Конечные группы, обладающие неприводимым комплексным характером с сопряженными нулями I.

Э. М. Жмудь

Пусть G — неабелева группа и χ — ее нелинейный неприводимый характер.* Как известно [1], характер χ обладает «нулями», т. е. обращается на некоторых элементах группы G в нуль. Если группа G порождается множеством нулей характера χ, будем называть последний характером 1-го рода; в противном случае назовем χ характером 2-го рода.

Нули характера χ образуют G-инвариантное множество. В настоящей работе изучается экстремальный случай, когда это множество является классом сопряженных элементов группы G. В связи с этим дадим следующие определения. Характер χ назовем DS-характером, если он точен и его нули сопряжены. Характер χ назовем D-характером, если $\chi(s)=\chi(t)$ $(s, t\in G)$ влечет сопряженность элементов s и t. Группу G с отмеченным DS-характером (D-характером) назовем DS-группой (D-группой) и будем обозначать символом $\{G, \chi\}$; G — «носитель» DS-группы $\{G, \chi\}$. Так как D-характеры являются DS-характерами, то класс D-групп содержится в классе DS-групп. В зависимости от рода DS-характера χ будем различать DS-группы 1-го и 2-го рода; DS-группу $\{G, \chi\}$ будем относить к 1-му типу, если центр G — максимальная не содержащая нулей характера χ нормальная подгруппа группы G и ко 2-му типу — в противном случае.

Примеры DS-групп. 1) DS-группы 1-го рода и 1-го типа: $\{A_5, \chi_i\}$ $(i=1, 2, 3)$, $\chi_1(1)=4$, $\chi_2(1)=\chi_3(1)=3$; χ_2 и χ_3 — D-характеры; 2) DS-группы 1-го рода и 2-го типа: $\{D_m, \chi_i\}$, где D_m — группа диэдра с нечетным m и χ_i — любой ее точный неприводимый характер; χ_i-D-характеры 1-го рода и 2-го типа; 3) DS-группы 2-го рода и 1-го типа: $\{SL(2, 3), \chi_i\}$ $(i=1, 2, 3)$; $\chi_1(1)=\chi_2(1)=\chi_3(1)=2$; χ_1 и $\chi_2=\bar{\chi}_1$-комплексные D-характеры; χ_3-вещественнозначный DS-характер; 4) DS-группы 2-го рода и 2-го типа: $\{S_4, \chi_i\}$ $(i=1, 2)$; $\chi_1(1)=\chi_2(1)=3$.

Группа $SL(2, 3)$ принадлежит к серии носителей DS-групп 2-го рода и 1-го типа состоящей из четырех групп G_p $(p=2, 3, 5, 7)$ следующего строения. Пусть E_p-екстраспециальная группа порядка p^3, причем $E_1\cong Q_8$** и $\exp(E_p)=p$, если $p\neq 2$; пусть H_p-подгруппа порядка p^2-1 группы $SL(2, p)$ $\big(H_2\cong C(3)$***, $H_3\cong Q_8$, $H_5\cong SL(2, 3)$, H_7-расширение $C(2)$ при помощи S_4, имеющее един-

* В настоящей работе рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры.

** Q_8 — группа кватернионов

*** $C(n)$ — циклическая группа n-го порядка.

ственную инволюцию). Тогда $G_p = E \cdot H$, где $E \cong E_p$, $H \cong H_p$, H действует тривиально на центре E и $C_H(E)(=C_{G_p}(E) \cap H) = \{1\}$. Все группы G_p разрешимы.

В первой части настоящей работы доказаны следующие утверждения:

Теорема 2.7. *Если* $\{G, \chi\}$ — *DS-группа 1-го рода и 1-го типа и* $G \neq G'$, *то* $G \cong D_m$ *(m нечетно).*

Теорема 3.14. *Разрешимая группа G тогда и только тогда является носителем DS-группи 2-го рода и 1-го типа, когда* $G \cong G_p$ $(p \in \{2, 3, 5, 7\})$.

Во второй части работы рассматриваютсю *DS*-гтуппы 2-го рода и 2-го типа.

Некоторые обозначения

p всегда означает простое число; $|M|$ — число злементов конечного множества M; $Y \leqq X (Y < X)$ — подгруппа (собственная подгруппа) группы X; $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством $M \subseteq X$; $X^{*} X \setminus \{1\}$; $|x|$ — порядок элемента $x \in X$; $M^x = x^{-1} M x (M \subseteq X, x \in X)$; $M^X = \bigcup_{x \in X} M^x$; $y^X = \{y\}^X$ — «X — класс» порожденный элементом $y \in X$; $[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y (x, y \in X)$; $Z(X)$, X', $Sc(X)$, $F(X)$, $\Phi(X)$ соответственно — центр, коммутант, цоколь, подгруппа Фитинга, подгруппа Фраттини группы X; $\exp(X)$ — показатель группы X; $\mathrm{Syl}_p(X)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы X; $C_A(B) = C_X(B) \cap A$ $(A, B \leqq X)$; $C(n)$ — циклическая группа n-го порядка; Q_8 — группа кватернионов; D_m — группа диэдра порядка $2m$; $E(p^{2n+1})$ — экстраспециальная группа порядка p^{2n+1} и показателя p; $E_p \cong E(p^3)$, если $p \neq 2$, $E \cong Q_8$, $\mathrm{Irr}(X)$ — множество всех неприводимых характеров группы X; $\mathrm{Lin}(X)$ — множество всех линейных характеров группы X; $\mathrm{Ker}\, \chi = \{x \in X | \chi(x) = \chi(1)\}$ и $Z(\chi) = \{x \in X \| \chi(x)| = \chi(1)\}$ соответственно — ядро и квазиядро характера χ группы X; $T_\chi = \{x \in X | \chi(x) = 0\}$ — жножество всех нулей характера $\chi \in \mathrm{Irr}(X) \setminus \mathrm{Lin}(X)$; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\Delta_\chi = X \setminus N_\chi$; I_ψ — группа инерции характера $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ $(N \lhd X)$; ψ^X — характер группы X индуцированный характером ψ подгруппы $Y \leqq X$; χ_Y — ограничение характера χ на подгруппу $Y \leqq X$; $GL(\mathfrak{F})$, $SL(\mathfrak{F})$, $Sp(\mathfrak{F})$ соответственно — операторная полная линейная, специальная линейная, симплектическая группы линейного пространства $\mathfrak{F}$*; $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $Sp(n, K)$ — соответствующие матричные линейные группы (над полем K); **Z**-кольцо целых рациональных чисел; **Q**-поле рациональных чисел; **C**-поле комплексных чисел.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе G — неабелева группа, $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{Lin}(G)$, $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$, $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$, $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$.

1.1. Лемма [1] $T_\chi \neq \emptyset$

1.2. Лемма [5] (I)$\chi_{N_\chi} \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$; (II) *Если* $N_\chi \neq G$ *то из* $g \in \Delta_\chi$ *следует, что* $\chi(g)$ — *корень из* 1.

* В последнем случае $\mathfrak{F}$ — невырожденное симплектическое пространство.

1.3. Следствие. *Подгруппа* N_χ *неабелева.*

1.4. Лемма [14] $g \in T_\chi$ *влечет* $C_G(g) \subset N_\chi$*

1.5. *Следствие* $Sc(G) \subseteqq N_\chi$

Доказательство. Если F — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $F \subseteqq N_\chi$, так как из $F \nsubseteqq N_\chi$ следует $F \subseteqq C_G(N_\chi) \subset N_\chi$ — противоречие.

1.6. Лемма $Z(\chi) \subset N_\chi$.

Доказательство. $P(\chi)T_\chi = T_\chi$, $T_\chi^{-1} = T_\chi$.**

1.7. Следствие $Z(G) \subseteqq Z(N_\chi)$. *Если, в частности,* χ *точен* ($\operatorname{Ker}\chi = \{1\}$), *то* $Z(G) = Z(N_\chi)$

1.8. Лемма [7]. *Группа единиц конечного порядка кольца* $\mathfrak{J}_n$ *целых алгебраических чисел кругового поля* $\mathbf{O}(\varepsilon)$ *(ε-первообразный корень n-й степени из* 1) *совпадает с* $\langle(-1^{n+1}\varepsilon\rangle$.

1.9. Лемма [14]. *Если* $N_\chi \neq G$ *и* Δ_χ *содержит p-элемент, то* $\chi(1) \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} p)$.

Доказательство. Если $g \in \Delta_\chi$, $|g| = p^m (m \geqq 1)$, то $\chi(g) = \varepsilon^{v_1} + \ldots + \varepsilon^{v_{\chi(1)}}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p^m} + i \sin\frac{2\pi}{p^m}$, $v_j \in \mathbf{Z}(j = 1, \ldots, v_{\chi(1)})$. Полагая $\lambda = 1 - \varepsilon$, получим сравнение $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{\lambda}$ в кольце $\mathfrak{J}_{p^m}$. Так как в силу 1.2 и 1.8 $\chi(g) \in \langle(-1)^{p^m+1}\varepsilon\rangle$, то $\chi(g) \equiv \pm 1 \pmod{\lambda}$. откуда следует, ввиду λ/p и необратимости λ в $\mathfrak{J}_{p^m}$, что $\chi(g) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

1.10. Следствие [14] $(\chi(1), |G \setminus N_\chi|) = 1$.

1.11. Лемма. *Если* $\chi = \psi^G$, *где* $\psi \in \operatorname{Irr}(H)$, $H < G$, *то* $G \setminus H^G \subseteqq T_\chi$.

Доказательство. Вытекает из явного выражения для ψ^G.

1.12. Следствие. *Неприводимый характер 2-го рода группы G не может индуцироваться из ее собственной нормальной подгруппы.*

1.13. Следствие. *Нильпотентные группы не имеют неприводимых характеров 2-го рода****.*

1.14. Лемма [14, 15]. *Пусть* χ*-импримитивный**** неприводимый характер 2-го рода группы* G: $N_\chi \neq G$, $\chi = \psi^G$, *где* $\psi \in \operatorname{Irr}(H)$, $H < G$. *Положим* $\Omega = H \cap \Delta_\chi (= H \setminus N_\chi = H \setminus H_0$, *где* $H_0 = H \cap N_\chi)$. *Тогда имеют место следующие утверждения:* (I) $G = N_\chi H$; (II) $\Delta_\chi = \Omega^G$; (III) $H = N_G(\Omega)$ и Ω — (TI) — *подмножество группы* G; (IV) *Если* $g \in \Omega$, *то* $\chi(g) = \psi(g)$.

---

* $\subset$, $\supset$ — символы строгого включения.

** $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\}$

*** Неприводимый нелинейный характер нильпотентной группы индудцируется из ее максимальной подгруппы, откуда и следует 1.13.

**** т. е. индуцирующийся из собственной подгруппы группы G.

Доказательство. Так как $\chi(1)=(G:H)\psi(1)$, то в силу 1.10 $((G:N_\chi), (G:H))=1$. Поэтому $(G:N_\chi\cdot H)=1$, что доказывает (I). Из (I) следует, что $G/N_\chi\cong H/H_0$, откуда

$$(N_\chi:H_0)=(G:H)=m \tag{1.1}$$

Так как Δ_χ нормально, то $\Omega^G\subseteqq\Delta_\chi$. С другой стороны из $\Delta_\chi\subset G\setminus T_\chi$ и 1.11 следует, что $\Delta_\chi\subseteqq H^G\cap\Delta_\chi=\Omega^G$. Поэтому $\Delta_\chi=\Omega^G$ и (II) доказано. Из (II) вытекает, что $|\Omega^G|=|G|-|N_\chi|$. Поэтому, если $\{t_1=1, \ldots, t_m\}$ — полная система представителей правых смежных классов G по H, то $\left|\bigcup\limits_{i=1}^m \Omega^{t_i}\right|=|G|-|N_\chi|$. С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^m |\Omega^{t_i}|=m|\Omega|=m|H|-m|H_0|$, откуда в силу (1.1) $\sum\limits_{i=1}^m |\Omega^{t_i}|=|G|-|N_\chi|$. Следовательно $|\bigcup\Omega^{t_i}|=\sum|\Omega^{t_i}|$, откуда вытекает, что подмножества Ω^{t_i} попарно не пересекаются. Это доказывает (III). Утверждение (IV) вытекает из (II), (III) и явного выражения для ψ^G.

1.15. Следствие. *Немономиальный неприводимый характер 2-го рода группы G может индуцироваться только неприводимыми характерами 2-го рода.*

1.16. Следствие. *При условиях леммы* 1.14 *подгруппа H и все ее надгруппы самонормализуются.*

1.17. Следствие. *При условиях леммы* 1.14 *имеет место включение* $\bigcap\limits_{g\in G} H^g\subseteqq N_\chi$.

Доказательство. *Из* 1.14 (III) *вытекает, что* $H^g\cap H\subseteqq N_\chi$, если $g\notin H$.

1.18. Лемма. *Из* $N\lhd G, N\subsetneqq N_\chi$ *вытекает изотипичность характера* χ_N.

Доказательство. Если χ_N не изотипичен, то χ индуцируется из собственной подгруппы H группы G содержащей N. Поэтому в силу 1.17 $N\subseteqq\bigcup\limits_{g\in G} H^g\subseteqq N_\chi$ — противоречие.

1.19. Следствие. $F(G)\subseteqq N_\chi$.

Доказательство. Утверждение вытекает из 1.18 и 1.13.

1.20. Следствие. *Из* $N\lhd G, N\cap T_\chi=\emptyset$ *следует* $N\subseteqq N_\chi$.

Доказательство. В силу 1.18 $N\subsetneqq N_\chi$ влечет $\chi_N=e\psi$, где e — натуральное число (индекс ветвления χ_N) и $\psi\in\mathrm{Irr}(N)$. Поэтому $T_\psi=T_\chi\cap N=\emptyset$, откуда, ввиду 1.1, $\psi(1)=1$. Отсюда, в силу 1.6, $N\subseteqq Z(\chi)\subset N_\chi$ — противоречие.

1.21. Лемма. Если $N\lhd G$, $N\subsetneqq Z(\chi)$, $N\cap T_\chi=\emptyset$, то χ индуцируется из собственной подгруппы, содержащей N.

Доказательство. Пусть ψ — неприводимая компонента χ_N. Если $I_\psi=G$, то $\chi_N=e\psi$, где e — индекс ветвления χ_N. Так как $T_\psi=T_\chi\cap N=\emptyset$, то $\psi(1)=1$, откуда $N\subseteqq Z(\chi)$ — противоречие. Поэтому $I_\psi\neq G$, откуда и вытекает утверждение*.

---

* χ индуцируется из I_ψ

1.22. Лемма. *Пусть M — максимальная (по включению) не содержащая нулей характера χ нормальная подгруппа группы G. Тогда $Z(\chi) \subseteq M$ и, следовательно, $Z(G) \subseteq M$.*

Доказательство. $M \subseteq Z(\chi)M \lhd G$, $Z(\chi)M \cap T_\chi = \emptyset$, откуда $Z(\chi)M = M$.

1.23. Лемма.* *Степени неприводимых проективных представлений конечной группы H не превосходят $\sqrt{|H|}$.*

1.24. Лемма. *Если $N \lhd G$, $N \subseteq Z(\chi)$, где $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, то группа G/N обладает неприводимым комплексным проективным представлением степени $\chi(1)$.*

1.25. Следствие. *Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $N \lhd G$, $N \subseteq Z(\chi)$, то $\chi(1)^2 \leqq |G/N|$.*

1.26. Лемма**: *Если G — нильпотентная группа класса нильпотентности 2 и характер $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ точен, то $T_\chi = G \setminus Z(G)$ и $\chi(1)^2 = |G/Z(G)|$.*

1.27. Лемма. [11, 9]. *Если силовская 2-подгруппа конечной разрешимой группы H содержит циклическую подгруппу индекса 2, то H содержит нормальную подгруппу N все силовские подгруппы которой цикличны, причем H/N изоморфна одной из групп $C(2)$, A_4, S_4.*

1.28. Лемма***. *Пусть $\mathfrak{F}$ — 2-мерное линейное пространство над полем K. Всякая подгруппа группы $SL(\mathfrak{F})$ $(\cong SL(2, K))$, порядок которой не делится на характеристику поля K, действует на $\mathfrak{F}$ регулярно и, следовательно, является группой без неподвижных точек.*

1.29. Лемма. [8] $Sp(2, K) = SL(2, K)$ *(K — произвольное поле).*

1.30. Лемма****. *Если $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, то группа $SL(2, p)$ содержит подгруппу H_p порядка p^2-1. Эта подгруппа определена однозначно, с точностью до сопряженности в $SL(2, p)$, если $p \neq 7$ и с точностью до сопряженности в $GL(2, 7)$, если $p = 7$; все группы H_p разрешимы и являются группами без неподвижных точек*******; $H_2 \cong C(3)$, $H_3 \cong Q_8$, $H_5 \cong SL(2, 3)$, H_7 — расширение $C(2)$ при помощи S_4 имеющее единственную инволюцию; H_5 и H_7 задаются определяющими соотношениями: $H_5 = \langle a, b, d \rangle$, $a^4 = d^3 = 1$, $a^2 = b^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $dad^{-1} = b$, $dbd^{-1} = ab$; $H_7 = \langle a, b \rangle$, $a^8 = b^4 = (ab)^3 = 1$.*

1.31. Пусть E — экстраспециальная группа порядка $p^{2\mu+1} (k \geqq 1)$. Элементарная абелева группа $\mathfrak{F} = E/Z(E)$ с аддитивной точки зрения является линейным пространством размерности 2μ над простым полем Π_p характеристики p. Используя свойства коммутаторов, можно, как известно, задать на $\mathfrak{F}$ невырожденную симплектическую метрику.****** Пусть $\mathrm{Aut}_Z(E)$ — группа всех

---

* Это утверждение, а также 1.24 и 1.25 хорошо известны и вытекают из элементов теории проективных представлений (см. напр. [2]).

** Утверждение вытекает из 1.24 и результатов Р. Фрухта [4] (см. также [13])

*** Утверждение 1.28 и 1.29 хорошо известны.

**** Утверждения этой леммы являются следствиями общих результатов Д. А. Супруненко [10], но могут быть доказаны непосредственно.

***** Это следует из 1.28.

****** Если $Z(E) = \langle c \rangle$, $\bar{x}, \bar{y}$ — образы элвментов $x, y \in E$ в $\mathfrak{F}$, то полагая, $[x, y] = c^{(\bar{x}, \bar{y})}$ где $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Pi_p$, получим антисимметрическую билинейную форму $(*, *)$, задающую метрику на $\mathfrak{F}$. При этом $c^{\lambda 1_{\Pi_p}} = c^{\lambda}$ ($\lambda \in \mathbf{Z}$, 1_{Π_p} — единица поля Π_p).

автоморфизмов группы E тривиальных на $Z(E)$. Каждым автоморфизмом $\varphi\in \mathrm{Aut}_Z(E)$ канонически определяется некоторый автоморфизм $f(\varphi)$ симплектического пространства $\mathfrak{F}$: если $\bar{x}=Z(E)x\in\mathfrak{F}(x\in E)$, то $f(\varphi)(\bar{x})=\overline{\varphi(x)}$. Возникает гомоморфизм f группы $\mathrm{Aut}_Z(E)$ в $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$. Леммы 1.32—1.43 устанавливают ряд свойств гомомофризма f.

1.32. Лемма. $\mathrm{Ker}\, f$ — элементарная абелева группа порядка $p^{2\mu}$.

Доказательство. Пусть $Z(E)=\langle c\rangle$. Если $\varphi\in\mathrm{Ker}\, f$, то $\varphi(c)=c$ и $Z(E)\varphi(x)=Z(E)x$ для каждого $x\in E$. Следовательно, $\varphi(x)=xz_\varphi(x)$, где $z_\varphi(x)\in$ $\in Z(E)$. При фиксированном $\varphi\in\mathrm{Ker} f$, очевидно, $z_\varphi\in\mathrm{Hom}(E, Z(E))$, причем $\mathrm{Ker}\, z_\varphi\supseteq Z(E)$. Так как $E/Z(E)=\mathfrak{F}$, то гомоморфизмом z_φ канонически определяет гомоморфизм z_φ^*: $\mathfrak{F}\to Z(E)$. Отображение $\varphi\mapsto Z_\varphi^*$, как легко видеть, — изоморфизм $\mathrm{Ker}\, f$ на $\mathrm{Hom}(\mathfrak{F}, Z(E))$, т.е. на пространство $\mathfrak{F}^*$ сопряженное с $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathrm{Ker} f\cong\mathfrak{F}$, откуда и вытекает утверждение.

1.33. Лемма. *Гомоморфизм* f: $\mathrm{Aut}_Z(E)\to\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$ *сюрьективен.*

Доказательство (для случая $E\cong E_p$*). Пусть $Z(E)=\langle c\rangle$. Группа E имеет «каноническую» систему образующих $\{a, b\}$: $a^p=b^p=1$, $[a, b]=c$, если $p\neq 2$; $a^4=1$, $a^2=b^2$, $[a, b]=c$, если $p=2$. Допустим, что $p\neq 2$. Образы $\bar{a}=$ $=Z(E)a, \bar{b}=Z(E)b$ элементов a, b образуют базис пространства $\mathfrak{F}$. Если $\psi\in\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$ и $A=(\alpha_{ij})$ — матрица ψ в базисе $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, то в силу 1.29 $\det A=1$. Так как $\exp(E)=p$, отсюда следует, что $\{a', b'\}$, где $a'=a^{\alpha_{11}}b^{\alpha_{21}}$, $b'=a^{\alpha_{12}}b^{\alpha_{22}}$ ** — каноническая система образующих группы E. Каждый элемент $x\in E$ представим в виде $a^\xi b^\eta c^\zeta$, где $\xi, \eta, \zeta\in\Pi_p$ и однозначно определены. Полагая $\varphi(x)=$ $=a'^\xi b'^\eta c^\zeta$, легко проверим, что $\varphi\in\mathrm{Aut}_Z(E)$ и $\psi=f(\varphi)$. Этим доказана сюрьективность f. Если $p=2$, то $E\cong Q_8$ и, следовательно, $\mathrm{Aut}_Z(E)=\mathrm{Aut}(E)\cong S_4$. Так как, ввиду 1.32, $|\mathrm{Ker} f|=4$, то $|f(\mathrm{Aut}_Z(E)|=\frac{1}{4}|S_4|=6=|\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})|$. Поэтому $(\mathrm{Aut}(E))=\mathrm{Sp}(E): f$ сюрьективен.

1.34. Лемма. *Пусть* $\mathscr{H}<\mathrm{Aut}_Z(E)$, $(|\mathscr{H}|, p)=1$. *Тогда* $\mathfrak{H}=f(\mathscr{H})\cong\mathscr{H}$, *т.е. f определяет вложение* $\mathscr{H}$ в $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$. *Обратно, если* $\mathfrak{H}<\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$ и $(|\mathfrak{H}|, p)=1$, *то* $\mathfrak{H}=f(\mathscr{H})$, *где* $\mathscr{H}<\mathrm{Aut}_Z(E)$, $\mathscr{H}\cong\mathfrak{H}$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из 1.32. Пусть $\mathfrak{H}<\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$, $(|\mathfrak{H}|\, p)=1$. Из 1.33 следует, что $\mathscr{U}/\mathscr{K}\cong\mathfrak{H}$, где $\mathscr{U}=f^{-1}(\mathfrak{H})$, $\mathscr{K}=$ $=\mathrm{Ker} f$. Отсюда вытекает ввиду 1,32, что $\mathscr{K}\in\mathrm{Syl}_p(\mathscr{U})$. Поэтому $\mathscr{U}=\mathscr{K}\cdot\mathscr{H}$, де $\mathscr{H}<\mathrm{Aut}_Z(E)$, $\mathscr{H}\cong\mathfrak{H}$***. Так как $f(\mathscr{H})=f(\mathscr{U})=\mathfrak{H}$, то доказана и вторая часть утверждения.

1.35. Лемма. *Для каждого* $p\in\{2, 3, 5, 7\}$ *существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа* $G(\cong G_p)$ *удовлетворяющая следующим ус-*

---

* В работе находит применение только этот случай. Заметим, что в этом случае $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})=\mathrm{SL}(\mathfrak{F})$.

** Если $x\in E, \lambda=l\,1_{\Pi_p}\in\Pi_p\,(l\in\mathbf{Z})$, то x^λ корректно определяется равенством $x^\lambda=x^l$.

*** Легко видеть, что подгруппа $\mathscr{H}$ определяется подгруппой $\mathfrak{H}$ однозначно, с точностью до сопряженности в $\mathscr{U}$.

ловиям: (I)$G=E\cdot H$ *(полупрямое произведение внутреннее),* $E\cong E_p$, $H\cong H_p$**; (II) $Z(E)\subseteqq Z(G)$ и $C_H(E)=\{1\}$. *В частности,* $G_2\cong \mathrm{SL}(2, 3)$.

Доказательство. Так как $H_p<SL(2,p)=\mathrm{Sp}(2,p)$ и $(|H_p|, p)=1$, то в силу 1.34 существует мономорфизм $\omega_p\colon H_p\to \mathrm{Aut}_Z(E_p)$. Пусть $G_p=E_p\cdot H_p$ — полупрямое произведение групп E_p и H_p, отвечающее мономорфизму ω_p. Тогда $G_p=E\cdot H$, где E и H-образы E_p и H_p при каноническом вложении в G_p и полупрямое произведение внутреннее. Группа G_p, как видно из ее построения, удовлетворяет условиям (I) и (II). Пусть, обратно, для группы G условия (I) и (II) выполнены. Из (II) вытекает существование мономорфизма ω: $H\to \mathrm{Aut}_z(E)$: $\omega(h)(x)=hxh^{-1}$ $(h\in H, x\in E)$. Пусть $\mathfrak{F}=E/Z(E)$. Так как $(|H|, p)=1$, то в силу 1.34 $\gamma=f\circ\omega$ — мономорфизм H в $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$. Отображение γ является точным двумерным линейным Π_p-представлением группы H. Пусть Γ_0 — его матричная реализация в базисе $\{\overline{U}_0, \overline{V}_0\}$ пространства $\mathfrak{F}$. Тогда в силу 1.29 $H_0=\Gamma_0(H)<$ $<SL(2,p)$. Так как $H_0\cong H_p$, то ввиду 1.30 $H_p=S^{-1}H_0S$, где $S\in SL(2,p)$, если $p\neq 2$ и $S\in GL(2,7)$, если $p=7$. Если $\{\bar u, \bar v\}$ — базис $\mathfrak{F}$ связанный с базисом $\{\bar u_0, \bar v_0\}$ матрицей перехода S и Γ — матричная реализция γ в базисе $\{\bar u, \bar v\}$, то $\Gamma(H)=\mathfrak{H}$. Пусть $\{A_i\}_{1\leqq i\leqq k}$ — стандартная система образующих группы H_p, $\{a_i\}_{1\leqq i\leqq k}$ — соответствующая система образующих группы H: $\Gamma(a_i)=A_i (i=1, \ldots, k)$. Полагая $A_i=(\alpha_{rs}^{(i)}1_{\Pi_p})_{1\leqq r,s\leqq 2}$, где $\alpha_{rs}^{(i)}\in\mathbf{Z}$, $0\leqq\alpha_{rs}^{(i)}<p$ $(r, s=1, 2)$ получим (в аддитивных обозначениях): $\gamma(a_i)(\bar u)=\alpha_{11}^{(i)}\bar u+\alpha_{21}^{(i)}\bar v$, $\gamma(a_i)(\bar v)=\alpha_{12}^{(i)}\bar u+\alpha_{22}^{(i)}\bar v$. Так как $Z(E)=\langle c\rangle$, где $c=[u, v]$**, то переход к прообразам дает: $a_iua_i^{-1}=u^{\alpha_{11}^{(i)}}v^{\alpha_{21}^{(i)}}c^{\lambda i}$, $a_iva_i^{-1}=u^{\alpha_{12}^{(i)}}v^{\alpha_{22}^{(i)}}c^{\mu i}$, яде $\lambda_i, \mu_i\in \mathrm{Z}$, $0\leqq\lambda_i, \mu_i<p$. Показатели λ_i, μ_i можно пронормировать (путем изменения системы $\{u, v\}$), так, чтобы они приняли стандартные значения. Это приводит к «стандартной» системе соотношений между образующими $u, v, c, a_1, \ldots, a_k$ группы G. Так как $|G|=|G_p|$, то $G\cong G_p$

Пусть, например, $p=2$. Задав стандартную подгруппу $H_2(\approx C(3))$ группы $SL(2,2)\,(\cong S_3)$ в виде $\langle A\rangle$, где $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, положим $H=\langle h\rangle$. Тогда $huh^{-1}=$ $=vc^\lambda$, $hvh^{-1}=uvc^\mu$, где $\lambda, \mu\in\mathbf{Z}$, $0\leqq\lambda, \mu<2$. Если $u_1=uc^\alpha$, $v_1=vc^\beta (\alpha, \beta\in\mathbf{Z})$, то $[u_1, v_1]=[u, v]=c$ и $hu_1h^{-1}=v_1^{\alpha-\beta+\lambda}$, $hv_1h^{-1}=u_1v_1c^{\alpha+\mu}$. При $\alpha=\mu$, $\beta=\lambda+\mu$ получим (ввиду $c^2=1$): $hu_1h^{-1}=v_1$, $hv_1h^{-1}=u_1v_1$. Таким образом, u и v можно выбрать так, чтобы имело место $\lambda=k=0$. Так как $E\cong Q_8$, то образующие u, v, c, h группы G будут дуволетворять стандартной системе соотношений:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u^4=h^3=c^2=1, \quad u^2=v^2, \quad vuv^{-1}=u^{-1}\\ [u,c]=[v,c]=[h,c]=1, \quad huh^{-1}=v, \quad hvh^{-1}=uv. \end{cases}$$

Так как $|G|=|E|\cdot|H|=8\cdot 3=24$, то $G\cong G_2\cong SL(2,3)$

Аналогичным способом получим стандартные системы соотношений для образующих группы G при $p\in\{3, 5, 7\}$. Если $p=3$, то $H_3=\langle A, B\rangle$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

---

* Группы E_p и H_p здесь считаются стандартными.

** Так как $Z(E)\langle u, v\rangle=Z$ и $\Phi(E)=Z(E)$, то $\langle u, v\rangle=E$, откуда $c=[u, v]\neq 1$. Поэтому $(c)=Z(E)$.

$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $(A, B\in SL(2, 3))$; обозначив через, a, b соответствующие образующие подгруппы H, получим (ввиду $H\cong Q_8$):

$$(1.3)\qquad \begin{cases} u^3=v^3=c^3=1, \quad [u, v]=c,\\ [u, c]=[v, c]=[a, c]=[b, c]=1,\\ a^4=1, \quad a^2=b^2, \quad bab^{-1}=a^{-1},\\ aua^{-1}=v, \quad ava^{-1}=u^{-1}, \quad bub^{-1}=uvc, \quad bvb^{-1}=uv^{-1}c^{-1}. \end{cases}$$

Если $p=5$, то $H_5=\langle A, B, D\rangle$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $(A, B, D\in \in SL(2, 5))$. Если a, b, d — соответствующие образующие подгруппы H, то (ввиду $H\cong SL(2, 3)$):

$$(1.4)\qquad \begin{cases} u^5=v^5=c^5=1, \quad [u, v]=c,\\ [u, c]=[v, c]=[a, c]=[b, c]=[d, c]=1,\\ a^4=d^3=1, \quad a^2=b^2, \quad bab^{-1}=a^{-1}, \quad dad^{-1}=b, \quad dbd^{-1}=ab,\\ aua^{-1}=v^{-1}, \quad ava^{-1}=u, \quad bub^{-1}=u^2, \quad bvb^{-1}=v^{-2},\\ dud^{-1}=u^{-2}v^{-2}c^{-2}, \quad dvd^{-1}=u^{-1}vc^{-2}. \end{cases}$$

Если $p=7$, то $H_7=\langle A, B\rangle$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ $(A, B\in SL(2, 7))$. Соответствующие образующие a, b подгруппы H удовлетворяют соотношениям $a^8=b^4==(ab)^3=1$. Стандартная система соотношений между образующими u, v, c, а, b группы G будет следующая:

$$(1.5)\qquad \begin{cases} u^7=v^7=c^7=1, \quad [u, v]=c,\\ a^8=b^4=(ab)^3=1,\\ [u, c]=[v, c]=[a, c]=[b, c]=1,\\ aua^{-1}=v, \quad ava^{-1}=u^{-1}v^3,\\ bub^{-1}=v^3c^2, \quad bvb^{-1}=u^2c^{-2}. \end{cases}$$

§ 2. DS-группы 1-го рода отличные от своего коммутанта

Установим сначала ряд общих свойств DS-групп. Пусть $\{G, x\}$ — произвольная DS-группа. Утверждения 2.1 и 2.2 непосредственно вытекают из определения DS-групп; 2.3 вытекает из точности χ и 1.7.

2.1. Предложение. *Если* $g\in T_\chi$, *то* $|T_\chi|\cdot|C_G(g)|=|G|$.

2.2. Предложение. *Если* $N\lhd G$, $N\cap T_\chi\neq\emptyset$, *то* $T_\chi\subset N_\chi$ *и следовательно,* $N\supseteqq N_\chi$.

2.3. Предложение. $Z(G)=Z(N_\chi)$.

Из 2.2 *и* 1.20 *вытекают аредложения* 2.4 *и* 2.5.

2.4. Предложение. *Все главные ряды* DS*-группы* $\{G, x\}$ *проходят через* N_χ.

2.5. Предложение. *N_χ покрывает* максимальные не содержащие нулей характера χ нормальные подгруппы группы G.*

2.6. Предложение. *Подгруппа N_χ неразложима в прямое произведение нетривиальных нормальных подгрупп группы G.*

Доказательство. Пусть $N_\chi = L_1 \times L_2$, где $L_i \lhd G$, $L_i \neq \{1\}$ $(i=1, 2)$. В силу 1.2 $\Theta = \chi_{N_\chi} \in \mathrm{Irr}(N_\chi)$. Как известно [2], Θ — внешнее тензорное произведение $\Theta_1 \# \Theta_2$ характеров $\Theta_i \in \mathrm{Irr}(L_i)$ $(i=1, 2)$. Если $g = g_1 g_2$ $(g_i \in L_i$ $(i=1, 2))$, то $\chi(g) = \Theta_1(g_1)\Theta_2(g_2)$. В частности, если $g \in T_\chi$, то $\Theta_1(g_1)\Theta_2(g_2) = 0$. Если, например, $\Theta_1(g_1) = 0$, то $\chi(g_1) = \Theta_1(g_1)\Theta_2(1) = 0$. Поэтому $g_1 \in T_\chi$, откуда, в силу 2.2, $N_\chi \subseteqq L_1$, что невозможно, так как $L_1 \subset N_\chi$.

2.7. Следствие. *Если N_χ нильпотентна, то N_χ — p-группа.*

Применим полученные результаты к DS-группам 1-го рода.

2.8. Теорема.** Если $\{G, \chi\}$ — DS-группа 1-го рода и $G \neq G'$, то $G \cong D_m$ (m нечетно).

Доказательство. Пусть M-максимальная нормальная подгруппа группы G содержащая G'. Тогда $G/M \cong C(p)$. Так как $N_\chi = G$, то ввиду 2.2 $M \cap T_\chi = \emptyset$, откуда, в силу 1.22 и неабелевости G, $Z(G) \subset M$. Так как $M \cap T_\chi = \emptyset$, то в силу 1.21 χ индуцируется из M, откуда, виду 1,11, $G \setminus M \subseteqq T_\chi$. Так как $M \cap T_\chi = \emptyset$, $G \setminus M = T_\chi$. Поэтому $|T_\chi| = |G| - |M| = |M|(p-1)$. Учитывая 2.1., отсюда получаем для любого $g \in G \setminus M = T_\chi$: $(p-1)|C_G(g)| = p$. Следовательно, $p=2$ и $C_G(g) = \{1, g\}$. Отсюда легко следует, что $x \in M^\#$ влечет $C_G(x) \subseteqq M$. Поэтому G — группа Фробениуса с ядром M. Так как $(G: M) = 2$, то M — абелева группа нечетного порядка. Поскольку элементы из M инвертируются инволюциями группы G, то подгруппы, входящие в M нормальны в G. Так как $Sc(G) \subseteqq N$***, отсюда следует, что $Sc(M) = Sc(G)$. Так как χ точен, то в силу теоремы Гашюца [6, 12] $Sc(G)$ порождается некоторым G-классом, откуда легко вытекает цикличность $Sc(G)$. Поскольку цоколь абелевой группы M цикличен, то и M циклична: $M = \langle a \rangle$. Если $b \in G \setminus M$, то $b^2 = 1$ и $b^{-1}ab = a^{-1}$. Следовательно, $G \cong D_m$ $(m = |M|$ нечетно).

2.9. Следствие. *Нильпотентные DS-группы не существуют.*

Доказательство. Вытекает из 1.13 и 2.8****

---

* Пусть $N_1, N_2 \lhd G$; N_2 покрывает, N_1 если $N_1 \subset N_2$ и N_2/N_1 — главный фактор группы G.

** В [16] дано другое доказательство этой теоремы.

*** Цоколь группы Фробениуса содержится в ее ядре.

**** Другое доказательство этого факта использует 1.9.

§ 3. DS-группы 2-го рода и 1-го типа

Пусть $\{G, x\}$ — DS-группа 2-го рода и 1-го типа, для которой $N'_\chi \neq N_\chi$.

3.1. Предложение. *Имеют место следующие утверждения:* (I) N_χ — *экстраспециальная p-группа:* $N_\chi \cong Q_8$ *и* $G \cong SL(2, 3)$, *если* $p=2$; $N_\chi \cong E(p^{2\mu+1})$ $(\mu \geqq 1)$, *если* $p \neq 2$; (II) $\chi(1)=p^\mu$; (III) $G=N_\chi \cdot H$, где $H<G$, $|H|=p^{2\mu}-1$, $C_H(N_\chi)=\{1\}$; (IV) $T_\chi=N_\chi \setminus Z(G)=N_\chi \setminus Z(N_\chi)$; (V) $|C_G(g)|=p^{2\mu}$ для любого $g \in T_\chi$.

Доказательство. Так как χ точен, то $Z(G)$ цикличен. В силу 2.3 $Z(G) \subset N_\chi$ откуда следует, ввиду 2,5, что N_χ покрывает $Z(G)$. Если $M \lhd G$ и N_χ покрывает M, то в силу 1.22 $Z(G) \subseteqq M \subset N_\chi$, откуда $M=Z(G)$. Отсюда и из 2.4 вытекает, что все главные ряды группы G проходят через N_χ и $Z(G)_\chi (=Z(N'_\chi))$. Так как $N'_\chi \subset N_\chi$ и $N'_\chi \lhd G$, отсюда следует, что $N'_\chi \subseteqq Z(N_\chi)$. Поэтому главный фактор $N_\chi/Z(N_\chi)$ группы G является элементарной абелевой группой; следовательно, $|N_\chi/Z(N_\chi)|=p^\nu$, где p — простое число и $\nu>0$. Подгруппа N_χ поэтому нильпотентная класса нильпотентности 2, откуда вытекает, ввиду 2.7, что N_χ — p-группа. Следовательно, в силу 1.2 (1), $\chi(1)=p^\mu$, где $\mu \geqq 1$. Отсюда следует, ввиду 1.9, что $N_\chi \in \mathrm{Syl}_p(G)$. В силу теоремы Шура — Цассенхауза

$$G = N_\chi \cdot H \tag{3.1}$$

где H — p'-подгруппа группы G. Из 3.1 и 1.4 вытекает, что $C_H(N_\chi)=\{1\}$. Применяя 1.26 к точному неприводимому характеру $\Theta=\chi_{N_\chi}$ p-группы N_χ найдем, чть $T_\Theta=N_\chi \setminus Z(N_\chi)$ и $\Theta(1)^2=|N_\chi/Z(N_\chi)|=p^\nu$. Так как $\Theta(1)=\chi(1)=p^\mu$, то $\nu=2\mu$. Таким образом, (поскольку $T_\Theta=T_\chi$)

$$x(1) = p^\mu \tag{3.2}$$

$$|N_\chi/Z(G)| = p^{2\mu} \tag{3.3}$$

$$T_\chi = N_\chi \setminus Z(G). \tag{3.4}$$

Из (3.4) и (3.3) вытекает, что $|T_\chi|=|N_\chi|-|Z(G)|=|Z(G)|(p^{2\mu}-1)$. Отсюда с помощью 2.1, (3.1) и (3.3) получаем для любого $g \in T_\chi: (p^{2\mu}-1)|C_G(g)|=p^{2\mu}|H|$. Следовательно, $|C_G(g)|=p^{2\mu}m$, $|H|=(p^{2\mu}-1)m$, где m — натуральное число. Так как H — p'-подгруппа, то $(m, p)=1$. С другой стороны, в силу 1.4 $C_G(g)$ — p-группа. Поэтому $m=1$ и, следовательно,

$$|C_G(g)| = p^{2\mu} \tag{3.5}$$

$$|H| = p^{2\mu}-1. \tag{3.6}$$

Так как T_χ — G-класс, то все элементы $g \in T_\chi$ имеют один и тот же порядок p^σ, где (ввиду (3.5)) $\sigma \leqq 2\mu$. Рассмотрим две возможности: $\sigma>1$ и $\sigma=1$.

Случай 1: $\sigma>1$.

Так как $N_\chi=Z(G) \cup T_\chi$ и $Z(G)$ — циклическая p-группа, то N_χ содержит единственную подгруппу порядка p, откуда, ввиду нецикличности N_χ, вытекает, что N_χ — обобщенная группа кватернионов*. Поэтому $p=2$ и $|Z(G)|=$

* [8] Kap III. Satz 8.2.

$=|Z(N_\chi)|=2$. Так как $N_\chi/Z(N_\chi)$ — абелева группа, то $N_\chi \cong Q_8$* и, следовательно, $\mu=1$. В силу (3.2) и (3.6) $\chi(1)=2$. $|H|=3$, т. е. $H\cong C(3)$. Учитывая (3.1) и замечая, что $N_\chi \cong E_2$, $H\cong H_2$, $Z(N_\chi)=Z(G)$, $C_H(N_\chi)=\{1\}$, с помощью 1.35 $(p=2,\ E=N_\chi)$ убеждаемся в том, что $G\cong SL(2, 3)$.

Случай 2: $\sigma=1$

Так как $Z(G)$ цикличен, то $Z(G)=\langle c\rangle$. Если $g\in T_\chi$, то и $cg\in T_\chi$, откуда (ввиду $\sigma=1$) $|cg|=|g|=p$. Поэтому $c^p=1$, $|Z(G)|=p$. Так как $N_\chi/Z(G)$ — элементарная абелева p-группа и $Z(G)=Z(N_\chi)$, то N_χ — экстраспециальная p-группа. Из (3.4) и условия $\sigma=1$ следует, что $\exp N_\chi=p$. Ввиду неабелевости N_χ, $p\neq 2$ и в силу (3.3) $N_\chi\cong E(p^{2\mu+1})$.

В дальнейшем предполагается, что $p\neq 2$ (т. е. $\sigma=1$). Для выяснения строения подгруппы H рассмотрим группу $\mathfrak{G}=G/Z(G)$. Так как N_χ покрывает $Z(G)$, то $\mathfrak{G}$ имеет минимальную нормальную подгруппу $\mathfrak{F}=N_\chi/Z(G)$ (являющуюся элементарной абелевой группой порядка $p^{2\mu}$). Ввиду (3.1) и (3.6)

$$(3.7)\qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}\cdot\mathfrak{H},\quad |\mathfrak{G}| = p^{2\mu}(p^{2\mu}-1)$$

где $\mathfrak{H}\cong H$ — образ H при естественном гомоморфизме $x\mapsto\bar{x}$ группы G на $\mathfrak{G}$.

3.2. Предложение. $\mathfrak{G}$ — *дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром Фробениуса* $\mathfrak{F}$**.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}=\overline{N}_\chi$ и $N_\chi=Z(G)\cup T_\chi$, $Z(G)\cap T_\chi=\emptyset$, то $\mathfrak{F}^\#=\overline{T}_\chi$. Поскольку T_χ— G-класс, то $\mathfrak{F}^\#$ $\mathfrak{G}$-класс. Поэтому из $\bar{x}\in\mathfrak{F}^\#$ в силу (3.7) следует $|C_\mathfrak{G}(\bar{x})|=|\mathfrak{G}|/|\mathfrak{F}^\#|=p^{2\mu}$. Так как $C_\mathfrak{G}(\bar{x})\supseteq\mathfrak{F}$ и $|\mathfrak{F}|=p^{2\mu}$, отсюда вытекает, что $C_\mathfrak{G}(\bar{x})=\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ — группа Фробениуса с ядром Фробениуса $\mathfrak{F}$. Так как $|\mathfrak{H}|=p^{2\mu}-1=|\mathfrak{F}|-1$, то $\mathfrak{G}$ — дважды транзитивная группа Фробениуса.

3.3 Следствие. $H(\cong\mathfrak{H})$ *является группой без неподвижных точек и, следовательно (ввиду четности* $|H|=p^{2\mu}-1$), *содержит единственную инволюцию.*

3.4. Следствие. *Силовские подгруппы группы H либо цикличны, либо являются обобщенными группами кватернионов. Если, в частности, силовские 2-подгруппы группы H уикличны, то H метациклична.*

3.5. Предложение. *Пусть* $\omega(h)$ — *автоморфизм* N_χ, *порожденный элементом* $h\in H: \omega(h)(x)=hxh^{-1}$ $(x\in N_\chi)$. *Отображение* $f\cdot\omega$ *(f-канонический гомоморфизм* $\mathrm{Aut}_z(N_\chi)$ *в* $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$ *введенный в* 1.31 $(E=N_\chi)$) *является мономорфизмом H в* $\mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Из $Z(N_\chi)=Z(G)$ следует, что $\omega\in\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}_z(N_\chi))$. В силу 3.1 (III) $\mathrm{Ker}\,\omega=C_H(N_\chi)=\{1\}$. Иньективность гомоморфизма $f\cdot\omega$ вытекает поэтому из $(|H|, p)=1$ и 1.32.

3.6. Следствие. H изоморфна подгруппе порядка $p^{2\mu}-1$ группы $Sp(2\mu, p)$.

---

* В противном случае N_χ — группа диэдра.

** Абстрактная группа Фробениуса называется дважды транзитивной, если она изоморфна дважды транзитивной подстановочной группе Фробениуса.

Начиная с этого момента будем считать группу G разрешимой (условие $N'_\chi \neq N_\chi$ при этом выполняется автоматически).

3.7. Предложение.* *Если $\{G, x\}$ — разрешимая DS-группа 2-го рода и 1-го типа, то* (I) $\chi_H=\vartheta_1+\vartheta_2$, *где* $\vartheta_i\in \operatorname{Irr}(H)$ $(i=1, 2)$. $\vartheta_1(1)=\dfrac{p^\mu+1}{2}$, $\vartheta_2(1)=\dfrac{p^\mu-1}{2}$; *подгруппа H неабелева;* (II) $\dfrac{p^\mu+1}{2}$ *— максимальная степень неприводимых характеров подгруппы H; ϑ_1 — единственный ее неприводимый характер степени $\dfrac{p^\mu+1}{2}$. Число s ее неприводимых характеров степени $\dfrac{p^\mu-1}{2}$. уловлетворяет неравентсвам $2\leqq s\leqq 4$;* (III) $H\setminus H'\subseteq T_{\vartheta_1}$, $N_{\vartheta_2}\subseteq H'$, $(\vartheta_2)_{H'}\in \operatorname{Irr}(H')$; (IV) $|H/H'|\leqq s$ и, *следовательно,* $2\leqq|H/H'|\leqq 4$; (V) $Z(H)=Z(\vartheta_2)=\langle j\rangle$, где j — *инволюция подгруппы H;* (VI) $j\in H'$.

Доказательство. Полагая $\chi_H=\sum_{i=1}^{k} m_i\vartheta_i$, где $\vartheta_i\in \operatorname{Irr}(H)$, m_i — целое $\geqq 1$ $(i=1, \dots, k)$, получим: $\sum_{x\in H}|\chi(x)|^2=|H|\sum_{i=1}^{k} m_i^2$. Так как $H^*\subset \Delta_\chi$, то в силу 1.2 $\sum_{x\in H}|\chi(x)|^2=\chi(1)^2+|H|-1$, откуда, ввиду (3.2) и (3.6) $\sum_{x\in H}|\chi(x)|^2=2|H|$. Поэтому $\sum_{i=1}^{k} m_i^2=2$, откуда $k=2$, $m_1=m_2=1$. Таким образом, $\chi_H=\vartheta_1+\vartheta_2$. Из (3.2) и (1.2) следует, что

$$\vartheta_1(1)+\vartheta_2(1)=p^\mu \tag{3.8}$$

$$|\vartheta_1(x)+\vartheta_2(x)|=1 \quad \text{для любого} \quad x\in H^* \tag{3.9}$$

Если j — инволюция из H, то $j\in Z(H)$ и, следовательно, $\vartheta_1(j)=\pm\vartheta_1(1)$, $\vartheta_1(j)=\pm\vartheta_2(1)$, откуда, ввиду (3.9) $|\vartheta_1(1)-\vartheta_2(1)|=1$. Считая $\vartheta_1(1)>\vartheta_2(1)$, получим $\vartheta_1(1)-\vartheta_2(1)=1$, откуда в силу (3.8)

$$\vartheta_1(1)=\frac{p^\mu+1}{2}, \quad \vartheta_2(1)=\frac{p^\mu-1}{2}. \tag{3.10}$$

Так как $p\geqq 3$, то $\vartheta_1(1)\geqq 2$; поэтому подгруппа H неабелева. Этим доказано утверждение (I).

Пусть r — число неприводимых характеров подгруппы H имеющих степень $\dfrac{p^\mu+1}{2}$, s — число ее неприводимых характеров степени $\dfrac{p^\mu-1}{2}$. Так как $\sum_{\vartheta\in \operatorname{Irr}(H)}\vartheta(1)^2=|H|=p^{2\mu}-1$, то

$$\tau\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2+s\left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2\leqq p^{2\mu}-1. \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекает, что при $r\geqq 2$, $s\geqq 2$, $p^{2\mu}-1\geqq 2\left(\dfrac{p^\mu+1}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{p^\mu-1}{2}\right)^2=p^{2\mu}+1$. Поэтому одно из чисел r, s равно 1. Если $s=1$, то $\lambda\vartheta_2=\vartheta_2$ для любого $\lambda\in$

* В дальнейшем сохраняются обозначения принятые в 3.1. и предполагается $p\neq 2$.

$\in \mathrm{Lin}(H)$, откуда $H \setminus H' \subseteq T_{\vartheta_2}$. Ввиду (3.9) отсюда вытекает, что $T_{\vartheta_1} \subseteq H'$ и, следовательно, $N_{\vartheta_1} \subseteq H'$. Так как $j \in Z(H) \subset N_{\vartheta_1}$, то $j \in Z(H')$. Далее, из $N_{\vartheta_1} \subseteq H'$ в силу 1.2 следует, что $\varphi = (\vartheta_1)_{H'} \in \mathrm{Irr}(H')$, откуда вытекает в силу 1.25, что $\vartheta_1(1)^2 = \varphi(1)^2 \leqq |H' / \langle j \rangle| \leqq \frac{1}{4}|H| = \frac{p^{2\mu}-1}{4}$. Следовательно, снова $p^{2\mu}+$ $+1 \leqq p^{2\mu}-1$. Таким образом, случай $s=1$ невозможен. Поэтому $r=1$, $s \geqq 2$. Пусть $\Theta \in \mathrm{Irr}(H)$, $\Theta(1) > \vartheta_1(1)$. Тогда $\Theta(1)^2 + \vartheta_1(1)^2 + s\vartheta_2(1)^2 \leqq |H|$, откуда, ввиду (3.6) и (3.10), $p^{2\mu}+1 = 2\vartheta_1(1)^2 + 2\vartheta_2(1)^2 < \Theta(1)^2 + \vartheta_1(1)^2 + s\vartheta^2(1)^2 \leqq p^{2\mu}-1$ — противоречие. Таким образом, $\frac{p^\mu+1}{2}$ — наибольшая степень неприводимых характеров подгруппы H. Так как $r=1$, то ввиду (3.11) $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2 + s\left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2 < p^{2\mu}$, откуда (так как $p \geqq 3$) $s-1 < 2\,\frac{p^\mu+1}{p^\mu-1} \leqq 4$. Следовательно,

$$2 \leqq s \leqq 4 \tag{3.12}$$

Тем самым, доказано (II).

Ввиду $r=1$, для любого $\lambda \in \mathrm{Lin}(H)$ имеет место $\lambda\vartheta_1 = \vartheta_1$. Поэтому $H \setminus H' \subseteq T_{\vartheta_1}$, откуда, ввиду (3.9), $T_{\vartheta_2} \subseteq H'$ и $N_{\vartheta_2} \subseteq H'$. В силу 1.2 $(\vartheta_2)_{H'} \in \mathrm{Irr}(H')$ Этим доказано (III).

Для доказательства (IV) заметим, что $T_{\vartheta_2} \subseteq H'$ влечет инъективность отображения $\lambda \mapsto \lambda\vartheta_2 (\lambda \in \mathrm{Lin}(H))$ множества $\mathrm{Lin}(H)$ в множество $\{\vartheta \in \mathrm{Irr}(H) | \vartheta(1) =$ $= \vartheta_2(1)\}$. Поэтому $|H / H'| = |\mathrm{Lin}(H)| \leqq s$, откуда в силу (3.12)

$$2 \leqq |H/H'| \leqq 4 \tag{3.13}$$

Так как $j \in Z(H) \subseteq Z(\vartheta_1)$, то $|Z(\vartheta_1)|$ четно. Полагая $|Z(\vartheta_1)| = 2k (k \in \mathbf{Z})$ в силу 1.25 получим $\vartheta_1(1)^2 \leqq |H / Z(\vartheta_1)|$, откуда $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2 \leqq \frac{p^{2\mu}-1}{2k}$. Следовательно, $p^{2\mu}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4}\right) \geqq \frac{1+2p^\mu}{4} + \frac{1}{2k} > 0$. Поэтому $k=1$ и, следовательно, $|Z(\vartheta_1)| = 2$, откуда $Z(\vartheta_1) = Z(H) = \langle j \rangle$. Этим доказано (V). Так как $j \in Z(H)$ и в силу 1.7 $Z(H) \subset N_{\vartheta_2}$, то ввиду (III) $j \in H'$. Тем самым доказано (VI).

Рассмотрим теперь в отдельности каждый из трех возможных случаев $|H / H'| = 2, 3, 4$.

3.8. Предложение. Если $|H / H'| = 2$, то $H / \langle j \rangle \cong S_4$, $p=7$, $\mu=1$, $H \cong H_7$, $N_\chi \cong E_7$.

Доказательство. Так как H разрешима и $|H / H'| = 2$, то H' — единственная максимальная нормальная подгруппа в H. Силовская 2-подгруппа S группы H нециклична: цикличность S в силу 3.4 влечет цикличность H'; но тогда в силу 3.7 (III) $\frac{p^\mu-1}{2} = \vartheta_2(1) = 1$, откуда $p=3$, $\mu=1$, $|H| = 3^2-1 = 8$; следовательно, ввиду 3.3, $H \cong Q_8$, $|H / H'| = 4$ — противоречие*. Таким образом, S — обоб-

* Противоречие содержится уже в равенстве $|H| = 8$, из которого следует, что $H = S$ циклична, вопреки 3.5 (I).

щенная группа кватернионов. Так как S содержит циклическую подгруппу индекса 2, то в силу 1.27 H содержит нормальную подгруппу N, все силовские подгруппы которой цикличны, причем H/N изоморфна одной из групп $C(2)$, A_4, S_4. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Случай 1: $H/N \cong C(2)$.

Так как в этом случае $N=H'$, то все силовские подгруппы группы H', а потому и группы $H'/\langle j\rangle$ цикличны. Поэтому ([8] Kap V, Satz 25.3) группа $H'/\langle j\rangle$ имеет тривиальный мультипликатор. Все неприводимые проективные представления группы $H'/\langle j\rangle$ поэтому ассоциированы линейным представлениям*. Характер $(\vartheta_1)_{H'}$, ввиду цикличности H/H' неразветвлен. Если $(\vartheta_1)_{H'}$ неприводим, то в силу 1.25 $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2=\vartheta_1(1)^2\leqq|H'/\langle j\rangle|=\frac{|H|}{4}=\frac{p^{2\mu}-1}{4}$, откуда $p^\mu+ +1\leqq p^\mu-1$ — противоречие. Таким образом, $(\vartheta_1)_{H'}$, приводим. Так как $|H/H'|=2$, то $(\vartheta_1)_{H'}=\varphi+\varphi'$, где $\varphi, \varphi'\in\mathrm{Irr}(H')$, $\varphi(1)=\varphi'(1)=\frac{1}{2}\vartheta_1(1)=\frac{p^\mu+1}{4}$. Наряду с неприводимым характером φ степени $\frac{1}{2}\vartheta_1(1)$ группа H' имеет, ввиду 3.7 (III), неприводимый характер $(\vartheta_2)_{H'}$ степени $\vartheta_2(1)=\frac{p^\mu-1}{2}$. Равенство $\frac{1}{2}\vartheta_1(1)=\vartheta_2(1)$ влечет $p=3$, $\mu=1$, что, как было показано выше, невозможно. Таким образом, $\frac{1}{2}\vartheta_1(1)\neq\vartheta_2(1)$. В силу 1.24 группа $H'/\langle j\rangle$ обладает неприводимыми проективными, а потому и неприводимыми линейными представлениями степеней $\varphi(1)=\frac{1}{2}\vartheta_1(1)$ и $\vartheta_2(1)$. Ввиду $\frac{1}{2}\vartheta_1(1)\neq\vartheta_2(1)$ отсюда вытекает, что $\left(\frac{1}{2}\vartheta_1(1)\right)^2+\vartheta_2(1)^2\leqq|H'/\langle j\rangle|$; поэтому $\left(\frac{p^\mu+1}{4}\right)^2+\left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2\leqq\frac{p^{2\mu}-1}{4}$, откуда $(p^\mu-3)^2\leqq 0$, что снова приводит к противоречию $p=3$, $\mu=1$. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 2: $H/N\cong A_4$.

Так как $N\lhd H$, $N\neq H$, то $N\subseteq H'$**. Поскольку $(H/N)/(H'/N)\cong H/H'\cong C(2)$, то A_4 содержит подгруппу индекса 2 — противоречие. Слевовательно, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 3: $H/N\cong S_4$.

Как в выше, $N\subseteq H'$. Так как $(H/N:H'/N)=2$, то $H'/N\cong A_4$. Следовательно, H содержит такую нормальную прдгруппу V, что $N<V<H'$, $V/N\cong V_4$***, $H'/V\cong C(3)$. Рассмотрим характер $\tilde{\vartheta}_2=(\vartheta_2)_{H'}$. В силу 3.7 (III) $\tilde{\vartheta}_2\in\mathrm{Irr}(H')$.

---

* т. е. переходят в линейные представления после умножения на некоторую функцию $\lambda\colon H'/\langle j\rangle\to\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

** H' — единственная максимальная нормальная подргуппа группы.

*** V_4 — четверная группа Клейна.

Докажем, что $\tilde{\vartheta}_2(1)\ (=\vartheta_2(1))$ нечетно. Допустим, что $2|\vartheta_2(1)$. Так как в силу 3.7 (III) $N_{\vartheta_2}\subseteqq H'$, то применяя 1.10 к H и $\vartheta_2\in\mathrm{Irr}(H)$, найдем, что все силовские 2-подгруппы группы H содержатся в H', что невозможно, ввиду $|H/H'|=2$. Таким образом $2\nmid\tilde{\vartheta}_2(1)$. Пусть τ — неприводимая компонента характера $(\tilde{\vartheta}_2)_V=(\vartheta_2)_V$. Так как $H'/V\cong C(3)$, то характер $(\tilde{\vartheta}_2)_V$ неразветвлен и поэтому возможны лишь два случая: 1) $(\tilde{\vartheta}_2)_V=\tau$; 2) $(\tilde{\vartheta}_2)_V=\tau+\tau'+\tau''$, где τ' и τ'' — характеры подгруппы V H'-сопряженные с τ и отличные от τ и друг от друга. Так как $\tau(1)=\frac{1}{m}\vartheta_2(1)(m=1$ или $3)$, $\tau(1)$ нечетно. Индекс ветвления e характера τ_N может быть равен лишь 1 или 2. Действительно, как известно [2], e равно степени неприводимого проективного представления группы I_σ/N, где σ — неприводимая компонента τ_N. Так как $N\leqq I_\sigma\leqq V$, то $|I_\sigma/N|\leqq 4$ и, следовательно, в силу 1.23 $e\leqq 2$. Ввиду нечетности $\tau(1)$, $e=1$. Таким образом, характер τ_N неразветвлен: $\tau_N=\sigma_1+\ldots+\sigma_l$, где σ_i — характеры N V-сопряженные с $\sigma=\sigma_1$, $l=(V:I_\sigma)$. Так как $N\leqq I_\sigma\leqq V$, то $l|4$, откуда вытекает, ввиду $l|\tau(1)$ и нечетности $\tau(1)$, что $l=1$. Таким образом, $\tau_N\in\mathrm{Irr}(N)$. Легко видеть, что $|N|$ четно: в противном случае, ввиду $H/N\cong S_4$, подгруппа S была бы изоморфна силовской 2-подгруппе P группы S_4, что невозможно, так как S-обобщенная группа кватернионов, а $P\cong D_4$. Из четности $|N|$ вытекает, что $j\in N$ и, следовательно, $j\in Z(N)$. Так как $\tau_N\in\mathrm{Irr}(N)$, отсюда в силу 1.25 вытекает, что $\tau(1)^2\leqq|N/\langle j\rangle|=\frac{1}{48}|H|$. Так как $\tau(1)=\frac{1}{m}\vartheta_2(1)$ $(m=1$ или $3)$, то ввиду (3.10) $\frac{(p^\mu-1)^2}{4m^2}\leqq\frac{p^{2\mu}=1}{48}$. Поэтому $\frac{p^\mu+1}{p^\mu-1}\geqq\frac{12}{m^2}\geqq\frac{4}{3}$, откуда $p^\mu\leqq 7$. Следовательно, $\mu=1$ и $p=3$, 5 или 7. Случай $p=3$. как мы уже знаем, невозможен. Если $p=5$, то $|H|=5^2-1=24$, откуда $|N|=1$, что противоречит четности $|N|$. Таким образом, $p=7$. В силу (3.6) $|H|=7^2-1=48$. Следовательно, $N=\langle j\rangle$ и $H/\langle j\rangle\cong S_4$. Ввиду 3.1 $N_\chi\cong E(7^3)\cong E_7$. Из 3.6 и 1.29 следует, что $H\cong H_7$.

3.9. Предложение. *Если* $|H/H'|=3$, *то* $p=5$, $\mu=1$, $H\cong H_5(\cong SL(2,3))$, $N_\chi\cong E_5$.

Доказательство. Так как $(\vartheta_2)_{H'}\in\mathrm{Irr}(H')$ и $\langle j\rangle\subseteqq Z(H')$, то в силу 1.25 $\vartheta_2(1)^2\leqq|H'\langle j\rangle|=\frac{1}{6}|H|$, откуда $\frac{p^\mu+1}{p^\mu-1}\geqq\frac{3}{2}$. Поэтому $p^\mu\leqq 5$ и, следовательно, $\mu=1$, $p=3$ или 5. Так как $3/|H|$ и $|H|=p^2-1$, то $p=5$ и $|H|=24$, $|H'|=8$. Ввиду 3.1 $N_\chi\cong E(5^3)\cong E_5$. Так как $|H|=24$, то из 3.6 и 1.29 следует, что $H\cong H_5$.

3.10. Предложение. *Если* $|H/H'|=4$, *то* $p=3$, $\mu=1$, $H\cong H_3(\cong Q_8)$, $N_\chi\cong E_3$.

Доказательство. Так как $(\vartheta_2)_{H'}\in\mathrm{Irr}(H')$ и $\langle j\rangle\subseteqq Z(H')$, то в силу 1.25 $\vartheta_2(1)^2\leqq|H'/\langle j\rangle|=\frac{1}{8}|H|$. Поэтому $\left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2\leqq\frac{p^{2\mu}-1}{8}$, откуда $p^\mu\leqq 3$. Следовательно, $\mu=1$, $p=3$, $|H|=3^2-1=8$. В силу 3.1. $N_\chi\cong E(3^3)\cong E_3$. Из 3.6 и 1.25 следует что $H\cong H_3(\cong Q_8)$.

Объединяя утверждения 3,1, 3.8—3.10, получаем:

3.11. Предложение. *Если* $\{G, \chi\}$ *— разрешимая DS-группа 2-го рода 1-го типа, то* (I) $G=N_\chi \cdot H$, *где* $N_\chi \cong E_p$, $H \cong H_p$, $p\in\{2, 3, 5, 7\}$; (II) H *действует сопряжениями тривиально на* $Z(N_\chi)(=Z(G))$ *и* $C_H(N_\chi)=\{1\}$; (III) *Характер* χ *является продолжением точного неприводимого характера подгруппы* N_χ; $\chi(1)=p$.

3.12. Следствие. *Если* $\{G, \chi\}$ *— разрешимая DS-группа 2-го рода 1-го типа, то* G *изоморфна одной из четырех групп* G_p $(p\in\{2, 3, 5, 7\})$ *описываемых леммой* 1.35.

3.13. Предложение. *Группы* $G_p(\{p\in 2, 3, 5, 7\})$ *является носителями DS-групп 2-го рода и 2-го типа: группа* G_p *обладает* $v_p=(p-1)|H_p/H'_p|$ *DS-характерами, все они 2-го рода и 1-го типа* ($v_2=3$, $v_3=8$, $v_5=v_7=12$); G_2 и G_5 — носители D-групп.

Доказательство.* Согласно 1.35, $G_p=E\cdot H$, где $E\cong E_p$, $H\cong H_p$. Так как точные неприводимые характеры подгруппы E обращаются на $E\setminus Z(E)$ в нуль и $Z(E)\subseteq Z(G_p)$, то все они G_p-инвариантны. Так как $G_p/E\cong H_p$ — группа без неподвижных точек, то мультипликатор G_p/E тривиален. Поэтому все G_p-инвариантные неприводимые характеры подгруппы E продолжаемы на группу G_p**. Пусть $\Theta\in\mathrm{Irr}(E)$ и χ — продолжение Θ на G_p. Доказывается, что $\chi_H=\vartheta_1+\vartheta_2$, где $\vartheta_i\in\mathrm{Irr}(H)$ $(i=1, 2)$, $\vartheta_1\neq\vartheta_2$. Это позволяет доказать, что $T_\chi\cap H=\emptyset$. Отсюда следует, что $T_\chi=E\setminus Z(E)$. Действительно, $T_\chi\supseteq T_\Theta= =E\setminus Z(E)$. С другой стороны, если $u\in\Delta=G_p\setminus E$, то u сопряжен с hz, где $h\in H$, $z\in Z(E)$. Поэтому $\chi(u)=\chi(hz)=\varepsilon\chi(h)\neq 0$ (ε-корень из 1). Следовательно, $T_\chi\cap\Delta=\emptyset$, откуда $T_\chi=E\setminus Z(E)$. Далее, проверяется, что T_χ — G_p-класс. Поэтому χ — DS-характер 2-го рода (и, очевидно, 1-го типа) группы G_p. Так как каждый характер Θ допускает $|H/H'|$ продолжений, а группа $E(\cong E_p)$ имеет ровно $p-1$ точных неприводимых характеров***, то группа G_p имеет $(p-1)|H_p/H'_p|$ DS-характеров 2-го рода и 1-го типа. Других DS-характеров группа G_p не имеет.

Из 3.12 и 3.13 вытекает следующий основной результат.

3.14. Теорема. *Носителями разрешимых DS-групп 2-го рода и 1-го типа являются группы* $G_p(p=2, 3, 5, 7)$ *и только они.*

Литература

[1] W. Burnside, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its applications to group characteristics. *Proc. Lond. Math. Soc.* (**2**) (1904), 112—116.
[2] Ch. W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras. *New York—London* 1962.
[3] L. Dornhoff, Group Representation Theory. *New York*, 1971.
[4] R. Frucht, Über die Darstellung endlicher abelscher Gruppen durch Kollineationen. *J. Reine Angew. Math.* **166** (1932), 16—29.
[5] P. X. Gallagher, Zeros of characters of finite groups, *J. of Algebra* **4** (1966), 42—45.

* Ниже дается лишь набросок доказательства.
** [8], Kap V, Satz 17.12.
*** [3], § 31.

[6] W. GASCHUTZ, Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen, *Math. Nachr.*, **12**, (1954), 253—254.
[7] H. HASSE, Zahlentheorie. *Berlin*, 1963.
[8] B. HUPPERT, Endliche Gruppen. I. *Berlin—Heidelberg* 1967.
[9] D. S. PASSMAN, Permutation Groups. *New York—Amsterdam* 1968.
[10] Д. А. Супруненко, Разрешимые и нильпотентные линейные группы, *Минск* 1958.
[11] H. ZASSENHAUS, Über endliche Fastkörper. *Hamburg Abh.*, **11** (1936) 187—220.
[12] Э. М. Жмудь, Об изоморфных линейных представлениях конечных групп, *Мат. сб.*, **38** (1956), 417—430.
[13] Э. М. Жмудь, Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп, *Мат. сб.*, **87** (1972), 3—17.
[14] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров, *Успехи математических наук*, том XXXII, вып. 6 (1977), 223—224.
[15] Э. М. Жмудь, И. В. Михайлова, Об одном экстремальном классе конечных групп. — «ВИНИТИ», № 3578—78 Деп.
[16] Э. М. Жмудь, О конечных группах обладающих неприводимым характером разделяющим классы сопряженных элементов. *Сборник «Вопросы теории групп и гомологической алгебры» Вып* 2, *Ярославль*, 1979.

(Позмупило 13. VII. 1979 г.)