Об одном свойстве полей групповых характеров

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G — конечная группа, χ — ее неприводимый комплексный характер, $\mathbf{Q}_A(\chi)$ — расширение поля $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, получающиеся посредством присоединения к $\mathbf{Q}$ всех значений характера χ на непустом подмножестве $A \subseteq G$; $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_G(\chi)$ — абсольютное поле характера χ.

В работе доказывается следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* $G = A_1 \cup A_2$, где $A_i \neq \emptyset$ $(i=1, 2)$, *то по крайней мере одно из полей* $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ $(i=1, 2)$ *совпадает с* $\mathbf{Q}(\chi)$.

Введем дополнительно следующие обозначения: $|G|$ — порядок группы G; $G^* = G \setminus \{1\}$; $|g|$ — порядок элемента $g \in G$; если $x, y \in G$, то $x \sim y$ означает, что элементы x и y сопряжены; $Z(H)$ — центр группы H; $x^g = g^{-1}xg$ $(x, g \in G)$; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G; $X(G)$ — кольцо обощенных характеров группы G; $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}(\varepsilon)$, где ε — комплексный первообразный корень m-й — степени из единицы; $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{|G|}$; $\mathrm{Gal}(\Lambda/\mathbf{K})$ — группа Галуа нормального расрирения Λ поля $\mathbf{K}$; $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{K}/\mathbf{Q})$, $\Gamma^{(\chi)} = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{K}/\mathbf{Q}(\chi))$, $\Gamma_i^{(\chi)} = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{K}/\mathbf{Q}_{A_i}(\chi))$ $(i=1, 2)$; (m, n) — наибольший общий делитель натуральных чисел m и n; $\mathbf{Z}$-кольцо целых чисел.

Как известно, $X(G)$ можно рассматривать как $\mathbf{Z}\Gamma$-модуль: поскольку $\Theta(g) \in \mathbf{K}$ для лубых $\Theta \in X(G)$ и $g \in G$, то $\xi\Theta$ $(\xi \in \mathbf{Z}\Gamma)$ можно определить, полагая $(\xi\Theta)(g) = \xi(\Theta(g))$, где ξ рассматривается как линейный оператор, действующий на $\mathbf{Q}$-протранстве $\mathbf{K}$*).

Изложенное ниже доказательство теоремы 1 использует метод, примененный Р. Брауэром [3, 4, 5] для доказательства теорем Блихфельдта—Бернсайда [1, 2] о значениях групповых характеров. Приступая к доказательству теоремы 1, допустим, что $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi) \neq \mathbf{Q}(\chi)$ $(i=1, 2)$. Тогда $\Gamma_i^{(\chi)} \supset \Gamma^{(\chi)}$ $(i=1, 2)$ (включения строгие). Выбрав автоморфизмы σ_i $(i=1, 2)$ поля $\mathbf{K}$ так, чтобы имело место $\sigma_i \in \Gamma_i^{(\chi)} \setminus \Gamma^{(\chi)}$ $(i=1, 2)$, будем иметь

$$[(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)]\chi = 0, \tag{1}$$

где $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)$ понимается как элемент кольца $\mathbf{Z}\Gamma$, а характер χ — как элемент $\mathbf{Z}\Gamma$-модуля $X(G)$. Действительно, так как группа Γ абелева, то $(b_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)$. Если $g \in A_1$, то $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$; следовательно

*) Можно также рассматривать $\xi(\Theta(g))$ как произведение элемента $\xi \in \mathbf{Z}\Gamma$ на элемент $\Theta(g)$ модуля Галуа $\mathbf{K}$.

$(\sigma_1\chi)(g)=\sigma_1\{\chi(g)\}=\chi(g)$, откуда $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g)=(\sigma_2-1)\ \{(\sigma_1-1)\chi(g)\}=$ $=(\sigma_2-1)(0)=0$. Если $g\in A_2$, то $\chi(g)\in\mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$; поэтому $(\sigma_2\chi)(g)=\sigma_2\{\chi(g)\}=\chi(g)$ и $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g)=(\sigma_1-1)\{(\sigma_2-1)\chi(g)\}=(\sigma_1-1)(0)=0$. Таким образом, функция $[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi$ всюду на G обращается в нуль и, тем самым, (1) доказано. Переписав (1) в виде $\chi+(\sigma_1\sigma_2)\chi=\sigma_1\chi+\sigma_2\chi$ и пользуясь тем, что χ, $(\sigma_1\sigma_2)\chi$, $\sigma_1\chi$, $\sigma_2\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, получим: $\chi=\sigma_1\chi$, либо $\chi=\sigma_2\chi$. В первом случае $\sigma_1\in\Gamma^{(\chi)}$, во втором $-\sigma_2\in\Gamma^{(\chi)}$, что противоречит выбору автоморфизмов σ_1 и σ_2. Таким образом, по крайней мере одно из полей $\mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$, $\mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$ совпадает с $\mathbf{Q}(\chi)$ — теорема доказана.

Из теоремы 1, как будет показано ниже, легко выводятся упомянутые выш теоремы Блихфельдта—Бернсайда. Приводим эти теоремы в несколько упрощенных формулировках:

Теорема 2. *Пусть p_1 и p_2 — различные простые делители числа $|G|$, ν_1 и ν_2 — натуральные числа. Если группа G содержит такие элементы g_i $(i=1, 2)$, что $\chi(g_i)\in\mathbf{Q}_{p_i^{\nu_i}}\setminus\mathbf{Q}_{p_i^{\nu_i-1}}$ $(i=1, 2)$, то G содержит элемент порядка $p_1^{\nu_1}\cdot p_2^{\nu_2}$.*

Теорема 3. *Пусть π — множество всех простых делителей числа $|G|$, $\pi=$ $=\pi_1\cup\pi_2$, где $\pi_i\neq\emptyset$ $(i=1, 2)$. Если A_i — мниижество всех π_i-элементов A_i' — множество всех π_i'-элементов группы G $(i=1, 2)$, то характер χ рационален по ткрайней мере на одном из подмножеств A_1', A_2'.*

Доказательство теоремы 2. Допустим, что группа G не содержит элементов порядка $p_1^{\nu_1}\cdot p_2^{\nu_2}$. Полагая $|G|=p_i^{\alpha_i}u_i$, где u_i — целое не делящееся на p_i, покажем что $G=A_1\cup A_2$, где $A_i=\{g\in G\,|\,g^{p_i^{\nu_i-1}u_i}=1\}$ $(i=1, 2)$. Действительно, пусть $g\in G$ и $p_i^{\lambda_i}$ — p_i-часть $|g|$ $(i=1, 2)$. Если $\lambda_i\geqq\nu_i$ $(i=1, 2)$, то $p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}|\,|g|$, откуда вытекает существование элемента порядка $p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}$. Таким образом, выполняется по крайней мере одно из неравенств $\lambda_1\leqq\nu_1-1$, $\lambda_2\leqq\nu_2-1$. В первом случае $g\in A_1$, во втором — $g\in A_2$. В силу теоремы 1 $\mathbf{Q}(\chi)$ совпадает по крайней мере с одним из полей $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ $(i=1, 2)$. Если, например, $\mathbf{Q}(\chi)=\mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$, то для любого $g\in G$ будет иметь место $\chi(g)\in\mathbf{Q}_{A_1}(\chi)\subseteqq\mathbf{Q}_{p_1^{\nu_1-1}u_1}$. В частности,*) $\chi(g_1)\in\mathbf{Q}_{p_1^{\nu_1}}\cap\mathbf{Q}_{p_1^{\nu_1-1}u_1}=\mathbf{Q}_{p_1^{\nu_1-1}}$ — противоречие. Таким образом, группа G содержит элемент порядка $p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть u_i π_i-часть $|G|$ $(i=1, 2)$. Тогда $A_i=\{g\in G\,|\,g^{u_i}=1\}$ $(i=1, 2)$. Если $g_i\in A_i'$, то g_i π_i'-элемент и, следовательно, $(|g_i|, u_i)=1$ $(i=1, 2)$. Так как $A_1\cup A_2=G$, то в силу теоремы 1 поле $\mathbf{Q}(\chi)$ совпадает по крайней мере с одним из полей $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$ $(i=1, 2)$. Если, например, $\mathbf{Q}(\chi)=\mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$, то $\chi(g_1)\in\mathbf{Q}_{|g_1|}\cap\mathbf{Q}_{A_1}(\chi)\subseteqq\mathbf{Q}_{|g_1|}\cap\mathbf{Q}_{u_1}=\mathbf{Q}_{(|g_1|\,u_1)}=\mathbf{Q}$. Аналогично, $\mathbf{Q}(\chi)=\mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$ влечет $\chi(g_2)\in\mathbf{Q}$. Таким образом, если $g_i\in A_i'$ $(i=1, 2)$, то по крайней мере одно из чисел $\chi(g_i)$ $(i=1, 2)$ рационально. Если не все значения характера χ на A_1' рациональны, то найдется такой элемент $g_1\in A_1'$, что $\chi(g_1)\notin\mathbf{Q}$. На основании доказанного $\chi(g_2)\in\mathbf{Q}$ при любом $g_2\in A_2'$, т. е. характер χ рационален на A_2', если он не всюду рациоален на A_1'.

---

*) Как известно [9] $\mathbf{Q}_m\cap\mathbf{Q}_n=\mathbf{Q}_{(m,\,n)}$.

Следствие. *Если* $G^{\#}=A_1\cup A_2$, $A_i\neq\emptyset$ $(i=1,2)$ *и порядки элементов подмножества* A_1 *взаимно просты с порядками элементов подмножества* A_2, *то характер* χ *рационален по крайней мере на одном из подмножеств* A_i $(i=1,2)$.

Согласно Брауэру и Фаулеру [6] расстояние $d(x,y)$ между элементами $x,y\in G^{\#}$ определяется следующим образом: $d(x,y)=\infty$, если не существует такой последовательности $\{x_i\}_{0\leqq i\leqq n}$ элементов подмножества $G^{\#}$, что $x_0=x$, $x_n=y$, $x_{i-1}x_i=x_ix_{i-1}$ $(i=1,\ldots,n)$; если же последовательности обладающие указанным свойством существуют, то $d(x,y)$ равно наименьшей «длине» n такой последовательности. В частности $d(x,x)=0$; $d(x,y)=1$ равносильно тому, что $x\neq y$ и $x\cdot y=y\cdot x$. Ясно, что $d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)(x,y,z\in G^{\#})$. Если α — автоморфизм группы G, то, очевидно, $d(x^\alpha,y^\alpha)=d(x,y)$.

Дж. Томпсоном была высказана следующая гипотеза: если $x,y\in G^{\#}$, $|x|=p$, $|y|=q$ (p и q — различные простые числа), причем $\chi(x)$ и $\chi(y)$ иррациональны, то существуют такие элементы $x',y'\in G^{\#}$, что $x'\sim x$, $y'\sim y$ и $x'y'=y'x'$ (т. е. $d(x',y')=1$).

Как показано в [7], гипотеза Томпсона неверна. Тем не менее, утверждение этой гипотезы оказывается справедливым в следующей ослабленной формулировке:

Теорема 4. *Если* $x,y\in G^{\#}$ *и* $\chi(x),\chi(y)$ *иррациональны, то существуют такие элементы* $x',y'\in G^{\#}$, *что* $x'\sim x$, $y'\sim y$ *и* $d(x',y')<\infty$.

Доказательство. Группу G будем называть несвязной, если $d(x,y)=\infty$ для некоротых $x,y\in G^{\#}$; в противном случае группу G назовем связной*). (Таким образом, связны группы, для которых подмножество $G^{\#}$ имеет конечный диаметр). На множестве $G^{\#}$ возникает отношение эквивалентности ϱ_G: если $x,y\in G^{\#}$ то $x\varrho_G y$ тогда и только тогда, когда $d(x,y)<\infty$. Классы эквивалентности ϱ_G назовем компонентами связности группы G. Группа G несвязна тогда и только тогда, когда число компонент связности >1. Компоненты связности группы G, очевидно, переставляются ее автоморфизмами. Непустое подмножество $A\subseteqq G^{\#}$ будем называть замкнутым, если $x\in A$ влечет $C_G(x)\subseteqq\hat{A}=A\cup\{1\}$. Подмножество A замкнуто, очевидно, тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторого семейства компонент связности. Если p — простое число и замкнутое подмножество A содержит p-элемент u, то $\hat{A}$ содержит каждую силовскую p-подгруппу P группы G, содержащую u. Действительно, так как $Z(P)\neq\{1\}$, то $P^{\#}$ содержится в той же компоненте связности, что и элемент u, откуда вытекает, что $P\subseteqq\hat{A}$. Если, кроме того, замкнутое подмножество A нормально, то $\hat{A}$ содержит все силовские p-подгруппы группы G, а потому и все p-элементы группы G.

В далснейшем мы будем считать группу G несвязной, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Пусть x и y — элементы группы G удовлетворяющие условию теоремы, D — компонента связности, содержащая элемент x и $\{D_1=D,\ldots,D_n\}$ — класс компонент связности сопряженных с D. Положим $A_1=\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i$, $A_2=G^{\#}\setminus A_1$. Из $A_1=G^{\#}$ следовало бы, что $|G|-1=$

*) Ряд результатов относящихся к несвязным группам анонсирован в [8].

$=|G^{\#}|=\sum_{i=1}^{n}|D_i|=n|D|$. Так как $n=(G\colon N_G(D))$ делит $|G|$, отсюда следует, что $n=1$. Таким образом, $G^{\#}=D$, что противоречит несвязности группы G. Тем самым доказано, что $A_1\neq G^{\#}$ и, следовательно $A_2\neq\emptyset$. Так как компоненты связности D_i $(i=1, \dots, n)$ переставляются между собой внутренними автоморфизмами группы G, то A_1 нормально. Итак, A_1 и A_2 — непустые нормальные замкнутые подмножества и $G^{\#}=A_1\cup A_2$. Порядки элементов подмножества A_1 взаммно просты с порядками элементов подмножества A_2. Действительно, допустим, что $x_i\in A_i$ $(i=1, 2)$ и $(|x_1|, |x_2|)=m\neq 1$. Если p — простой дилетель числа m, то $|x_1^{\frac{|x_1|}{p}}|=|x_2^{\frac{|x_2|}{p}}|=p$. Так как $x_i^{\frac{|x_i|}{p}}\in C_G(x)$, то ввиду замкнутости подмножества A_i, $x_i^{\frac{|x_i|}{p}}\in A_i$ $(i=1, 2)$. Ввиду замкнутости и нормальности подмножеств A_i $(i=1, 2)$, отсюда вытекает, что каждое из подмножеств $\hat{A}_i$ $(i=1, 2)$ содержит все p-элементы группы G, что невозможно, так как $\hat{A}_1\cap\cap\hat{A}_2=\{1\}$. Таким образом, подмножества A_i $(i=1,2)$ удовлетворяют условию следствия теоремы 3. Так как $x\in A_1$ и $\chi(x)\notin Q$, то χ рационален на A_2. Ввиду иррациональности $\chi(y)$ отсюда вытекает, что $y\in A_1$. Так как $A_1=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$, то найдутся такие i и j, что $x\in D_i$, $y\in D_j$. Замечая, что $D_j=D_i^g$, где $g\in G$ и полагая $x'=x^g$, $y'=y$, получим $x', y'\in D_j$, т. е. $d(x', y')<\infty$. Так как $x'\sim x, y'\sim y$, то теоррема доказана.

Литература

[1] H. F. Blichfeldt, On the order of linear homogeneous groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1904), 310—325.

[2] W. Burnside, Theory of groups of finite order, second edition, *Cambridge* (1911), 348.

[3] R. Brauer, A note on theorem of Burnside and Blichfeldt. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 31—34.

[4] D. S. Passman, Permutation Groups, *New York—Amsterdam,* (1968), 176.

[5] W. Feit, Characters of finite groups. *New York—Amsterdam,* (1967), 40.

[6] R. Brauer—K. A. Fauler, On groups of even order, *Ann. Math.* **62** (1955), 565—583.

[7] A. Sibley David, A counterexampte in the theory of finite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **69** (1977), 19—21.

[8] А. И., Вейцблит Э. М., Жмудь «Связность» конечной группы и группы Цассенхауза. *Сообщения АН Груз. ССР,* **90,** (1978), 277—279.

[9] H. Hasse, Zahlentheorie (Berlin) 1963.

(Поступила: 13. VII. 1979.)