О связи квазиавтопараллельных кривых и автопараллельных поверхностей

Ш. БАЧО (Дебрецен)*

В аффинносвязном пространстве обобщением плоских кривых можем считать такие кривые, вдоль которых существует параллельное поле двухмерных площадок, каждая из которых проходит через касательный вектор к этой кривой в соответствующей точке. Такие кривые изучают Н. С. Синюков [1] и многие авторы[1]. В настоящей работе рассматриваются такие обобщенные плоские кривые в тензорносвязном пространстве. В соотвествии с нашей статьей [3] эти обобщенные плоские кривые назовем квазиавтопараллельными. В [3] мы исследовали существование квазиавтопараллельных кривых и их поведение в случае слабой линейной тензорной связности. Данная работа является продолжением нашей упомянутой статьи [3].

Первый параграф носит вводный характер. В ней излагаются необходимые определения и результаты для дальнейшего исследования. Второй параграф посвящен изучению связи квазиавтопараллельных кривых и автопараллельных поверхностей. Эти поверхности являются обобщениями плоскостей в тензорносвязном пространстве (см. [3]). В третьем параграфе изучаем квазиавтопараталлельные поверхности, которые являются аналогами геодезических поверхностей. Исследования носят локальный характер.

1. §. Квазиавтопараллельные кривые и автопараллельные поверхности в тензорносвязном пространстве

Тензорная связность[2] определяет к данному двухвалентному тензору $t^{ij}(x)$[3] в бесконечно близкой точке $(x+dx)$ тоже двухвалентный тензор, который назовем параллельным к тензору $t^{ij}(x)$. $t^{ij}(x)$ и $t^{ij}(x+dx)$ тогда и только тогда параллельны, если

$$\vartheta t^{ij} = dt^{ij} + B^{ij}{}_r(x, t)\, dx^r = 0, \tag{1}$$

т. е. абсолютный дифференциал равен нулью. $B^{ij}{}_r(x, t)$, объект тензорной связности, однородная функция нулевой степени в переменной t. Для того,

---

* S. Bácsó (Debrecen)

[1] Побробную литературу можно найти в монографии Н. С. Синюкова [I].

[2] Подробное изложение теории тензорной связности можно читать в работе A. Cossu [2].

[3] Латинские индексы принимают значения от одного до n,

чтобы ϑt^{ij} был двухвалентным тензором, $B^{ij}{}_r(x, t)$ должен иметь соотвествующий закон преобравозания. $B^{ij}{}_r(x, t)$, и вместе с ним тензорная связность вообще нелинейны. $B^{ij}{}_r(x, t)$ линейна, если

$$B^{ij}{}_r(x, t) = \gamma_{kl}{}^{ij}{}_r(x)\,t^{kl}. \tag{2}$$

Дифференциальное многообразие M_n n измерений вместе с объектом $B^{ij}{}_r(x, t)$ называется пространством T_n тензорной связноти.

В далеьнейшем все рассуждения ведутся в тензорносвязном пространстве T_n^*, в котором тензорная связность отображает простой бивектор на простой бивектор. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$B^{(ij)}{}_r(x, p) = 0 \tag{3}$$

$$p^{1[2}B^{\varkappa\lambda]}{}_r(x, p) + B^{1[2}{}_r(x, p)\,p^{\varkappa\lambda]} = 0; \quad (\varkappa, \lambda = 3, 4, \ldots, n), \tag{4}$$

где p^{ij} компоненты простого бивектора.[4]

Определение 1. Квазиавтопараллельной кривой назовем кривую γ, вдоль которой существует параллельное поле двухмерных площадок, каждая из которых проходит через касательный вектор к этой кривой в соотвествующей точке.

Двухмерная площадка характеризуется простым бивектором p^{ij}, так что в пространстве T_n^* система дифференциальных уравнений квазиавтопараллельных кривых в каноническом параметре τ имеет следующий вид

$$\frac{dp^{ij}}{d\tau} + B^{ij}{}_r(x, p)\frac{dx^r}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

$$p^{ij} \wedge \frac{dx^r}{d\tau} = 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Система* (5), (6) *имеет единственное решение* $p^{ij}(\tau)$ *и* $x^i(\tau)$, *при данных функций* $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ *и для любых начальных значений* $\underset{0}{x}{}^i$, p_0^{ij}, *где* $\underset{0}{x}{}^1 = x^1(\tau_0)$ *и* $\underset{0}{x}{}^2 = x^2(\tau_0)$.

Определение 2. Двухпараметрическую поверхность пространства T_n^* назовем автопараллельной, если её касательные плоскости вдоль любых кривых поверхности параллельны.

Таким образом, любые кривые автопараллельной поверхности являются квазиавтопараллельными.

---

[4] Дальнейшие определения и утверждения этого введения мы обсуждали в [3].

2. §. Автопараллельные поверхности и их связь с квазиавтопараллельными кривыми

Пусть задана автопараллельная поверхность $x^i = x^i(u^1, u^2)$ в параметрическом представлении, при котором

$$u^a = x^a \quad (a = 1, 2).$$

Тогда автопараллельная поверхность имеет следующий виг

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1 \\ x^2 &= x^2 \\ x^3 &= x^3(x^1, x^2) \\ &\vdots \\ x^n &= x^n(x^1, x^2). \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем употребляем именно такое параметрическое представление автопараллельной поверхности. Такой выбор не нарушает общности выводов. В самом деле, при выборе любой координатной плоскости $[x^i, x^j]$ приведенные здесь результаты и доказательства остаются в силе.

Берём в пространстве T_n^* какую-нибудь точку $\underset{0}{x}^i$, и в этой точке простой бивектор p_0^{ij}, который определяет плоскость в точке $\underset{0}{x}^i$. Пусть они в дальнейшем фиксированы.

Теорема 2. *Если существует автопараллельная поверхность Φ, касающаяся плоскости бивектора p_0^{ij} в точке $\underset{0}{x}^i$, тогда все квазиавтопараллельные кривые, имеющие начальные значения $\underset{0}{x}^i, p_0^{ij}$, принадлежат к поверхности Φ.*

Доказательство. Пусть даны функции $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ $\left(\underset{0}{x}^1 = x^1(\tau_0), \underset{0}{x}^2 = x^2(\tau_0)\right)$; рассмотрим квазиавтопараллельную кривую γ_1, определённую через начальные значения $\underset{0}{x}^i, p_0^{ij}$ и функции $x^1(\tau), x^2(\tau)$. Если существует автопараллельная поверхность в параметрическом представлении (7), касающаяся плоскости бивектора p_0^{ij} в точке $\underset{0}{x}^i$, тогда функции $x^1(\tau), x^2(\tau)$ определяют на этой плоскости квазиавтопараллельную кривую γ_2

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x^1(\tau) \\ x^2 &= x^2(\tau) \\ x^3 &= x^3\big(x^1(\tau), x^2(\tau)\big) \\ &\vdots \\ x^n &= x^n\big(x^1(\tau), x^2(\tau)\big), \end{aligned}$$

которая, на основе последнего предложения первого параграфа, квазиавтопараллельна. В следствии Теоремы 1. $\gamma_1 \equiv \gamma_2$, и эта квазиавтопараллельная кривая принадлежит Φ.

Теорема 3. *Если существует автопараллесная поверхность, касающаяся в точке $\underset{0}{x}^i$ плоскости бивектора p_0^{ij}, то только одна.*

Доказательство. Допустим, что существуоет две такие автопараллельные поверхности, Φ_1 и Φ_2. Рассмотрим на плоскости $[x^1, x^2]$ функции $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ для которых $\underset{0}{x}^1=x^1(\tau_0)$, $\underset{0}{x}^2=x^2(\tau_0)$. К этим функциям принадлежит на обеих поверхностях по одной квазиавтопараллельной кривой. Но эти кривые попарно совпадают в следствуи Теоремы 1., так что $\Phi_1=\Phi_2$.

3. §. Квазиавтопараллельные поверхности

Определение 3. Пусть $P_0(\underset{0}{x})$ — произвольная точка в пространстве T_n^* и σ — двухмерная плоскость в этой точке. По направлению каждого вектора плоскости σ проведем через P_0 квазиавтопараллельную кривую, плоскость бивектора p_0^{ij} которой здесь σ. В дальнейшем такие квазиавтопараллельные кр вые назовем характерными K. Если эти квазиавтопараллельные кривые дают двухпараметрическую поверхность Ψ, то она называется квазиавтопараллельной.

Очевидно, что в точке P_0 σ является касательной поверхностью.

Теорема 4. *В произвольной точке $(\underset{0}{x})$ к каждой плоскости p_0^{ij} существует квазиавтопараллельная поверхность.*

Доказательство. На основе Теоремы 1. к данным $\underset{0}{x}^i$, p_0^{ij} и $x^a(\tau)$ $\big(a=1, 2;$ $x^a(\tau_0)=x_0^a\big)$ принадлежит единственная квазиавтопараллельная кривая, которая удовлетворяет системам (5), (6). Запишем из решении системы (5), (6) функции $x^i(\tau)$ с помошю формулы Тейлора. Берём систему координат, в которой $p^{12}(\tau_0)=p_0^{12}\neq 0$. Так поблизности τ_0 ещё не равно нулью p^{12}. Вследствие (6) имеется $p^{ij}\wedge\dot{x}^r=q^{ijr}=0$. Таким образом, из $q^{12\varkappa}=0$ $(\varkappa=3, 4, \ldots, n)$

$$\dot{x}^\varkappa=\frac{1}{p^{12}}(\dot{x}^2p^{1\varkappa}+\dot{x}^1p^{\varkappa 2}). \tag{8}$$

Тогда получаем

$$x^1=x^1(\tau)$$
$$x^2=x^2(\tau)$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned}x^\varkappa=x^\varkappa(\tau)&=\underset{0}{x}^\varkappa+(\tau-\tau_0)\frac{1}{p_0^{12}}(\underset{0}{\dot{x}}^2p_0^{1\varkappa}+\underset{0}{\dot{x}}^1p^{\varkappa 2})+\\&+\frac{1}{2}(\tau-\tau_0)^2\frac{1}{(p_0^{12})^2}\{[B^{12}{}_r(x_0, p_0)(\underset{0}{\dot{x}}^2p_0^{1r}+\underset{0}{\dot{x}}^1p^{r2})-B^{1\varkappa}{}_r(\underset{0}{x}, p_0)\dot{x}^2-\\&-B^{\varkappa 2}{}_r(\underset{0}{x}, p_0)\underset{0}{\dot{x}}^1](\underset{0}{\dot{x}}^2p_0^{1r}+\underset{0}{\dot{x}}^1p^{r2})+\underset{0}{\ddot{x}}^2p_0^{1\varkappa}+\underset{0}{\ddot{x}}^1p^{\varkappa 2}\}+\frac{1}{3!}(\tau-\tau_0)^3\frac{1}{(P_0^{12})^3}\{\ldots,\end{aligned} \tag{9}$$

где мы ползовались уравнениями (8), и производные компонентов p^{ij} выразили с помощью (5).

Рассмотрим в координатной плоскости $[x^1, x^2]$ семейство кривых

$$x^a = f^a(\tau, \alpha) \quad (a = 1, 2), \tag{10}$$

исходящих из точки $P_0'(\underset{0}{x}^1, \underset{0}{x}^2)$, и вполне покрывающих одну окрестность точки P_0' в плоскости $[x^1, x^2]$. Предположим, что $\underset{0}{x}^a=0$ и $\tau_0=0$ тогда таким семейством кривых является, например

$$x^1 = \tau \cos \alpha, \quad x^2 = \tau \sin \alpha. \tag{11}$$

Это семейство кривых даёт регулярное представление плоскости $[x^1, x^2]$ за исключением точки P_0'. Если, мы подставим кривые (11) в уравнения (9), то мы получаем семейство кривых $x^i(\tau, \alpha)$, каждые из которых является квазиавтопараллельными кривыми. Эти кривые исходят из точки $P_0(\underset{0}{x})$ и плоскостью бивектора $p^{ij}(\tau_0)$ является σ. По направлению каждого вектора плоскости σ исходит точно одна такая кривая. Итак $x^i(\tau, \alpha)$ — семейство таких квазиавтопараллельных кривых, которое рассматриваются в Определении 3. Однако эти двухпараметрические функции $x^i(\tau, \alpha)$ создают поверхность Ψ, т.е. функции $x^i(\tau, \alpha)$ непрерывно дифференцируемы и ранг матрицы $\dfrac{\partial(x^i)}{\partial(\tau, \alpha)}$ разняется двум в точке P_0. В Теореме 4. мы показали, что к данному P_0 и σ существует семейство квазиавтопараллельных кривых со свойством K, создающее поверхность Ψ. Ψ аналог геодезической поверхности аффинносвязного пространства L_n. В пространстве L_n каждая квазиавтопараллельная кривая со свойствым K принадлежит к поверхности Ψ, но в пространстве T_n^* это не верно. Здесь существуют и квазиватопараллельные кривые $\bar{x}^i(\bar{\tau})$ со свойством K, которые не принадлежат к Ψ. Такие кривые легко получаются, если вместо (11) дадим иное семейство функций плоскости $[x^1, x^2]$. Для того, чтобы все K характерные квазиавтопараллельные кривые принадлежали к Ψ, необходимо, чтобы дальнейшие условия удовлетворялись на $B^{ij}{}_r$.

Автопараллельная поверхность в каждой её точке квазиавтопараллельна. Это свойство только необходимо, но не достаточно для того, чтобы, поверхность была автопараллельной. Если T_n^* редуцируется на L_n, которое имеет компонентны объекта $\Gamma_j{}^i{}_r(x)$, т. е. $B^{ij}{}_r(x, t)=(\delta^i_k\Gamma_l{}^j{}_r+\delta^j_l\Gamma_k{}^i{}_r)t^{kl}$, то автопараллельная поверхность тоталгеодезическая поверхность пространства L_n, и квазиавтопараллельная поверхность: геодезическая поверхность пространства L_n. В аффинном пространстве A_n обе поверхности являются плоскостями.

В пространстве A_n квазиавтопараллельные кривые это плоские привые. Очевидно, что в произвольной точке каждой поверхности пространства A_n по напразлению каждой касающейся поверхности векторов исходят плоские кривые, которые принадлежат к поверхности. Это свойство верно и в пространстве T_3^*.

Теорема 5. *В произвольной точке каждой двухпараметрической поверхности пространзства T_3^* по направлению каждой касающейся поверхности векторов исходят квазиавтопараллельные кривые, которые принадлежат к поверхности.*

Следует отметить, что эти поверхности вообще не являются квазиавтопараллельными, потому что плоскость σ простого бивектора p^{ij} квазиавтопараллельной кривой обычно не является касательной плоскостью поверхности в данной точке.

Доказательство Теоремы 5. Пусть задана $\Sigma(x)$ в точке $P(x)$ одной двухпараметрической поверхности пространства T_3^*. Из точки $P(x)$ в плоскости $\Sigma(x)$ исходит вектор $\underset{\sim}{e}(P)$, и проведем плоскость $S \neq \Sigma(x)$ через $\underset{\sim}{e}(P)$. Перенесём параллельно плоскость S по направлению вектора $\underset{\sim}{e}(P)$ в бесконечно близкую точку $P'(x+dx)$ поверхности χ. Тогда получаем здесь плоскость S'. Касательный вектор $\underset{\sim}{e}'(P')$ линия пересечения плоскости S' с касательной плоскостью в точке P' поверхности χ. Если перенесём параллельно S' по направлению $\underset{\sim}{e}'(P')$ в соседнюю точку $P''(P''\in\chi)$, получается плоскость S''. Продолжая дальше этот процесс, точки $P, P', P'', \ldots$ дают квазиавтопараллельную кривую на поверхности χ. Этот процесс можно осуществлять в плоскости $\Sigma(x)$ по направлению каждого вектора, исходящего из точки $P(x)$. Так χ имеет свойство, рассмотренное в Теореме 5.

Литература

[1] Н. С. Синюков, Геодезические отображения римановых пространств. *Москва,* Наука 1979.

[2] A. Cossu, Nozioni generali sulle connessioni tensoiiali di specie qualenque. *Rend. Mat. e Appl.* **21** 1962, 167—218.

[3] L. Tamássy—S. Bácsó, On quasi-autoparallel curves in tensorially connected spaces. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai,* Differential geometry (to appear).

(Поступила: 22. VIII. 1979.)