Über Transformationsgruppen in Weyl—Otsukischen Räumen

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

§ 1. Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir die sogenannten *Weyl—Otsukischen-Räume* — die wir kurz *W—O_n-Räume* nennen werden — bezüglich ihrer Transformationsgruppen untersuchen. Ein W—O_n-Raum ist ein Otsukischer Raum (vgl. [3]), in dem die in (j, k) symmetrischen *Übertragungsparameter* $''\Gamma_j{}^i{}_k$ von einem *metrischen Grundtensor* g_{ij} abgeleitet sind, so aber, daß die fundamentale kovariante Ableitung von g_{ij} rekurrent sei, d. h.

$$\nabla_k g_{ij} \equiv P_i^r P_j^s (\partial_k g_{rs} - g_{rt}{''\Gamma_s{}^t{}_k} - g_{ts}{''\Gamma_r{}^t{}_k}) = \gamma_k g_{ij}, \tag{1.1}$$

wo P_i^r, g_{ij} *und der Rekurrenzvektor* γ_k *die Grundtensoren des W—O_n-Raumes bilden.* Es seien ferner die in (j, k) symmetrischen $''\Gamma_j{}^i{}_k$ die für die kovarianten Indizes der Tensoren bestimmten Übertragungsparameter des W—O_n-Raumes (vgl. [2] § 1.—2.). Neben $''\Gamma_j{}^i{}_k$ bestimmen die Relationen (vgl. [3], (3.13)):

$$\partial_k P_j^i + {''\Gamma_t{}^i{}_k} P_j^t - {'\Gamma_j{}^t{}_k} P_t^i = 0 \tag{1.2}$$

die Übertragungsparameter $'\Gamma_j{}^t{}_k$, wenn der inverse Tensor Q_j^i von P_j^i eindeutig definiert werden kann, was nach der Bedingung $\mathrm{Det}\,(P_j^i) \neq 0$, — die wir im folgenden immer annehmen wollen — sicher der Fall ist. Die $''\Gamma_j{}^i{}_k$ können selbstverständlich aus (1.1) berechnet werden (vgl. [2], (2.3)). Die $'\Gamma_j{}^i{}_k$ (im allgemeinen nicht symmetrisch in j, k) werden in der kovarianten Ableitung der Tensoren bei den kovarianten Indizes verwendet (vgl. [3], (3.7) und (3.8)); mit den Formeln (1.1) und (1.2) sind die beiden Fundamentalrelationen der W—O_n-Räume angegeben.

Die Transformationsgruppen eines differentialgeometrischen Raumes können immer mit Hilfe der Lie-Ableitung der Grundgrößen untersucht und charakterisiert werden. Dementsprechend wollen wir in den Paragraphen 2.—5. die Lie-Ableitung der Tensoren und der Übertragungsparameter, ferner die Eigenschaften der Lie-Ableitungen bestimmen. Im Paragraphen 6. bestimmen wir die *Bewegungen* und *Translationen* des Raumes und dann untersuchen wir im § 7. die in den W—O_n-Räumen existierenden beiden Typen der *Affinitäten.* Die Sätze dieses Paragraphen, d. h. die Sätze 4—6, sind charakteristisch für die W—O_n-Räume; in den Riemannschen Räumen reduzieren sich diese Sätze teils auf Identitäten, teils auf wohlbekannte Sätze.

Zuletzt im § 8., betrachten wir die Integrabilitätsbedingungen der verschiedenen Typen der Transformationsgruppen der W—O_n-Räume.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch einige fundamentale Formeln der W—O_n-Räume angeben, die wir im folgenden benützen werden.

Die fundamentale kovariante Ableitung eines gemischten Tensors $T_j{}^i{}_k$ ist nach den vorigen die folgende:

$$\nabla_m T_j{}^i{}_k := P^i_r P^s_j P^t_k T_s{}^r{}_{t|m}, \tag{1.3}$$

wo

$$T_s{}^r{}_{t|m} := \partial_m T_s{}^r{}_t + {}'\Gamma_a{}^r{}_m T_s{}^a{}_t - {}''\Gamma_s{}^b{}_m T_b{}^r{}_t - {}''\Gamma_t{}^b{}_m T_s{}^r{}_b \tag{1.4}$$

bedeutet (für den allgemeinen Fall vgl. [3], (3.7)). (1.4) bedeutet auch eine kovariante Ableitung des W—O_n-Räumes, die für die Lie-Ableitungen mehr praktisch ist, als (1.3). Wir erwähnen noch die Identitäten

$$\text{a)}\ \delta^i_{j|k} = {}'\Gamma_j{}^i{}_k - {}''\Gamma_j{}^i{}_k, \qquad \text{b)}\ S_j{}^i{}_k := {}'\Gamma_{[j}{}^i{}_{k]} \equiv \frac{1}{2}({}'\Gamma_j{}^i{}_k - {}'\Gamma_k{}^i{}_j). \tag{1.5}$$

Statt der Formel (1.1) benützen wir lieber die aus (1.1) auf Grund von (1.3) folgende äquivalente Formel:

$$g_{ij|k} = \gamma_k m_{ij}, \quad m_{ij} := Q^r_i Q^s_j g_{rs}. \tag{1.6}$$

Für die weiteren Bezeichnungen bemerken wir noch, daß $''\nabla_k$ bzw. $'\nabla_k$ die klassische, mit $''\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. mit $'\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildete affine kovariante Ableitung bedeuten wird.

§ 2. Lie-Ableitung in W—O_n-Räumen

Die Lie-Ableitung ist selbstverständlich auch in den W—O_n-Räumen in der gewöhnlichen Weise definiert (vgl. z. B. [4] Kap. II. § 10. bzw. [5], Kap. II.), doch wird die Lie-Ableitung der Tensoren und der Übertragungsparameter unter der Verwendung der Operation (1.4) eine andere Form haben, als in den Riemannschen Räumen, da die Übertragungsparameter $'\Gamma_j{}^i{}_k$ und $''\Gamma_j{}^i{}_k$ voneinander verschieden sind.

Bezüglich der infinitesimalen Transformation

$$\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\,dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2.1}$$

ist die Lie-Ableitung eines gemischten Tensors $T_j{}^i{}_k$ die folgende:

$$\pounds_v T_j{}^i{}_k = v^m \partial_m T_j{}^i{}_k - T_j{}^m{}_k \partial_m v^i + T_m{}^i{}_k \partial_j v^m + T_j{}^i{}_b \partial_k v^b, \tag{2.2}$$

woraus auf Grund der Operation (1.4), im Hinblick auf (1.5), die Formel

$$\pounds_v T_j{}^i{}_k = T_j{}^i{}_{k|m} v^m - T_j{}^t{}_k v^i{}_{|t} + T_t{}^i{}_k v^t{}_{|j} + T_j{}^i{}_t v^t{}_{|k} - (2T_j{}^t{}_k S_t{}^i{}_m + T_t{}^i{}_k \delta^t_{m|j} + T_j{}^i{}_t \delta^t_{m|k}) v^m \tag{2.3}$$

folgt, wobei auch die Symmetrie von $''\Gamma_j{}^i{}_k$ beachtet wurde. Mit Hilfe der Operation $''\nabla_k$ könnte selbstverständlich (2.3) in die Form

$$\pounds_v T_j{}^i{}_k = ({}''\nabla_m T_j{}^i{}_k) v^m - T_j{}^t{}_k {}''\nabla_t v^i + T_t{}^i{}_k {}''\nabla_j v^t + T_j{}^i{}_t {}''\nabla_k v^t \tag{2.3a}$$

umgeschrieben werden.

Die Definition von $\pounds_v {}''\Gamma_j{}^i{}_k$ gibt die Formel (vgl. [5], Kap. I.):

$$\pounds_v {}''\Gamma_j{}^i{}_k = \partial^2_{jk} v^i + v^t \partial_t {}''\Gamma_j{}^i{}_k - {}''\Gamma_j{}^t{}_k \partial_t v^i + {}''\Gamma_t{}^i{}_k \partial_j v^t + {}''\Gamma_j{}^i{}_t \partial_k v^t \tag{2.4}$$

was wir nach (1.4) in die Form

$$\pounds_v{}''\Gamma_j{}^i{}_k = v^i{}_{|jk} + \{''R_j{}^i{}_{kt} - {}''\nabla_k\delta^i_{t|j} + \delta^i_{s|j}\delta^s_{t|k}\}v^t - \delta^i_{t|k}v^t{}_{|j} - \delta^i_{t|j}v^t{}_{|k} \tag{2.5}$$

umschreiben können. Bezüglich der symmetrischen kovarianten Ableitung $''\nabla_k$ ist

$$\pounds_v{}''\Gamma_j{}^i{}_k = {}''\nabla_k{}''\nabla_j v^i + {}''R_j{}^i{}_{kt}v^t, \tag{2.6}$$

wo $''R_j{}^i{}_{kt}$ den mit $''\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildeten Krümmungstensor bedeutet (vgl. [3], (7.11)).

Vollständigkeits halber geben wir noch die Lie-Ableitung von $'\Gamma_j{}^i{}_k$. Nach den Formeln (1.5) a) und b) wird:

$$\pounds_v{}'\Gamma_j{}^i{}_k = v^i{}_{|jk} + \{'R_j{}^i{}_{kt} + 2'\nabla_k S_j{}^i{}_t\}v^t + 2S_j{}^i{}_t v^t{}_{|k} - \delta^t_{j|k}v^i{}_{|t}, \tag{2.7}$$

wo $'R_j{}^i{}_{kt}$ den aus $'\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildeten Krümmungstensor bedeutet.

§ 3. Vertauschungsformeln

Eine der wichtigsten Vertauschungsformeln in den $W—O_n$-Räumen ist die Vertauschungsformel der kovarianten Ableitung mit der Lie-Ableitung. Es ist

$$\pounds_v(T_j{}^i{}_{k|r}) - (\pounds_v T_j{}^i{}_k)_{|r} = T_j{}^t{}_k\pounds_v{}'\Gamma_t{}^i{}_r - T_t{}^i{}_k\pounds_v{}''\Gamma_j{}^t{}_r - T_j{}^i{}_t\pounds_v{}''\Gamma_k{}^t{}_r. \tag{3.1}$$

Diese Formel kann aus (1.4), (2.2), (2.4) und aus der (2.4) entsprechenden Formel von $\pounds_v{}'\Gamma_j{}^i{}_k$ abgeleitet werden.

Aus (3.1) folgt unmittelbar der den gewöhnlichen affinen Transformationen entsprechende Satz (vgl. [5], I. Satz (4.2)):

Satz 1. *Die Transformation* (2.1) *ist dann und nur dann eine affine Transformation erster bzw. zweiter Art in dem $W—O_n$-Raum, wenn die kovariante Ableitung* (1.4) *mit der Lie-Ableitung vertauschbar ist.* (Vgl. die Definition in § 7.).

§ 4. Zusammenhang der Lie-Ableitungen der Grundgrößen

In diesem Paragraphen wollen wir den Zusammenhang der Lie-Ableitungen gewisser Grundgrößen eines $W—O_n$-Raumes bestimmen. Vor allem folgt aus $P^i_t Q^t_j = \delta^i_j$ wegen der Leibnizschen Regel, die für die Lie-Ableitung gültig ist, die Relation

$$Q^i_t\pounds_v P^t_j + P^t_j\pounds_v Q^i_t = 0. \tag{4.1}$$

Aus dieser Formel folgt, daß aus $\pounds_v P^i_j = 0$ auch $\pounds_v Q^i_j = 0$ folgt und umgekehrt, falls $\mathrm{Det}\,(P^i_j) \neq 0$ besteht, was immer bedingt wird.

Um den Zusammenhang der Lie-Ableitungen der Übertragungsparameter zu bestimmen, soll zuerst (1.2) in die Form

$$'\Gamma_j{}^i{}_k = {}''\Gamma_j{}^i{}_k + Q^i_s{}''\nabla_k P^s_j \tag{4.2}$$

nmgeschrieben werden. Die Übereinstimmung von (4.2) und (1.2) kann man z. B. nach einer Kontraktion von (4.2) mit P^t_i unmittelbar verifizieren. Aus (1.2) folgt auch die mit (4.2) analoge Formel

$$"\Gamma_{j\ k}^{\ i} = '\Gamma_{j\ k}^{\ i} - Q^t_j{}'\nabla_k P^i_t \tag{4.2a}$$

wie das nach einer Kontraktion mit P^j_s wieder unmittelbar bestätigt werden kann. Beide Formeln werden wir im Paragraphen 7. benötigen.

Aus (4.2) bzw. (4.2a) folgt nun

$$\pounds_v{}'\Gamma_{j\ k}^{\ i} = \pounds_v{}''\Gamma_{j\ k}^{\ i} + (\pounds_v Q^i_s)''\nabla_k P^s_j + Q^i_s \pounds_v(''\nabla_k P^s_j) \tag{4.3}$$

bzw.

$$\pounds_v{}''\Gamma_{j\ k}^{\ i} = \pounds_v{}'\Gamma_{j\ k}^{\ i} - (\pounds_v Q^t_j)'\nabla_k P^i_t - Q^t_j \pounds_v('\nabla_k P^i_t), \tag{4.3a}$$

und somit ist die gewünschte Relation zwischen den Lie-Ableitungen der affinen Übertragungsparameter in zwei Formen bestimmt.

Letztens wollen wir den Zusammenhang zwischen $\pounds_v{}''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ und $\pounds_v g_{ij}$ bestimmen. Die Vertauschungsformeln (3.1) lauten für g_{ij}:

$$g_{it}\pounds_v{}''\Gamma_{j\ k}^{\ t} + g_{tj}\pounds_v{}''\Gamma_{i\ k}^{\ t} = G_{ijk} \tag{4.4}$$

mit

$$G_{ijk} := (\pounds_v g_{ij})_{|k} - \pounds_v(g_{ij|k}), \tag{4.4a}$$

wo jetzt in (4.4a) die kovariante Ableitung selbstverständlich mit $''\nabla_k$ identisch ist. Schreiben wir nun (4.4) noch zweimal auf, wobei auf die Indizes i, j, k eine zyklische Permutation durchgeführt wird, so entsteht nach Addition der ersten beiden Gleichungen und Subtraktion der dritten Gleichung wegen der Symmetrie von g_{jk} und $''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$ in (j, k) die Relation [1]):

$$g_{jt}\pounds_v{}''\Gamma_{i\ k}^{\ t} = \frac{1}{2}(G_{ijk} + G_{jki} - G_{kij}).$$

Beachten wir jetzt (4.4a) und die in den W—O_n-Räumen charakteristische Relation (1.6), so wird nach Heraufziehen des Index: "j"

$$\pounds_v{}''\Gamma_{i\ k}^{\ j} = 2^{-1} g^{js}\{(\pounds_v g_{is})_{|k} + (\pounds_v g_{sk})_{|i} - (\pounds_v g_{ki})_{|s} - \pounds_v(\gamma_k m_{is}) - \\ - \pounds_v(\gamma_i m_{sk}) + \pounds_v(\gamma_s m_{ki})\}, \tag{4.5}$$

und das bestimmt den gesuchten Zusammenhang von $\pounds_v g_{ij}$ und $\pounds_v{}''\Gamma_{j\ k}^{\ i}$.

§ 5. Lie-Ableitungen des metrischen Grundtensors und die Killingschen Gleichungen

Die Lie-Ableitung des metrischen Grundtensors wollen wir mit Hilfe der Formel (2.3a) bestimmen. Nach dieser Formel ist

$$\pounds_v g_{ij} = (''\nabla_k g_{ij})v^k + g_{tj}{}''\nabla_i v^t + g_{it}{}''\nabla_j v^t. \tag{5.1}$$

---

[1]) Die rechte Seite wird selbstverständlich nun in i, k symmetrisch, wie das in der nächsten Formel sichtbar wird.

Da für rein kovariante Tensoren die kovarianten Ableitung $''\nabla_k$ eben mit der durch (1.4) festgelegten kovarianten Ableitung identisch ist, wird aus (5.1) im Hinblick auf (1.6):

$$(5.2) \qquad \pounds_v g_{ij} = \gamma_k v^k m_{ij} - 2\gamma_{(i} m_{j)t} v^t + 2v_{(i|j)},$$

wo bei der Herleitung dieser Formel die Identität

$$g_{tj}{''\nabla_i} v^t \equiv {''\nabla_i} v_j - ({''\nabla_i} g_{tj}) v^t \equiv v_{j|i} - g_{tj|i} v^t$$

benützt wurde.

Die *Bewegungen* eines differentialgeometrischen Raumes sind immer durch

$$(5.3) \qquad \pounds_v g_{ij} = 0$$

gekennzeichnet. In einem $W—O_n$-Raum werden somit nach (5.2) die die Bewegungen charakterisierenden Gleichungen, die sogenannten *Killingschen Gleichungen* des Raumes:

$$(5.4) \qquad v_{(i|j)} - \gamma_{(i} m_{j)t} v^t + \frac{1}{2} \gamma_t v^t m_{ij} = 0.$$

Führt man die Bezeichnung

$$(5.5) \qquad v_{ij} := v_{i|j} - \gamma_{(i} m_{j)t} v^t + \frac{1}{2} \gamma_t v^t m_{ij}$$

ein, so kann offensichtlich (5.4) in der Form:

$$(5.6) \qquad v_{ij} + v_{ji} = 0$$

angegeben werden. Auch (5.6) sind die *Killingschen Gleichungen eines $W—O_n$-Raumes.* Statt (5.5) kann für v_{ij} auch die Formel

$$(5.7) \qquad v_{ij} := v_{i|j} - M_{ijt} v^t, \quad M_{ijt} := \gamma_{(i} m_{j)t} - \frac{1}{2} \gamma_t m_{ij}$$

verwendet werden, wo der Tensor M_{ijt} in (i, j) offenbar symmetrisch ist.

§ 6. Bewegungen und Translationen

Die infinitesimale Transformation (2.1) soll eine Bewegung sein, d. h. es sollen für den Vektor $v^i(x)$ die Killingschen Gleichungen (5.4) bestehen. Die durch die Differentialgleichungen

$$(6.1) \qquad \frac{dx^i}{dt} = v^i(x)$$

bestimmten Kurven sind die *Trajektorien* von (2.1). Bekanntlich sind die Bewegungen *Translationen,* falls die Trajektorien *geodätische Kurven* sind (vgl. [5] Kap. IV. § 2.). Die Gleichungen der geodätischen Kurven in einem Otsukischen Raum sind (vgl. [3], (4.10) und (4.11)):

$$(6.2) \qquad \frac{\bar{D}}{dt} \frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d^2 x^i}{dt^2} + {'\Gamma_j{}^i{}_k}(x) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \psi(t) \frac{dx^i}{dt},$$

wo $\psi(t)$ einen Skalar bedeutet. Nach (6.1) und (6.2) bestimmt also $v^i(x)$ eine Translation, falls (5.4) und

$$v^i{}_{|k} v^k = \psi v^i, \quad (\psi = Skalar) \tag{6.3}$$

bestehen.

Wir ziehen jetzt in (6.3) den Index "i" herunter. Es ist nach (1.5) a) und (1.6)

$$g_{ij} v^i{}_{|k} \equiv g_{ij}({}''\nabla_k v^i + \delta^i_{s|k} v^s) \equiv v_{j|k} - \gamma_k m_{sj} v^s + g_{ij} \delta^i_{s|k} v^s \tag{6.4}$$

eine Identität. Somit erhält man aus (6.3) nach einer Überschiebung mit g_{ij} im Hinblick auf (6.4):

$$v_{j|k} v^k - \gamma_t v^t m_{sj} v^s + g_{tj} \delta^t_{s|k} v^k v^s = \psi v_j, \tag{6.5}$$

womit der folgende Satz bewiesen werden kann:

Satz 2. *Dann und nur dann bestimmt die infinitesimale Transformation* (2.1) *eine Translation, falls* $v_j \equiv g_{sj} v^s$ *den Gleichungen* (5.4) *und* (6.5) *genügt.*

Beweis. Auf Grund von (5.4) bestimmt $v^i(x)$ eine Bewegung. Wir müssen also noch zeigen, daß aus (6.5) die Relation (6.3) folgt, da die Umkehrung im vorigen schon bewiesen wurde. Überschieben wir nun die Identität (6.4) mit v^k, substituieren wir die erhaltene Formel in (6.5), so wird:

$$g_{tj} v^t{}_{|k} v^k = \psi v_j,$$

woraus nach einer Kontraktion mit g^{ji} die Formel (6.3) folgt, w. z. b. w.

Auch in den W—O_n-Räumen gilt, daß *infinitesimale Bewegungen keine übereinstimmende Trajektorien haben können* (vgl. [5], Kap. IV. Satz (1.2)). Nach (5.4) gilt nämlich, daß falls $v^i(x)$ und $\bar{v} = \varrho v^i$ beide den Gleichungen (5.4) genügen, so wird im Hinblick auf (5.2):

$$\varrho_{|i} v_j + \varrho_{|j} v_i + \varrho \pounds_v g_{ij} = 0, \quad \varrho_{|i} := \partial_i \varrho,$$

woraus $\varrho = Konst.$ gefolgert werden kann (vgl. [1], S. 210).

In den Riemannschen Räumen ist $v_i(dx^i/ds)$ eine Konstante, falls v_i eine Bewegung und $x^i = x^i(s)$ eine geodätische Kurve bestimmt. Das gilt schon in den W—O_n-Räumen nicht. Wir bestimmen jetzt $\dfrac{d}{ds}\left(v_i \dfrac{dx^i}{ds}\right)$.

Es sei $x^i = x^i(s)$ eine geodätische Kurve mit dem affinen Parameter "s" (s. [3], (4.7)), d. h. es ist

$$\frac{{}'\overline{D}}{ds}\frac{dx^i}{ds} \equiv \frac{d^2 x^i}{ds^2} + {}'\Gamma_j{}^i{}_k(x) \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.6}$$

Bemerkung. Jetzt und im folgenden bedeutet ${}'\overline{D}/ds$ bzw. ${}''\overline{D}/ds$ das mit ${}'\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildete invariante Differential einer Übertragung.

Ist nun $v^i(x)$ der Vektor einer Bewegung, für den also (5.4) besteht, so wird nach (1.5) a):

$$\frac{d}{ds}\left(v_i \frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{{}''\overline{D}}{ds}\left(v_i \frac{dx^i}{ds}\right) = v_{(i|k)} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + v_i \left(\frac{{}'\overline{D}}{ds}\frac{dx^i}{ds} - \delta^i_{(j|k)} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right).$$

Aus den Gleichungen (5.4) folgt nun im Hinblick auf die Gleichung (6.6) der geodätischen Kurven:

$$(6.7)\qquad \frac{d}{ds}\left(v_i\frac{dx^i}{ds}\right)=\gamma_k\frac{dx^k}{ds}m_{ij}\frac{dx^i}{ds}v^j-\left(\frac{1}{2}\gamma_k v^k m_{ij}+v_k\delta^k_{(i|j)}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}.$$

Diese Formel zeigt, daß $v_i\dfrac{dx^i}{ds}$ offenbar auch in einem Weylschen Raum, der unter den W—O_n-Räumen durch $P^i_j=\delta^i_j$ charakterisiert ist, nicht verschwindet, zwar jetzt $'\Gamma_j{}^i{}_k={}''\Gamma_j{}^i{}_k$, $m_{ij}=g_{ij}$ bestehen, wie das aus (1.2) und (1.6) unmittelbar folgt.

Satz 3. (6.7) *ergibt die Veränderung der Invariante* $v_i\dfrac{dx^i}{ds}$, *falls* v_i *den Vektor einer Bewegung und* $\dfrac{dx^i}{ds}$ *den Vektor einer geodätischen Kurve bestimmt.*

§ 7. Bewegungen und Affinitäten

Neben den durch (5.3) charakterisierten Bewegungen existieren in den W—O_n-Räumen zwei verschiedene Affinitäteten, die auch in den nicht-metrischen affinen Otsukischen Räumen (vgl. [3]) vorhanden sind. Die Definition dieser Affinitäten ist die folgende:

Definition. Eine Affinität erster bzw. zweiter Art ist eine infinitesimale Transformation (2.1), für deren Vektor $v^i(x)$: $\pounds_v{}'\Gamma_j{}^i{}_k=0$, bzw. $\pounds_v{}''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ besteht.
Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Gelten die Relationen*

$$(7.1)\qquad \pounds_v\gamma_k=0,$$

$$(7.2)\qquad \pounds_v Q^i_j=0,$$

so folgt, daß die Bewegungen auch Affinitäten von erster bzw. zweiter Art sind.

Beweis. Aus (1.6) b) folgt auf Grund der Leibnizschen Regel:

$$\pounds_v m_{ij}=Q^r_iQ^s_j\pounds_v g_{rs}+2Q^r_i(\pounds_v Q^s_j)g_{rs}.$$

Nach (5.3) und (7.2) ist somit

$$(7.3)\qquad \pounds_v m_{ij}=0.$$

Auf Grund der Formel (4.5) folgt im Hinblick auf (7.1) und (7.3), daß $\pounds_v{}''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ ist.
Wir müssen noch $\pounds_v{}'\Gamma_j{}^i{}_k=0$ beweisen. Auf Grund von (4.3) ist unter den Bedingungen des Satzes 4:

$$(7.4)\qquad \pounds_v{}'\Gamma_j{}^i{}_k=Q^i_s\pounds_v{}''\nabla_k P^s_j.$$

Auf Grund von (7.2) folgt aus (4.1), nach einer Kontraktion mit P^k_i:

$$(7.5)\qquad \pounds_v P^k_j=0.$$

Die zu (3.1) analoge Vertauschungsformel für $''\nabla_k P^s_j$ lautet:

$$\pounds_v''\nabla_k P^s_j - ''\nabla_k \pounds_v P^s_j = P^r_j \pounds_v''\Gamma_r{}^s{}_k - P^s_t \pounds_v''\Gamma_j{}^t{}_k. \tag{7.6}$$

Das gibt wegen $\pounds_v''\Gamma_r{}^s{}_k=0$ und wegen (7.5), daß

$$\pounds_v''\nabla_k P^s_j = ''\nabla_k \pounds_v P^s_j = 0, \tag{7.7}$$

womit (7.4) in die noch beweisende Relation: $\pounds_v'\Gamma_j{}^i{}_k=0$ übergeht. Bezüglich der Affinitäten beweisen wir den folgenden

Satz 5. *Ist die infinitesimale Transformation* (2.1) *eine Affinität zweiter Art, für die noch* (7.5) *besteht, so ist sie auch eine Affinität erster Art, d. h. aus* $\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ *folgt* $\pounds_v'\Gamma_j{}^i{}_k=0$ *und auch umgekehrt, aus* $\pounds_v'\Gamma_j{}^i{}_k=0$ *folgt* $\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k=0$, *falls noch* (7.5) *gültig ist.*

Beweis. Auf Grund von (4.1) folgt wegen $\mathrm{Det}(P^i_j)\neq 0$, daß mit (7.5) auch (7.2) besteht. Da $\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ angenommen wurde, folgt aus der allgemeinen Formel (4.3) im Hinblick auf (7.2) die Relation (7.4). Die Formel (7.6) geht jetzt wegen der Annahme in (7.7) über, und somit bekommt man aus (7.4) die beweisende Relation

$$\pounds_v'\Gamma_j{}^i{}_k = 0. \tag{7.8}$$

womit die erste Hälfte des Satzes bewiesen ist.

Um die Umkehrung des Satzes zu beweisen, beachten wir zuerst die Relation (4.3a). Wenn nun (7.5) und (7.8) angenommen werden, so bekommt man aus (4.3a) die in diesem Fall der Formel (7.4) entsprechende Formel:

$$\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k = -Q^t_j \pounds_v('\nabla_k P^i_t). \tag{7.9}$$

Nach den Vertauschungsformeln der Lie-Ableitungen und kovarianten Ableitungen hat man:

$$\pounds_v'\nabla_k P^i_t = '\nabla_k(\pounds_v P^i_t) + P^s_t(\pounds_v'\Gamma_s{}^i{}_k) - P^i_r(\pounds_v'\Gamma_t{}^r{}_k). \tag{7.10}$$

Sind nun (7.5) und (7.8) gültig, so folgt auf Grund der Formeln (7.9) und (7.10), daß $\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k=0$, womit der Satz 5. vollständig bewiesen ist.

Bemerkung. Der Satz 5. besteht im allgemeinsten Otsukischen Raum, da die Existenz einer Metrik nicht postuliert und im Beweis nicht benützt wurde.

Wir kehren nun zum Satz 4. zurück. In diesem Satz waren mit Hilfe der Grundtensoren hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß die Bewegungen Affinitäten seien. Wir wollen jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, um aus $\pounds_v g_{ij}=0$ die Relation $\pounds_v''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ folge. Es gilt:

Satz 6. *Die Bedingung*

$$\pounds_v(\gamma_k m_{is}) = 0, \quad m_{is} := Q^a_i Q^b_s g_{ab} \tag{7.11}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Bewegungen auch Affinitäten zweiter Art seien.

Beweis. Auf Grund der allgemeinen Formel (4.5) sieht man, daß die Bedingung (7.11) für die Gültigkeit des Satzes hinreichend ist.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, beachten wir, daß aus $\pounds_v g_{ij}=0$ und $\pounds_v {}''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ wegen (4.5)

$$\pounds_v(\gamma_k m_{is})+\pounds_v(\gamma_i m_{sk})-\pounds_v(\gamma_s m_{ki})=0$$

folgt. Die linke Seite ist ein Tensor, dessen in (i, s) symmetrischer Teil unmittelbar die Relation (7.11) ergibt, w. z. b. w.

§ 8. Integrabilitätsbedingungen

Die Differentialgleichungen der Bewegungen sind bekanntlich die Killingschen Gleichungen, d. h. die Gleichungen (5.4). Diese sind mit den Gleichungen (5.3) identisch, und aus (5.3) folgt in den Riemannschen Räumen nach (4.5) wegen $\gamma_k=0$, daß auch $\pounds_v {}''\Gamma_j{}^i{}_k=0$ besteht. Diese Relationen sind aber in unseren W—O_n-Räumen ohne weitere Bedingungen nicht Folgerungen der Killingschen Gleichungen, wie wir das im vorigen bewiesen haben. Eben deshalb wollen wir jetzt anders verfahren, als es in den Riemannschen Räumen gewöhnlich ist.

Vor allem bemerken wir, daß die Killingschen Gleichungen (5.4) nach den Formeln (5.7) eben mit (5.6) übereinstimmen. Statt der Gleichungen (5.6) nehmen wir aber

$$v_{ij}=A_{ijt}v^t, \tag{8.1}$$

wo A_{ijt} einen beliebigen, aber in (i, j) schiefsymmetrischen Tensor bedeuten soll. A_{ijt} soll aber selbstverständlich von den Grundtensoren des Raumes gebildet sein.

Offenbar sind wegen der Schiefsymmetrie von A_{ijt} die Gleichungen (8.1) mit den Gleichungen (5.6) äquivalent. Nach (5.7) schreiben wir (8.1) in der Form:

$$v_{i|j}=(M_{ij}{}^t+A_{ij}{}^t)v_t, \tag{8.2}$$

wo jetzt die kovariante Ableitung mit $''\nabla_j$ identisch ist. In anderer Form lauten somit diese Gleichungen:

$$\partial_j v_i=(M_{ij}{}^t+A_{ij}{}^t+{}''\Gamma_i{}^t{}_j)v_t. \tag{8.3}$$

Die ersten Integrabilitätsbedingungen von (8.3) sind wegen $\partial^2_{[jk]}v_i=0$

$$\begin{aligned}\{''\nabla_k(M_{ij}{}^s+A_{ij}{}^s)-{}''\nabla_j(M_{ik}{}^s+A_{ik}{}^s)+(M_{ij}{}^t+A_{ij}{}^t)(M_{tk}{}^s+A_{tk}{}^s)-\\-(M_{ik}{}^t+A_{ik}{}^t)(M_{tj}{}^s+A_{tj}{}^s)+{}''R_i{}^s{}_{jk}\}v_s=0,\end{aligned} \tag{8.4}$$

wo $''R_i{}^s{}_{jk}$ den mit $''\Gamma_i{}^s{}_j$ gebildeten Krümmungstensor bedeutet.

Ist (8.4) eine Identität, d. h. ist

$$\frac{1}{2}\,{}''R_i{}^s{}_{jk}={}''\nabla_{[j}(M_{k]i}{}^s-A_{k]i}{}^s)+(M_{i[k}{}^t+A_{i[k}{}^t)(M_{j]t}{}^s-A_{j]t}{}^s) \tag{8.5}$$

für irgendeinem $A_{ij}{}^t$, so hat (8.3) für v_i: n linear unabhängige Lösungen und es gilt der folgende

Satz 7. *Hat $''R_i{}^s{}_{jk}$ die Form* (8.5), *so existiert im W—O_n-Raum eine Bewegungsgruppe von n Parametern* (vgl. [1], § 1.).

Die kovariante Ableitung $''\nabla_j$ in (8.4) und auch in (8.5) kann leicht auf Grund von (1.5) a) mit Hilfe der kovariante Ableitung (1.4) ausgedrückt werden. Es wird:

$$\frac{1}{2}\,''R_i{}^s{}_{jk} = M_{i[k}{}^s{}_{|j]} + A_{i[k}{}^s{}_{|j]} + (M_{t[j}{}^s + A_{t[j}{}^s - \delta^s_{t|[j})(M_{k]i}{}^t - A_{k]i}{}^t). \tag{8.6}$$

Bemerkung. Es könnte z. B. $A_{iks} = \gamma_{[i} m_{k]s}$ gesetzt werden, dann wären alle Größen in den Formeln (8.1)—(8.6) im Hinblik auf (5.7) von γ_i, g_{jk}, Q^i_j abhängig.

Die Affinitäten erster bzw. zweiter Art geben bezüglich der gewöhnlichen Affinitäten der affinen Räume keine Neuigkeit, wenn statt der durch (1.4) angegebenen kovarianten Ableitung die kovariante Ableitung $'\nabla_k$ bzw. $''\nabla_k$ verwendet und dementsprechend $'R_i{}^s{}_{jk}$ bzw. $''R_i{}^s{}_{jk}$ gesetzt wird. Z. B. für die Affinitäten zweiter Art wird nach (2.6)

$$''\nabla_k\,''\nabla_j v^i + ''R_j{}^i{}_{kt} v^t = 0 \tag{8.7}$$

und man müßte die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichung bilden. $''\Gamma_j{}^i{}_k$ ist symmetrisch vorausgesetzt.

Literatur

[1] L. P. EISENHART, Continuous groups of transformations. *Princeton Univ. Press* (1933), IX+301 S.
[2] A. MOÓR, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **40** (1978), 129—142.
[3] T. OTSUKI, On general connections I. *Math. J. Okayama Univ.* **9** (1960), 99—164.
[4] J. A. SCHOUTEN, Ricci calculus. Springer Verlag. *Berlin, Göttingen, Heidelberg.* (1954), XX+516 S.
[5] K. YANO, The theory of Lie derivatives and its applications. *North-Holland Publ. Co. Amsterdam* (1955), X+299 S.

(Eingegangen am 10. Juni 1979.)