{F})$ — полный прообраз $\mathfrak{F}$ в G. Если $\mathfrak{H}$ — стабилизатор точки D_i в группе $\mathfrak{G}$, то $\sigma^{-1}(\mathfrak{H}_i^{\#})=D_i$. Так как $\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{F}=\bigcup\limits_{i=1}^{r}\mathfrak{H}_i^{\#}$, то $G\setminus F=\sigma^{-1}(\mathfrak{G}\setminus\mathfrak{F})=\bigcup\limits_{i=1}^{r}\sigma^{-1}(\mathfrak{H}_i^{\#})=\bigcup\limits_{i=1}^{r}D_i$. Ввиду (7) отсюда вытекает, что $G\setminus F\subseteqq U_\chi$. Следовательно, $T_\chi\subset F$, откуда $N_\chi=\langle T_\chi\rangle\subseteqq F\neq G$, что невозможно, так как G — VZ-группа 1-го рода. Противоречие показывает, что $I_\psi=N$. Отсюда вытекает, что $\chi=\psi^G$ и, следовательно, $G\setminus N\subseteqq T_\chi$. Так как $I_\psi=N$, то $r=(G:N)$.

2.17. Следствие. *Если G — VZ-группа 1-го рода, то G — монолит*[11]*; минимальный нормальный делитель (цоколь) S группы G порождается множеством всех ее унитарных элементов:*

$$S=\langle U_\chi\rangle. \tag{11}$$

Доказательство. В силу 2.16 U_χ содержится в каждом отличном от $\{1\}$ нормальном делителе группы G. Следовательно, G — монолит. В частности, $U_\chi\subset Sc(G)=S$, откуда, ввиду нормальности U_χ, вытекает (11).

2.18. Следствие. *Любая VZ-группа является монолитом.*

Доказательство. Если G — VZ-группа с VZ-характером χ, то в силу 2.14 N_χ — VZ-группа 1-го рода с VZ-характером $\Theta=\chi\downarrow N_\chi$. Поэтому N_χ — монолит; $S=Sc(N_\chi)$, очевидно, минимальный нормальный делитель группы G. В силу 1.9 каждый минимальный нормальный делитель F группы G содержится в N_χ; следовательно, $F\supseteqq S$, откуда $F=S$. Таким образом, G — монолит с цоколем S.

2.19. Следствие. *Если G — VZ-группа 1-го рода, $S=Sc(G)$, то $|G/S|$ делит f_χ.*

Доказательство. В силу 2.16 $G\setminus S\subseteqq T_\chi$. Если $S\neq G$, $x\in G\setminus S$, то, ввиду 2.8, $|x|\,|\,f_\chi$. Поэтому порядки всех элементов группы G/S делят f_χ, откуда $(|G/S|, g_\chi)=1$. Так как $|G/S|$ делит $|G|=f_\chi\cdot g_\chi$, то $|G/S|\,|\,f_\chi$.

2.20. Предложение. *Для любой VZ-группы G имеет место неравенство*

$$f_\chi<g_\chi. \tag{12}$$

Если G — непростая VZ-группа 1-го рода, $S=Sc(G)$, $|G/S|=r$, то[12]

$$g_\chi<\frac{r}{r-1}f_\chi\leqq 2f_\chi, \tag{13}$$

$$|U_\chi|<\frac{f_\chi^2}{r-1}\leqq f_\chi^2. \tag{14}$$

Доказательство. (12) вытекает из неравенства $f_\chi^2<|G|=f_\chi\cdot g_\chi$. Пусть G — непростая VZ-группа 1-го рода. Так как $G\setminus S\subseteqq T_\chi$, $S\supset U_\chi$, то $|T_\chi|\geqq$

[11]) Монолит — группа, обладающая единственным минимальным нормальным делителем.

[12]) Так как G непростой монолит, то $r>1$.

$\geqq |G \setminus S| = |S|(r-1) > |U_\chi|(r-1)$. Из $|T_\chi| = f_\chi^2 - 1 < f_\chi^2$, $|U_\chi| = |G| - |\hat{T}_\chi| = f_\chi(g_\chi - f_\chi)$ следует $f_\chi^2 > f_\chi(g_\chi - f_\chi)(r-1)$, откуда вытекает (13). Из (13) и равенства $|U_\chi| = f_\chi(g_\chi - f_\chi)$ вытекает (14).

2.20. Следствие. *Если естественный VZ-характер χ*[13]) *Z-группы G является VZ-характером 1-го рода, то $F(G) = \{1\}$ влечет простоту группы G.*

Доказательство. Если $n+1$ — степень Z-группы G, то $f_\chi = n$. Пусть N — стабилизатор одной из точек переставляемых группой G. Так как $F(G) = \{1\}$, то N-группа Фробениуса степени n. Если K — ядро N, H — дополнительный множитель N, $|H| = j$, то $|K| = n$, $j | n-1$. Так как $(G:N) = n+1$, то $|G| = n(n+1)j = f_\chi(f_\chi+1)j$. Следовательно, $g_\chi = (f_\chi+1)j > f_\chi j \geqq 2f_\chi$, откуда, ввиду (13), вытекает простота G.

2.21. Предложение. *Пусть G — VZ-группа с VZ-характером χ, обладающая следующими свойствами:*

(I) *G содержит связную подгруппу H порядка f_χ.*

(II) *Множество T_χ несвязно.*

Тогда G — V-группа степени $f_\chi+1$; если, в частности, $N_G(H) = H$, то G — дважды транзитивная группа Фробениуса[14]). *Обратно, всякая Z-группа обладает VZ-характером χ и подгруппой H удовлетворяющим условиям* (I) *и* (II).

Доказательство. С точностью до терминологии предложение 2.21 совпадает с теоремой 3 статьи [18] (см. также доказательство этой теоремы).

2.22. Предложение. *Если G — непростая VZ-группа с VZ-характером χ, то*

(I) *$f = f_\chi$ — максимальная степень неприводимых характеров группы G; χ — единственный неприводимый характер группы G имеющий степень f.*

(II) *χ принимает на $G^\#$ значения* 0, -1 *и, быть может,* $+1$. *Значение «$+1$» выпускается тогда и только тогда, когда G — дважды транзитивная группа Фробениуса.*

Доказательство. Пусть $\{\chi_i\}_{1 \leqq i \leqq k}$ — полная система неприводимых характеров группы G, $\chi_1 = \chi$. Тогда $|U_\chi| = |G| - |\hat{T}_\chi| = |G| - f_\chi^2 = \sum_{i=2}^{k} \{\chi_i(1)\}^2$, откуда в силу (14), $\sum_{i=2}^{k} \{\chi_i(1)\}^2 < f_\chi^2$. Следовательно, $\chi_i(1) < f_\chi$ $(i \geqq 2)$, что доказывает (I). Так как $\bar{\chi}(1) = \chi(1) = f_\chi$, то, ввиду (I), $\bar{\chi} = \chi$. Поэтому χ принимает на U_χ значения ± 1. Поскольку $0 = \sum_{x \in G} \chi(x) = f_\chi + \sum_{x \in U_\chi} \chi(x)$, то значение «$-1$» принимается обязательно. Если значение «$+1$» выпускается, то $|U_\chi| = -\sum_{x \in U_\chi} \chi(x) = f_\chi$. Так как $|U_\chi| = f_\chi(g_\chi - f_\chi)$, то $g_\chi = f_\chi + 1 = |\hat{U}_\chi|$. С другой стороны, из $|U_\chi| = f_\chi$, ввиду 1.5, вытекает, что U_χ — G-класс. Поэтому $x \in U_\chi$ влечет $|C_G(x)| =$

---

[13]) $\chi = \chi_s - 1_G$, где χ_s — естественный подстановочный характер группы G.

[14]) Т. е. G изоморфна дважды транзитивной подстановочной группе Фробениуса.

$=\frac{|G|}{|U_\chi|}=\frac{|G|}{f_\chi}=g_\chi=|\hat{U}_\chi|$. Так как, ввиду 2.4, $C_G(x)\subseteqq\hat{U}_\chi$, то $C_G(x)=\hat{U}_\chi$. Таким образом, $\hat{U}_\chi\lhd G$, откуда вытекает, что G-группа Фробениуса с ядром $\hat{U}_\chi$. Так как $(G:\hat{U}_\chi)=f_\chi=|\hat{U}_\chi|-1$, то G — дважды транзитивная группа Фробениуса. Каждая такая группа обладает VZ-характером, принимающим на $G^\#$ значения 0 и -1.

2.23. Предложение. *Если G — VZ-группа с VZ-характером χ четной степени, то*

(I) *χ принимает на $G^\#$ значения 0, -1 и, возможно, $+1$. Значение «$+1$» выпускается лишь если G — дважды транзитивная группа Фробениуса.*

(II) *Инволюции группы G сопряжены.*

(III) *Централизаторы инволющий группы G являются холловскими подгруппами порядка f_χ.*

(IV) *G — VZ-группа 1-го рода.*

Доказательство. В силу 2.4 и 2.7 характер χ и подмножества $A=T_\chi$, $B=U_\chi$ удовлетворяют условиям леммы 1.11, откуда (с учетом доказательства 2.22 (II)) и вытекают утверждения (I)—(IV).

2.24. Следствие. *Если G — VZ-группа с VZ-характером χ четной степени, то G является Z-группой степени $f_\chi+1$ тогда и только тогда, когда T_χ несвязно.*

Доказательство. С точностью до терминологии 2.24 в основном совпадает с утверждением 3.15 статьи [18].

2.25. Предложение. *При выполнении условий предложения 2.23 централизаторы инволющий группы G либо нильпотентны, либо совпадают со своими нормализаторами.*

Доказательство. Пусть $u\in I(G)$, $H=C_G(u)$, $N=N_G(H)$. Если $N\neq H$, $x\in(N\setminus H)\cap T_\chi$, то $|x|\,\|\,f_\chi$. Так как $|H|=f_\chi$, $H^x=H$, то $H\langle x\rangle<G$, причем $|H\langle x\rangle|\,\|\,f_\chi^2$. Поэтому $(|H\langle x\rangle|, g_\chi)=1$, откуда $|H\cdot\langle x\rangle|\,\|\,f_\chi$. Так как $|H|=f_\chi$, то $H\cdot\langle x\rangle=H$, что невозможно, ввиду $x\notin H$. Следовательно, $N\setminus H\subset U_\chi$. Так как $H\subset\hat{T}_\chi$, то элементы $N\setminus H$ действуют на H регулярно. Поэтому N-группа Фробениуса с ядром H, откуда вытекает нильпотентность H.

§ 3. VZ-группы с тривиальной подгруппой Фиттинга

3.1. Предложение. *Цоколь S VZ-группы с тривиальной подгруппой Фиттинга является нециклической простой группой.*

Доказательство. Вытекает из 2.4 и леммы 2.3 статьи [18].

3.2. Предложение. *Если G — непростая VZ-группа 1-го рода, $F(G)=\{1\}$ и f_χ нечетно, то*

(I) χ *принимает на* $G^{\#}$ *значения* 0, 1, -1.

(II) $|I(G)|=f_\chi$.

(III) *Инволюции группы* G *образуют унитарный* G*-класс.*

(IV) $x\in I(G)$ *влечет* $|C_G(x)|=g_\chi$.

(V) $x\in U_\chi\diagdown I(G)$ *влечет* $\chi(x^2)=+1$. *Таким образом, характер* χ *на унитарных элементах, являющихся квадратами, принимает знаяение* «$+1$».

Доказательство. (I) следует из 2.22. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся формулой (2). Обозначив ее левую часть через σ, получим $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, где $\sigma_1=\sum_{x\in T_\chi}\chi(x^2)=f_\chi+\sum_{x\in T_\chi}\chi(x^2)$, $\sigma_2=\sum_{x\in U_\chi\diagdown I(G)}\chi(x^2)$[15], $\sigma_3=\sum_{x\in I(G)}\chi(x^2)$. Так как T_χ замкнуто и f_χ нечетно, то $x\in T_\chi$ влечет $x^2\in T_\chi$. Поэтому $\sigma_1=f_\chi$. Замечая, что $\sigma_3=f_\chi|I(G)|$, получаем

$$\sigma=f_\chi\{1+|I(G)|\}+\sigma_2. \tag{15}$$

Если $x\in U_\chi\diagdown I(G)$, то ввиду замкнутости U_χ, $x^2\in U_\chi$; поэтому $\chi(x^2)=\pm 1$. Таким образом, $\sigma_2\geqq -|U_\chi\diagdown I(G)|$ и (15) дает: $\sigma\geqq f_\chi\{1+|I(G)|\}-|U_\chi\diagdown I(G)|=$ $=f_\chi\{1+|I(G)|\}+|I(G)|-|U_\chi|$. Так как в силу 2.19 $r=|G/S|$ нечетно, а группа G непростая, то $r\geqq 3$. Из (14) поэтому следует $|U_\chi|<\frac{f_\chi^1}{2}$. Следовательно

$$\sigma>f_\chi\{1+|I(G)\}+|I(G)|-\frac{f_\chi^2}{2}. \tag{16}$$

Пусть C_i $(i=1, \ldots, l)$-классы инволюций группы G. Так как $I(G)\subset U_\chi$, то в силу 1.5 $f_\chi\,\big|\,|C_i|$ $(i=1, \ldots, l)$. Поэтому $|I(G)|=\sum_{i=1}^{l}|C_i|$ делится на f_χ. Полагая $|I(G)|=f_\chi m$ $(m\in\mathbf{Z}, m\geqq 1)$ из (16) получаем: $\sigma>f_\chi(m+1)+\frac{f_\chi^2}{2}(2m-1)>0$. Отсюда, ввиду (2), $\sigma=|G|$, и, следовательно, $f_\chi(m+1)+\frac{f_\chi^2}{2}(2m-1)<|G|$. Так как, ввиду (13), $|G|=f_\chi g_\chi<\frac{3}{2}f_\chi^2$, то $f_\chi(m+1)+\frac{2m-1}{2}f_\chi^2<\frac{3}{2}f_\chi^2$. Поэтому $m=1$, откуда следует, что $I(G)$ — G-класс и $|I(G)|=f_\chi$. Это доказывает (II) и (III), а потому и (IV). Ввиду (II) и равенства $\sigma=|G|$, соотношение (15) принимает вид: $|G|=f_\chi(f_\chi+1)+\sigma_2$. Замечая, что $\sigma_2\leqq|U_\chi\diagdown I(G)|=|U_\chi|-|I(G)|$, получаем с помощью (3): $|G|\leqq f_\chi(f_\chi+1)+|U_\chi|-f_\chi=f_\chi^2+|U_\chi|=|G|$. Следовательно, $\sigma_2=|U_\chi\diagdown I(G)|$, откуда вытекает, что $x\in U_\chi\diagdown I(G)$ влечет $\chi(x^2)=1$. Тем самым, доказано (V).

3.3. Теорема. *Если* G — VZ*-группа* 1*-го рода,* $F(G)=\{1\}$ *и* f_χ *нечетно, то* G — *нециклическая простая группа.*

---

[15]) Так как $F(G)=\{1\}$, $|G|>1_2$ то $|G|$ четно. Поэтому $2|g_\chi$ и, следовательно, ввиду 2.8, $I(G)\subset U_\chi$.

Доказательство. Предполагая, что группа G не является простой, рассмотрим две возможности: $f_\chi \equiv 3 \pmod 4$ и $f_\chi \equiv 1 \pmod 4$.

(I) $$f_\chi = 4n+3 \quad (n \in \mathbf{Z},\ n \geqq 0).$$

Случай 1: $\mathfrak{S}_2$-подгруппы группы G являются элементарными абелевыми группами.

Так как $2|g_\chi$, то в силу 2.6 $\mathfrak{S}_2$-подгруппы группы G являются U-подгруппами и, следовательно, ввиду 2.17, содержатся в S. Так как S — нециклическая простая группа и ее $\mathfrak{S}_2$-подгруппы -элементарные абелевы 2-группы, то на основании [12] возможны лишь следующие случаи: (1) $S \cong PSL(2, q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$; (2) $S \cong PSL(2, 2^n)$; (3) $S \cong J_1$; (4) S — простая группа типа Ри. Каждая из перечисленных групп, а потому и S, имеет единственный класс инволюций, что находится в противоречии с тем, что группа G (в силу 3.2) также обладает единственным классом инволюций. Действительно, так как $I(G) \subset U_\chi \subset S$, то $I(G) = I(S)$. Поэтому, $x \in I(G)$ влечет $(G: C_G(x)) = |I(G)| = |I(S)| = (S: C_S(x))$. Замечая, что $C_G(x) \subseteqq U_\chi \subset S$, получаем $C_G(x) = C_S(x)$. Следовательно, $(G: C_G(x)) = (S: C_G(x))$, откуда $G = S$, что противоречит непростоте группы G.

Случай 2: $\mathfrak{S}_2$-подгруппы группы G не являются элементарными абелевыми группами.

В этом случае существует такой элемент $h \in G$, что $|h| = 4$. Пусть $H = \langle h \rangle = \{1, h, h^2, h^3\}$. Если $k = (1_H, \chi \downarrow H)_H$, то $4k = k|H| = \sum_{x \in H} \chi(x) = f_\chi + \chi(h) + \chi(h^2) + \chi(h^3)$. Так как $h \in U_\chi$, то в силу 3.2 $\chi(h) = \chi(h^{-1}) = \chi(h^3) = \varepsilon = \pm 1$, $\chi(h^2) = +1$. Поэтому $2k = \frac{1}{2}(f_\chi + 1 + 2\varepsilon) = 2(n+1) + \varepsilon$ — противоречие.

(II) $$f_\chi = 4n+1 \quad (n \in \mathbf{Z},\ n \geqq 1).$$

Докажем, что

(16) $$g_\chi = 2(f_\chi - 1).$$

Полагая $g_\chi = 2^\lambda v$ ($\lambda \geqq 1$, v нечетно), допустим сначала, что $v > 1$. Пусть $p \in \pi(v)$, p^α — p-часть v, P — любая $\mathfrak{S}_p$-подгруппа группы G. Так как $|P| \| g_\chi$, то в силу 2.6 $P - U$-подгруппа. Ввиду $p \neq 2$, все элементы $P^\#$ являются квадратами. Поэтому в силу 3.2 $\chi(x) = +1$, если $x \in P^\#$. Полагая $k = (1_P, \chi \downarrow P)_P$, получим: $k|P| = \sum_{x \in P} \chi(x) = f_\chi + |P| - 1$. Следовательно, $p^\alpha | f_\chi - 1$, откуда, ввиду произвольности $p \in \pi(v)$:

(17) $$v | f_\chi - 1.$$

Если $v = 1$, (17) выполняется тривиальным образом. Далее, из 2.10 вытекает, что $2^{\lambda-1} \Big| (f_\chi - 1)\frac{f_\chi + 1}{2}$. Так как $\frac{f_\chi + 1}{2} = 2n+1$, то $2^{\lambda-1} | f_\chi - 1$, откуда, ввиду (17), $2^{\lambda-1} v | f_\chi - 1$, и, следовательно, $g_\chi | 2(f_\chi - 1)$. Полагая $2(f_\chi - 1) = g_\chi \cdot l$ ($l \in \mathbf{Z}$, $l \geqq 1$) при $l > 1$ получим $g_\chi \leqq f_\chi - 1$, что противоречит (12). Таким образом, $l = 1$ и, следовательно, имеет место (16). Равенство (16), однако, невозможно. Действительно, учитывая вытекающее (ввиду $r \geqq 3$) из (13) неравенство $g_\chi <$

$<\frac{3}{2}f_\chi$, получаем из (16): $f_\chi<4$. Так как f_χ нечетно, то $f_\chi=3$, что противоречит сравнения $f_\chi\equiv 1 \pmod 4$.

Таким образом, предположение о непростоте группы G во всех случаях приводит к противоречию. Это доказывает утверждение теоремы. 34. В случае, если f_χ четно, строение VZ-группы G описывается предложением 2.23. При дополнительном условии $F(G)=\{1\}$ утверждение 2.23 (I) переходит, очевидно, в следующее: VZ-характер χ принимает на G^* значения 0, -1, и $+1$. На основании 2.25 подгруппы $C_G(x)$ $(x\in I(G))$ либо нильпотентны, либо самонормализуются. В последнем случае удается получить полное описание VZ-групп с четным f_χ.

3.5. Лемма (Виландт [13]). *Если конечная группа G обладает холловской нильпотентной π-подгруппой H, то любая π-подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп сопряженных с H.*

3.6. Лемма (Судзуки [11]). *Пусть G — простая (CIT)-группа[16]). Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, q)$ $(q=2^\lambda,\ \lambda>1)$, $Sz(q)$ $(q=2^{2\lambda+1})$, $PSL(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна), $PSL(2, 9)\cong A_6$, $PSL(3, 4)$.*

3.7. Лемма ([10]). *Если $G\cong PSL(2, q)$, $q=p^n$ (p — простое число), то $|G|=\delta_p q(q^2-1)$, где $\delta_p=\dfrac{3+(-1)^p}{4}$.*

3.8. Предложение. *Если G VZ-группа, $F(G)=\{1\}$, f_χ четно и централизаторы инволюций группы G не совпадают с их нормализаторами, то G — простая группа.*

Доказательство. Если $x\in I(G)$, то в силу 2.23 $H=C_G(x)$ — холловская π-подгруппа группы G, где $\pi=\pi(f_\chi)$. Так как H нильпотентна, то ввиду 2.6 и 3.5 каждая T-подгруппа группы G содерчится в одной из подгрупп сопряженных с H. В силу 2.8 отсюда вытекает, что $\hat{T}_\chi=\bigcup\limits_{g\in G} H^g$. Следовательно, $f_\chi^2=$ $=|\hat{T}_\chi|<k\cdot|H|$, где $k=(G:N_G(H))=\dfrac{(G:H)}{(N_G(H):H)}\leqq\dfrac{1}{2}(G:H)$. Поэтому $f_\chi^2<\dfrac{1}{2}|G|$. С другой строны, если группа G не является простой, то в силу (13) $\dfrac{1}{2}|G|=$ $=\dfrac{1}{2}f_\chi g_\chi<f_\chi^2$. Противоречие показывает, что G — простая группа.

3.9. Предложение. *Если G — VZ-группа, $F(G)=\{1\}$, f_χ четно и централизаторы инволюций группы G нильпотентны, то $f_\chi=2^\lambda$ $(\lambda\geqq 1)$* [17]).

Доказательство. Если G Z-группа степени $f_\chi+1$, утверждение вытекает из результатов Фейта [5]. Если G не является Z-группой степени $f_\chi+1$,

---

[16]) (CIT)-группой называется конечная группа, централизат оры инволюций которой являются 2-подгруппами.

[17]) Утверждение остается верным также и при $F(G)\neq\{1\}$ (см. § 4 настоящей работы).

группы G, $|Q|=m$. Так как, ввиду 2.23, $|H|=f_\chi$, то в силу 2.6 H — максимальная T-подгруппа группы G. Отсюда в силу 2.4 вытекает, что $y\in Z(H)^\#$ влечет $C_G(y)=H$. В частности, если $u\in Z(P)^\#$, $v\in Z(Q)^\#$, то

то в силу 2.24 T_χ связно. Допустим, что $f_\chi=2^\lambda m$, где $m\in\mathbf{Z}$, m нечетно, $m>1$. Если, как и выше, $H=C_G(x)$ $(x\in I(G))$, то $H=P\times Q$, где P $\mathfrak{S}_2$-подгруппа

(18) $$C_G(u)=C_G(v)=H.$$

Если $w\in H^\#$, то $w\in T_\chi$ и, следовательно, $C_G(w)$ — T-подгруппа. Так как в силу 3.5 и 2.6 каждая T-подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп H^g $(g\in G)$, то $C_G(w)$ нильпотентна. Так как $u, v\in C_G(x)$, то $C_G(w)$-подгруппа четного порядка, не являющаяся 2-группой. Если $C_G(u)=P_1\times Q_1$, где P_1 — $\mathfrak{S}_2$-подгруппа группы $C_G(u)$, Q_1-подгруппа нечетного порядка, то $u\in P_1$, $v\in Q_1$. Поэтому $P_1\subset C_G(v)$, $Q_1\subset C_G(u)$, откуда в силу (18) $C_G(w)=P_1\times Q_1\subseteqq H$. Это показывает, что подмножество $H^\#$ замкнуто[18]). Так как $H^\#\subseteqq T_\chi$ и T_χ связно, отсюда вытекает, что $H^\#=T_\chi$. Это, однако, невозможно, так как $|H^\#|=f_\chi-1$, $|T_\chi|=f_\chi^2-1>f_\chi-1$. Следовательно, $m=1$ и $f_\chi=2^\lambda$.

3.10. Теорема. *Пусть G — VZ-группа, $F(G)=\{1\}$, f_χ четно. Если централизаторы инволюций группы не совпадают с их нормализаторами, то G является ZT-группой*[19]) *(т. е. изоморфна одной из групп $PSL(2, q)$ $(q=2^\lambda, \lambda\geqq 1)$, $Sz(q)$ $(q=2^{2\lambda+1})$, либо изоморфна одной из простых групп $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 7)$, $PSL(3, 4)$.*

Доказательство. Из 3.8 и 3.9 следует, что G — простая (CIT)-группа. Следовательно, в силу 3.6 G является ZT-группой (в этом случае G действительно обладает требуемыми свойствами), либо изоморфна одной из групп $PSL(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна), $PSL(2, 9)$, $PSL(3, 4)$. Таблицы характеров групп $PSL(2, p)$ показывают, что группа $PSL(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна) обладает VZ-характером четной степени лишь при $p=5$ и $p=7$: $PSL(2, 5)\cong A_5$ имеет, наряду с естественным VZ-характером степени 5, VZ-характер степени 4, $PSL(2, 7)$ имеет, наряду с естественным VZ-характером степени 7, VZ-характер степени 8. Случай $G\cong PSL(2, 9)$ невозможен. Действительно, в силу 3.7 $|G|=|PSL(2, 9)|=\dfrac{1}{2}\,9(9^2-1)=2^3\cdot 3^2\cdot 5$, откуда в силу 3.9 $f_\chi=2^3$, $g_\chi=3^2\cdot 5$.

Следовательно, $f_\chi^2\not\equiv 1 \pmod{g_\chi}$, что противоречит 2.10. $PSL(3, 4)$ является группой рассматриваемого типа, ибо имеет VZ-характер степени 64, а централизаторы ее инволюций (совпадающие с $\mathfrak{S}_2$-подгруппами) не совпадают с их нормализаторами. Это завершает доказательство теоремы.

---

[18]) Иначе говоря, H — сильно изолированная подгруппа.

[19] ZT-группа — Z-группа нечетной степени имеющая тривиальную подгруппу Фиттинга.

§4. VZ-группы с нетривиальной подгруппой Фиттинга

В дальнейшем, как и выше, G — конечная группа.

4.1. Теорема. *Следующие утверждения, равносильны*

(I) G — *VZ-группа 1-го рода*, $F(G)\neq\{1\}$.

(II) G — *дважды транзитивная группа Фробениуса.*

Доказательство. Пусть G — VZ-группа 1-го рода, χ — ее VZ-характер, $F(G)\neq\{1\}$, $S=Sc(G)$. Так как G — монолит (2.17), то $S\subseteqq F(G)$; поэтому S — элементарная абелева p-группа $(p\in\pi(G))$. Так как $S\subseteqq\hat{U}_\chi$ (см. 2.13) и $G\setminus S\subseteqq T_\chi$, то $S=\hat{U}_\chi$, $G\setminus S=T_\chi$. Поэтому G-группа Фробениуса с ядром S. Если H — дополнительный множитель, то $G=S\cdot H$, $|H|\,\big|\,|S^\#|$ и $H^\#\subset T_\chi$. Предложение 2.16 в применении к $N=S$ дает: $\Theta=\chi{\downarrow}S=\psi_1+\ldots+\psi_r$, где $\psi_i\in\mathrm{Irr}\,(S)$ $(i=1,\ldots,r)$, $r=(G:S)$. Так как S абелева, то $f_{\psi_i}=1$ $(i=1,\ldots,r)$. Поэтому $f_\chi=r=(G:S)=|H|$. Так как $\sum\limits_{x\in S}|\chi(x)|^2=r|S|=f_\chi|S|$ и $S=\hat{U}_\chi$, то $\sum\limits_{x\in S}|\chi(x)|^2=f_\chi^2+|S|-1$. Поэтому $|S|=f_\chi+1=|H|+1$. Следовательно, G — дважды транзитивная группа Фробениуса. Таким образом, (I)$\Rightarrow$(II). Если G — дважды транзитивная группа Фробениуса степени $f+1$, S — ее ядро, χ — естественный VZ-характер, то

$$\chi(x)=\begin{cases} f, & \text{если } x=1,\\ -1, & \text{если } x\in S^\#\\ 0, & \text{если } x\in G\setminus S.\end{cases}\tag{19}$$

Так как $T_\chi=G\setminus S$, то $\langle T_\chi\rangle=G$, т. е. χ — VZ-характер 1-го рода. Наконец, $F(G)=S\neq\{1\}$. Таким образом, (II)$\Rightarrow$(I).

4.2. *Примечание.* Если G — дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром S и дополнением H, то $|H|=|S^\#|$. Поэтому $S^\#=x^H$ $(x\in S^\#)$, откуда вытекает, что $S^\#$ — G-класс. Следовательно S — минимальный нормальный делитель G (как легко видеть — единственный). Естественный VZ-характер χ группы G — единственный ее точный неприводимый характер, ибо $f_\chi^2+\sum\limits_{\chi'\in\mathrm{Irr}\,(G'),\,\mathrm{Ker}\,\chi'\neq\{1\}}\{\chi'(1)\}^2=f_\chi^2+|G/S|=f_\chi^2+f_\chi=|G|$.

4.3. Лемма[20]**.** *Пусть G — двойная группа Фробениуса, F и F_1 — ее левый и правый фробениусовы множители, S — ядро F, H и K — ядро и дополнение F_1. Если F — дважды транзитивная группа Фробениуса, то* (I) *S — элементарная абелева 2-группа,* $|S|=2^\alpha$ $(\alpha\geqq 2)$; (II) $|H|=2^\alpha-1$; (III) $K=2^\beta m$, $0\leqq\beta\leqq 1$, $m|2^{\alpha-1}-1$.

4.4. Теорема. *Следующие утверждения равносильны:* (I) G — *VZ-группа 2-го рода,* $F(G)\neq\{1\}$; (II) G — *двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем.*

---

[20]) Формулировка этой леммы использует терминологию введенную в [18]. Доказательство легко вытекает из свойств двойных групп Фробениуса изложенных в [18].

Доказательство. Если выполнено (I) и χ — VZ-характер G, то в силу 1.2 N_χ — VZ-группа 1-го рода с VZ-характером $\Theta=\chi{\downarrow}N_\chi$. Из 1.8 следует, что $D=F(G)\cap N_\chi\neq\{1\}$, откуда $F(N_\chi)\neq\{1\}$. В силу 4.1. N_χ — дважды транзитивная группа Фробениуса. Если S и H — её ядро и дополнение, то[21])

$$N_\chi = S\cdot H \tag{20}$$

и в силу леммы 2.13 статьи [18]

$$G = S\cdot N_G(H) \tag{21}$$

Так как $N_\chi\neq G$, то $N_G(H)\neq H$. Так как (см. доказательство 4.1), $|H|=f_\Theta=f_\chi$, то в силу 2.6 H — максимальная T-подгруппа группы G, откуда $N_G(H)\setminus H\subseteqq U_\chi$. Ввиду 2.4, отсюда следует, что $N_G(H)$-группа Фробениуса с ядром H. Ввиду (20) и (21), отсюда вытекает, что G — двойная группа Фробениуса, левым фробениусовым множителем которой является дважды транзитивная группа Фробениуса N_χ, а правым — $N_G(H)$. Таким образом, (I)$\Rightarrow$(II). Пусть, обратно, G — двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем F и правым фробениусовым множителем $F_1=N_G(H)$, где H — дополнительный множитель F; пусть S — ядро F, K — дополнительный множитель F_1. В силу 4.1 группа F обладает VZ-характером 1-го рода Θ. Из 4.3 и доказательства 4.1 следует

$$\begin{cases} T_\Theta = F\setminus S, & U_\Theta = S^{\#} \\ |S| = f_\Theta+1, & |H| = f_\Theta = 2^\alpha-1 \quad (\alpha\geqq 0), \end{cases} \tag{22}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} f_\Theta, & \text{если} \quad x=1 \\ -1, & \text{если} \quad x\in S^{\#} \\ 0, & \text{если} \quad x\in F\setminus S. \end{cases} \tag{23}$$

Из (23) вытекает G — инвариантность Θ. Ввиду цикличности $G/F\cong K$ характер Θ можно продолжить до характера $\chi\in\mathrm{Irr}\,(G)$, который, как будет доказано, является VZ-характером 2-го рода группы G. Определим эпиморфизм φ: $G\to F_1$ [22]), полагая $\varphi(x)=v$, если $x=u\cdot v$ ($u\in S, v\in F_1$). Если $k=|K|$, то ввиду $G/F\cong K$, из $x\in G\setminus F$ следует $x^k\in F$, откуда $\varphi(x^k)\in\varphi(F)=H$. Так как H — ядро F_1 и $\varphi(x)\in C_{F_1}(\varphi(x^k))$, то из $\varphi(x^k)\neq 1$ следовало бы, что $\varphi(x)\in H$, откуда $x\in F$ — противоречие. Следовательно, $\varphi(x^k)=1$, откуда $x^k\in S$. Так как, ввиду 4.3, S — элементарная абелева 2-группа, то $x^{2k}=1$. Таким образом, $x\in G\setminus F$ влечет

$$x^{2k} = 1. \tag{24}$$

Допустим сначала, что k нечетно. Пусть $k=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение k на простые множители, P_i — $\mathfrak{S}_{p_i}$-подгруппа циклической группы K ($i=1,\dots,r$). Очевидно, P_i также $\mathfrak{S}_{p_i}$-подгруппа группы G. Положим $K_i=$ $=P_1\times\dots\times P$, $G_i=F\cdot K_i$ ($i=0,1,\dots,r$), $K_0=\{1\}$, $G_0=F$. Очевидно, $G_i\lhd G$ ($i=0,1,\dots,r$). Индукцией по i докажем, что $G_i\setminus F\subset U_\chi$ ($i=0,1,\dots,r$). Если $i=0$, это очевидно. Допустим, что $G_{i-1}\setminus F\subset U_\chi$ для некоторого $i\geqq 1$. Дока-

---

[21]) $A\cdot B$ означает полупрямое произведение нормального делителя A с группой B.
[22]) Напомним, что $G=S\cdot F_1$.

жем, что χ не обращается в нуль на $G_i \setminus G_{i-1}$. Допустим, что $x \in G_i \setminus G_{i-1}$, $\chi(x)=0$. Полагая $k_i=|K_i|=p_1^{\alpha_1}\dots p_i^{\alpha_i}$ и применяя (24) к G_i и элементу $x \in G_i$, получим $x^{2k_i}=1$. Пусть $x=s\cdot x_1\dots x_i$ — разложение x на примарные компоненты: s, $x_j \in \langle x\rangle$, $s^2=1$, $x_j^{p^{\alpha_j}_j}=1$ $(j=1, \dots, i)$. Тогда, очевидно, $x'=s\cdot x_1\dots \dots x_{i-1} \in G_{i-1}$. Если $x' \in F$, то x,S, откуда ввиду (22), $x' \in \hat{U}_\Theta \subseteq \hat{U}_x$. Если же $x' \notin F$, то $x' \in G_{i-1} \setminus F \subset U_\chi$ по индуктивному предположению. Таким образом, всегда $x' \in \hat{U}_\chi$. Пусть ε — первообразный корень из единицы степени $p_i^{\alpha_i}$, $\lambda=1-\varepsilon$. Так как $x=x'x_i=x_ix'$ и $x_i^{p_i^{\alpha_i}}=1$, то, как легко показать, $\chi(x) \equiv \equiv \chi(x') \pmod{\lambda}$. Так как $\chi(x)=0$, то $\chi(x') \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Поскольку $x' \in \hat{U}_\chi$, то $\chi(x')=f_\chi$, либо $\chi(x')$ — корень из 1. В первом случае $f_\chi \equiv 0 \pmod{\lambda}$ и, следовательно, $f_\Theta=f_\chi \equiv 0 \pmod{p_i}$, откуда, ввиду (22), $|H| \equiv 0 \pmod{p_i}$, что невозможно, так как $(|H|, |K|)=1$. Второй случай невозможен так так λ — необратимый элемент кольца целых алгебраических чисел поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$. Итак, χ не обращается в нуль на $G_i \setminus G_{i-1}$. Следовательно, $\chi_i=\chi\downarrow G_i$ [23]) не имеем нулей в $G_i \setminus G_{i-1}$, откуда следует, ввиду 1.2, что $G_i \setminus G_{i-1} \subseteq U_{\chi_i} \subseteq U_\chi$. Поэтому $G_i \setminus F=(G_{i-1} \setminus F) \cup (G_i \setminus G_{i-1}) \subseteq U_\chi$. Тем самым, включение $G_i \setminus F \subseteq U_\chi$ доказано для всех $i \leqq r$. В частности, $G \setminus F \subseteq U_\chi$. Следовательно, χ — VZ-характер 2-го рода группы G. Допустим теперь, что k четно. Так как $k \,|\, |H^\#|$ и $|H^\#|=2^\alpha-2$, то каноническое разложение k на прстые множители имеет вид: $k=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$, где $p_0=2$, $\alpha_0 \leqq 1$. Обозначив через P_i $\mathfrak{S}_{P_i}$-подгруппу группы K, положим $K_i=P_0 \times P_1 \times \dots \times P_i$, $G_i=F\lambda K_i$ $(i=0, 1, \dots, r)$, где $K_0=P_0$, $G_0=F\lambda P_0$. Докажем, что $G_i \setminus F \subset U_\chi$ $(i=0, 1, \dots, r)$. Допустим сначала, что $i=0$. Применяя (24) к G_0 и элементу $x \in G_0 \setminus F$, получим $x^4=1$. Пусть Γ — неприводимое представление группы G, порождающее характер χ; $\{\varepsilon_j\}$ — спектр матрицы $\Gamma(x)$, $\lambda=1-\sqrt{-1}$. Так как $\varepsilon_\nu \equiv 1 \pmod{\lambda}$, то $\chi(x)=\sum \varepsilon_j \equiv f_\chi \pmod{\lambda}$. Из $\chi(x)=0$ поэтому следовало бы, что $f_\chi \equiv 0 \pmod{2}$ что противоречит равенству $f_\chi=2^\alpha-1$. Таким образом, χ отличен от нуля на $G_0 \setminus F$, откуда вытекает, что $G_0 \setminus F \subseteq U_\chi$. Затем индукцией по i, как и выше, докажем, что $G_i \setminus F \subseteq U_\chi$ $(i=0, 1, \dots, r)$. В частности, $G \setminus F \subseteq U_\chi$ и, следовательно, χ — VZ-характер 2-го рода. Таким образом, все продолжения характера Θ на группу G являются VZ-характерами 2-го рода последней. Так как $S \subset F(G)$, то $F(G) \neq \{1\}$. Это доказывает теорему.

4.5. Теорема. *Двойные группы Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем являются Z-группами.*

Доказательство. Пусть G — двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем F и правым фробениусовым множителем F_1. Если S — ядро F, то $F_1=N_G(H)$, где H — один из дополнительных множителей F. Если χ — VZ-характер группы G, то (см. доказательство 4.4) $N_\chi=F$, $T_\chi=F \setminus S$, $U_\chi=S^\# \cup \Delta_\chi$, где $\Delta_\chi=G \setminus N_\chi=G \setminus F$. В силу леммы 2.9 статьи [18] подгруппа H циклична и поэтому связна; в силу (22) $|H|=f_\Theta=f_\chi$, где $\Theta=\chi\downarrow F$. Пусть $x \in H^\#$. Так как $H^\# \subseteq T_\chi$, то $C_G(x) \subseteq \hat{T}_\chi$, откуда, ввиду 2.6, $|C_G(x)| \,|\, f_\chi$. Так как (ввиду цикличности H) $C_G(x) \supseteq H$, отсюда

[23]) Очевидно, $\chi_i \in \mathrm{Irr}\,(G_i)$.

следует, что $C_G(x)=H$. Таким образом, подмножество $H^{\#}$ связно и замкнуто, т. е. $H^{\#}$ — компонента связности группы G. Так как $|T_{\chi}|=f_{\chi}^2-1>f_{\chi}=|H|$, то $H^{\#}$ — правильная часть T_{χ}. Следовательно, T_{χ} несвязно. Таким образом, группа G удовлетворяет условиям предложения 2.21. Поэтому G — Z-группа степени $f_{\chi}+1=2^{\alpha}$.

4.6. Следствие. *Класс VZ-групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга совпадает с классом Z-групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга.*

Литература

[1] W. Burnside, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1904), 112—116.

[2] R. Brauer—K. A. Fauler, On groups of even order, *Ann. of Math.* **62** (1955), 565—583.

[3] G. Frobenius—I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1906), 186—208.

[4] G. Frobenius, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1907), 428—437.

[5] W. Feit, On a class of double transitive permutation groups, *Illinois J. Math.* **4** (1960), 170—186.

[6] W. Feit, Characters of finite groups, *N. Y.* (1967).

[7] W. Feit, J. Tompson, Solvability of groups of odd order, *Pacif. J. Math.* **13** (1963), 771—1029.

[8] P. X. Gallagher, Group characters and commutators, *Math. Z.* **79** (1962), 122—126.

[9] P. X. Gallagher, Zeros of characters of finite groups, *J. Algebra* **4** (1966), 42—45.

[10] W. R. Scott, Group Theory, *New Jersey*, (1964).

[11] M. Suzuki, Finite groups with nilpotent centralizers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 425—470.

[12] J. H. Walter, The characterisation of finite groups with Abelian Sylow 2-subgroup, *Ann. of Math.* (2), **89** (1969), 405—514.

[13] H. Wielandt, Zum Satz von Sylow, *Math. Z.* **60** (1954), 407—408.

[14] Ч. Кортис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», *Москва*, 1969.

[15] Ж. П. Серр, Линейные представления конечных групп, «МИР», *Москва*, 1970.

[16] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров. *Успехи математических наук* **32** (1977), 223—224.

[17] А. И. Вейцблит, Э. М. Жмудь, «Связность» конечной группы и группы Цассенхауза. *Сообщение АН Грузинской ССР, том* **90** (1978).

[18] Э. М. Жмудь, О понятии «связности» конечной группы. *Publ. Math. (Debrecen).*

(Поступилов 5. II. 1979)