О спектре кольца нормирования

С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова (Харьков)

Кольцом нормирования называется ненулевое коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь.

В дальнейшем буква R всегда будет обозначать кольцо нормирования.

Любое непустое подмножество идеалов кольца R, очевидно, образует линейно упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения идеалов. Знак $\subset$ всегда будет обозначать строгое включение соответствующих множеств.

В настоящей заметке даётся полная характеризация линейно упорядоченных множеств, изоморфных спектрам колец нормирования, а также путём перехода к спектру кольца определяется минимальная мощность системы образующих произвольного идеала кольца R. Предварительно изучается мультипликативная полугруппа главных идеалов кольца нормирования.

Объединение всех главных идеалов кольца R, порождённых его необратимыми элементами, образует единственный максимальный идеал V в R.

Кольцо R нётерово тогда и только тогда, когда в R нет других простых идеалов, кроме V, и, быть может, нулевого идеала (в последнем случае R целостно).

Пусть S — мультипликативная коммутативная полугруппа с нулем и единицей $(0\neq 1)$. Будем говорить, что S есть полугруппа с сокращением, если из условия $ab=ac\neq 0$ $(a, b, c\in S)$ вытекает равенство $b=c$.

Пусть Γ — мультипликативная полугруппа главных идеалов кольца R. Оказывается, тот факт, что R — кольцо нормирования, определяется простыми свойствами полугруппы Γ.

Прежде всего отметим, что Γ есть полугруппа с сокращением. В самом деле, пусть $(a)\cdot(b)=(a)\cdot(c)\neq 0$. Тогдо $a(b-c_1)=0$, где $c_1=\Theta c$, Θ — обратимый в R элемент, и $d=b-c_1\ni Ann\, a$. Так как $c_1\notin Ann\, a$, то $d=c_1 r$, где $r\ni V$. Значит $b=c_1+c_1 r=c(1+r)\Theta$,и ввиду обратимоцти элемента $(1+r)$ выпоцняется равенство главных идеалов $(b)=(c)$.

Далее в Γ можно определить линейную упорядоченность по делимости: $(a)\leqq(b)$, если $b=ad$.

Действительно, так как R — кольцо нормирования, то из любых двух элементов $a, b\in R$ один всегда делится на другой.

Если $(a)\leqq(b)$ и $(b)\leqq(a)$, то $b=ac_1$, $a=bc_2$, откуда $a=c_1c_2a$, и при $a\neq 0$ из свойства сокращения получаем, что $(c_1c_2)=(1)$, что даёт $(a)=(b)$, и такое же равенство получаем при $a=0$.

Свойство транзитивности отношения $\leqq$ очевидно. Наконец, если $(a)\leqq(b)$ и $(c)\leqq(d)$, то $(ac)\leqq(bd)$, ибо $b=ar_1$, $d=cr_2$ и $bd=acr_1r_2$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что линейно упорядоченная по делимости мультипликативная полугруппа есть такая полугруппа S, что из двух элементов $a, b \in S$ один делится на другой и при этом $a=b$, если a делится на b и b делится на a.

Теорема 1, Мультипликативная коммутативная полигруппа S с нулем и единицей $(1 \neq 0)$ тогда и только изоморфна мультипликативной полугруппе Γ всех главных идеалов некоторого кольца нормирования R, когда S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа с сокращением.

Доказательство. Необходимость условий была доказана выше. Предположим, что полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы. Тогда при

$$g_1 \leqq g_3; \quad g_2 \leqq g_4, \quad g_1 g_2 \neq 0 \quad (g_i \in S,\ i = 1, 2, 3, 4)$$

выполняется строгое неравенство

$$g_1 g_2 < g_3 g_4, \tag{1}$$

если имеет место хотя бы одно из неравенств

$$g_1 < g_3, \quad g_2 < g_4.$$

В самом деле, если $g_3 g_4 = 0$, то неравенство (1) очевидно. Пусть $g_3 g_4 \neq 0$ и, например, $g_1 < g_3$. Тогда

$$g_3 g_4 \geqq g_1 g_4 \geqq g_1 g_2.$$

Так как $g_3 g_4 \neq 0$, то $g_1 g_4 \neq 0$ $(0 > g$ для всех $g \neq 0,\ g \in S)$, и в силу свойства сокращения в S

$$g_3 g_4 > g_1 g_4 \geqq g_1 g_2.$$

Пусть K — произвольное поле. Образуем алгебру KS полугруппы S над полем K. KS есть линейное пространство над K с базисом $S \setminus 0$, т. е. KS состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций

$$\sum_{g \in S} \lambda_g g, \quad \lambda_g \in K, \quad g \in S, \quad g \neq 0,$$

причём нуль пространства KS отождествляется с нулем полугруппы S, а умножение в KS индуцируется по закону дистрибутивности умножением элементов $g \in S$.

Если

$$x = \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_r g_r \quad (\lambda_1 \neq 0, \quad g_1 < g_2 < \ldots < g_r),$$

то положим

$$N(x) = g_1 \in S,$$

а при $x=0$ будем считать, что $N(x)=0$. Тогда

$$N(xy) = N(x) \cdot N(y) \quad (x, y \in KS). \tag{2}$$

Действительно, пусть $N(x)=g_1$, $N(y)=g_2$ $g_1 g_2 \neq 0$. Тогда из (1) вытекает, что элемент $g_1 g_2$ фактически входит в запись элемента xy, причём $g_1 g_2$ — наименьший из элементов полугруппы S, участвующих в этой записи, т.е. $N(xy)=$

$=N(x)\cdot N(y)=g_1g_2$. Если же $g_1g_2=0$, то $xy=0$, $N(xy)=0$ и снова $N(xy)=$ $=N(x)\cdot N(y)$.

Рассмотрим тепрь подмножество $M\subset KS$ всевозможных элементов вида

(3) $$m=\lambda_0\cdot 1+\sum_{g\in S}\lambda_g g \quad (\lambda_0\neq 0,\ g\in S,\ g\neq 0, 1).$$

Так как для элементов $m\in M$ выполняется равенство $N(m)=1$, то ввиду (2) M — мультипликативная система в KS.

Сбозначим через L кольцо частных кольца KS относительно системы M. Каждый элемент из L записывается в вихе $\frac{x}{m}$ $(x\in KS, m\in M)$, а отображение φ: $x\to\frac{x}{1}$ является гомоморфизмом KS в L, ядро которого есть объединение аннуляторов всех элементов $m\in M$ в KS.

Но из (2) сразу вытекает, что аннулятор любого элемента $m\in M$ в KS равен нулю. Поэтому φ есть вложение кольца KS в L, и элементы $x\in KS$ можно отождествить с элементами $\frac{x}{1}\in L$.

Очевидно, произвольный элемент $x\in KS$, $x\neq 0$ однозначно записывает я в виде

(4) $$x=gm, \quad \text{где} \quad g=N(x), \quad m\in M.$$

В силу (4) для любого элемента $\frac{x}{m}\in L$ $(x\in KS,\ m\in M)$ имеет место равенство главных идеалов кольца L:

(5) $$L\frac{x}{m}=L\cdot N(x).$$

Формула (5) показывает, что каждый главный идеал в кольце L порождается некоторым элементом $g\in S$. Докажем, что различные элементы $g\in S$ порождают различные главные идеалы в L. Действительно, если $Lg_1=Lg_2$ $(g_1, g_2\in S)$, то $g_1=\frac{x_2}{m_2}g_2$, $g_2=\frac{x_1}{m_1}g_1$ $(x_i\in KS, m_i\in M_i,\ i=1, 2)$, откуда $m_2g_1=$ $=x_2g_2, g_2m_1=x_1g_1$, что ввиду (3) и (4) даёт в S равенства:

$$g_1=N(x_2)g_2;\ g_2=N(x_1)\cdot g_1,$$

и так как полугруппа S линейно упорядочена по делимости, то $g_1=g_2$.

Тепк рь формула (5) показывает, что L — кольцо норм рования (из двух элементов полугруппы S один всегда делится на другой) и что отображение $Lg\to g$ является изоморфизмом мультипликативной полугруппы главных идеалов кольца L на полугруппу S. Теорсма доказана.

Замечание. В случае целостного кольца R теорема 1 может быть доказана более просто путём использования известных результатов о нормированиях полей [1].

Лемма 1. *Идеал $P\neq 0$, R кольца нормирования R тогда и только тогда является простым, когда для всех $a\notin P$ $(a\in R)$ выполняется равенство $aP=P$.*

Доказательство. Пусть P — простой идеал в R. Если $a \notin P$, то $P \subset (a)$ и для любого элемента $p \in P$ выполняется равенство $p = ap_1$, где $p_1 \in P$, ибо P — простой идеал. Слевовательно, $P \subseteq aP$ и тогда $P = aP$.

Наоборот, пусть $P \neq 0, R$ и $aP = P$ для всех $a \notin P$. Пусть $a, b \notin P$. Тогда $abP = a(bP) = aP = P$. Отсюда сразу следует, что $ab \notin P$, т. е. P — простой идеал.

Следствие 1. *Пусть $P_1, P_2 (P_1 \subset P_2)$ — простые идеалы кольца R. Тогда существует такой элемент $a \in R$, что имеют место строгие включения*

$$P_1 \subset (a) \subset P_2.$$

Доказательство. Пусть V — максимальный идеал в R. Предположим, что утверждение следствия несправедливо. Тогда P_1 — максимальный идеал в P_2 и, следовательно, $P_2 = (b)$ — главный идеал в R а $P_1 = bV$. Если $P_1 = 0$, то R — целостно, что даёт противоречие. Значит $P_1 \neq 0$. Так как $b \notin P_1$, то по лемме 1 $bP_1 = P_1$ или $0 \subset bV = b^2V$, что основа ведёт к противоречию, ибо $(b^2) \subset bV$ и $b^2V \subset (b^2)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. *Пусть $a \in V$ — ненильпотентный элемент. Тогда*

$$P = \bigcap_{i=1}^{\infty} (a^i)$$

есть простой идеал кольца R.

Доказательство. Предположим сначала, что $P \neq 0$. Это условие всегда выполняется для нецелостного кольца R, ибо в этом случае каждый из идеалов (a^n) $(n = 1, 2, \ldots)$ содержит нильрадикал кольца R. Положим $S = R \setminus P$. Так как $(a^n) \supset (a^{n+1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то S состоит из всевозможных делителей всех элементов a^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть $b \in P$, $b \neq 0$. Тогда $b = a^n b_1 = a^{n+1} b_2$ для любого элемента a^n, откуда $b_1 = ab_2 \Theta \in P$, т. е. $P = a^n P$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а тогда $P = cP$ для всех $c \in S$. В силу леммы 1 заключаем, что P — простой идеал.

Остаётся рассмотреть случай, когда $P = 0$. Тогда R — целостное кольцо, а O является простым идеалом такого кольца. Следствие доказано.

Замечание 2. Главный идеал $(a) \neq 0$ в R прост тогда и только тогда, когда он максимален. Этот факт сразу вытекает из леммы 1 и допускает весьма простое прямое доказательство.

Пусть по-прежнему R — кольцо нормирования, а Γ — мультипликативная полугруппа главных идеалов этого кольца. Очевидно, каждый идеал I в R определяет идеал I' в Γ (этот идеал есть множество всех главных идеалов, порождённых элементами из I). Наоборот, если I' — идеал в Γ, то объединение элементов кольца R, принадлежащих идеалам из множества I', является идеалом I в R. При этом идеал I кольца R простой тогда и только тогда, когда соответсвующий идеал I' простой в полугруппе Γ.

Замечание 3. Лемма 1 остаётся справедливой, если вместо кольца R и его идеала P рассматривать мультипликативную полугруппу главных идеалов Γ кольца R и идеал $P \neq 0, \Gamma$ этой полугруппы.

Утверждение замечания 3 сразу следует из отмеченного выше соответствия между идеалами кольца R и идеалами полугруппы Γ.

Используем теперь некоторые обозначения и определения из [2] и [3].

Пусть $I \neq 0$ — идеал в R. Положим $S(I)=\{a \in R,\ aI=I\}$. Множество $S(I)$, которое мы будем называть стабилизатором идеала I, есть мультипликативная система в R, а дополнение $R \setminus S(I)$ является простым идеалом в R, который мы будем обозначать через $P(I)$. Пусть $P=P(I)$. Идеал $I \neq 0$ назовём P-главным, если существует такой элемент $a \in I$, $a \neq 0$, что I есть объединение всех главных идеалов вида $\left(\frac{a}{r}\right)$, $r \in S(I)$. (Обозначение $I=(a)_p$.)

Если $P=P(I)$, то идеал I является объединением P-главных идеалов (a_p), порождённых ненулевыми элементами $a \in I$.

В силу леммы 1 идеал $I \neq 0$ простой тогда и только тогда, когда $P(I)=I$.

Если $I=(a)_p$ — P-главный идеал, то гомоморфный образ $\bar{I}$ идеала I в кольце частных R_p есть главный идеал кольца R_p (быть может, нулевой).

Пусть M — линейно упорядоченное множество и $a, b \in M$, $a<b$. Пару (a, b) будем называть интервалом в M. Интервалы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) будем считать равными тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Интервал (a, b) назовём минимальным, если в M не существует элементов c, удовлетворяющих условию $a<c<b$.

Определение 1. Линейно упорядоченное множество M назовём полным нигде не плотным в себе множеством, если одновременно выполняются следующие условия:

1) Каждое непустое подмножество M_1 множества M имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань (обозначения: $\sup M_1$, $\inf M_1$).

2) Для любого интервала (a, b) в M существует такой минимальный интервал (c, d), что $a \leqq c < d \leqq b$.

В дальнейшем буква M всегда будет обозначать полное нигде не плотное в себе линейно упорядоченное множество.

В силу свойства 1 определения 1 множество M имеет минимальный элемент m_1 и максимальный элемент m_2.

Пусть $A=\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ — множество всех различных минимальных интервалов множества M, пополненное двумя символическими интервалами $(-\infty, m_1)$ и (m_2, ∞), где α пробегает некоторое множество индексов $\mathfrak{A}$. По определению будем считать, что символ $-\infty$ предшествует всем элементам множества M и все элементы этого множества предшествуют символу ∞. Будем называть a_α (b_α) соответственно левым (правым) концом интервала $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Лемма 2. *Пусть* $a \in M$. *Тогда* $a=\sup b_\alpha$, $b_\alpha \leqq a$, $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$. $a=\inf a_\alpha$, $a_\alpha \geqq a$, $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$, $b_\alpha \leqq a$ непусто, так как оно содержит, например, интервал $(-\infty, m_1)$. Пусть $\bar{a}=\sup b_\alpha$, $b_\alpha \leqq a$, $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$. Предположим, что $\bar{a}<a$. Тогда, в силу свойства 2) определения 1, существует такой минимальный интервал (c, d), что $\bar{a} \leqq c < d \leqq a$, а это противоречит определению элемента $\bar{a}$. Значит $\bar{a}=a$. Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Ввиду леммы 2 для элемента $a \in M$ обозначим через $\tau_l(a)(\tau_r(a))$ наименьшее из таких кардинальных чисел τ, что a есть точная верхняя (нижняя) грань множества $\{b_\alpha\}$ (множества $\{a_\alpha\}$) мощности τ, где $b_\alpha(a_\alpha)$ — правые (левые) концы минимальных интервалов. В частности, равенство $\tau_l(a)=1$ $(\tau_r(a)=1)$ означает, что элемент $a \in M$ есть правый (левый) конец минимального интервала.

Заметим теперь, что интервалы $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$ естественным способом образуют линейно упорядоченное множество в силу следующего определения:

$$(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) \leqq (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}), \tag{6}$$

если $b_{\alpha_1} \leqq a_{\alpha_2}$.

В самом деле, для двух интервалов $(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}), (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2})$ либо $b_{\alpha_1} \leqq a_{\alpha_2}$, либо $b_{\alpha_2} \leqq a_{\alpha_1}$, причём из условий $b_{\alpha_1} \leqq a_{\alpha_2}$ и $b_{\alpha_2} \leqq a_{\alpha_1}$ вытекает равенство $(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}) = (a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2})$. Далее очевидным образом имеет место транзитивность введённого нами отношения $\leqq$ для интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$.

Ясно, что линейная упорядоченность интервалов $(a_\alpha, b_\alpha) \in A$ тривиально переносится на множество индексов $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$, взаимно однозначно соответствующих этим интервалам.

Лемма 3. *Спектр $\mathfrak{M}$ кольца нормирования R является полным нигде не плотным в себе линейно упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения простых идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — спектр кольца нормирования R, а $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{M}$ — произвольное непустое подмножество. Обозначим через $P_1(P_2)$ пересечение (объединение) всех простых идеалов из $\mathfrak{M}_1$. Тогда $P_1 \in \mathfrak{M}$ — точная нижняя грань, а $P_2 \in \mathfrak{M}$ — точная верхняя грань множества $\mathfrak{M}_1$. (Пересечение простых идеалов произвольного коммутативного кольца T не является, вообще говоря, простым идеалом в T, но это так, если T — кольцо нормирования.)

Пусть $P, Q \in \mathfrak{M}$, $P \subset Q$. Тогда согласно следствию 1 из леммы 1 существует такой элемент $a \in R$, что $P \subset (a) \subset Q$ (строгое включение). Из замечания 1 к лемме 1 следует, что (a) — не простой идеал в R.

Обозначим через P_1 объединение всех простых идеалов кольца R, содержащихся в (a), а через P_2 — пересечение всех простых идеалов R, содержащих (a). Тогда $P_1 \subset (a) \subset P_2$, ибо по доказанному идеал (a) не прост.

Пусть P — произвольный простой идеал, удовлетворяющий условию $P_1 \subset P \subset P_2$. Если $P \subseteqq (a)$, то $P = P_1$, а если $P \supseteqq (a)$, то $P = P_2$. Следовательно, (P_1, P_2) — минимальный интервал в $\mathfrak{M}$.

Лемма 4. (Гёльдер—Клиффорд [4]) *Каждая коммутативная линейно упорядоченная по делимости архимедова полугруппа S изоморфна полугруппе одной из следующих трёх полугрупп:*

1) D_1 — аддитивная полугруппа всех неотрицательных вещественных чисел.

2) D_2 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ *с обычной упорядоченностью и операцией* $ab = \min(a+b, 1)$.

3) D_3 — все вещественные числа отрезка $[0, 1]$ *с обычной упорядоченностью* *и символ* ∞, *где операция задаётся так:*

$$ab = a+b, \quad \text{если} \quad a+b \leqq 1, \quad \text{и} \quad ab = \infty, \quad \text{если} \quad a+b > 1.$$

Лемма 5. *Пусть* (P, Q) *— минимальный интервал в спектре кольца* R. *Тогда для любого элемента* $a \in R$, $P \subset (a) \subseteqq Q$ *выполняетя равенство*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n) = P.$$

Доказательство. Так как P — простой идеал, то $a^n \neq 0$ для всех натуральных чисел n. Положим $P_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n)$. В силу следствия 2 из леммы 1 идеал P_1 — простой. Так как $P \subseteqq P_1 \subset (a)$ и (P, Q) — минимальный интервал в спектре, то $P_1 = P$. Лемма доказана.

Кольцо R называется примарным, если максимальный идеал V кольца является его единственным ненулевым простым идеалом.

Лемма 6. *Пусть* R *— примарное кольцо, а* S *— мультипликативная полугруппа всех ненулевых (всех) главных идеалов кольца* R, *если* R *целостно (нецелостно). Тогда* S *— линейно упорядоченная по делимости архимедова полугруппа.*

Доказательство. По теореме 1 S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа: $(a) \leqq (b)$, если $b = ac$. Покажем, что в S выполняется аксиома Архимеда. Пусть $a, b \in V$ и $(a) < (b)$. Если R нецелостно, то V — нильрадикал R и для некоторого натурального n имеем $a^n = 0$, откуда $(a^n) \geqq (b)$. Пусть R — целостно. Тогда $(0, V)$ — минимальный интервал в спектре R и по лемме 5 $0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a^n)$. Следовательно, $(a^n) \leqq (b)$ для некоторого натурального n, т. е. $(a)^n \geqq (b)$, что доказывает утверждение.

Следствие. *Пусть* R *— примарное кольцо нормирования. Тогда из каждого бесконечного множества главных идеалов* $\{(a_\alpha)\}$ *в* R *можно выделить такое счётное подмножество* $\{(a_{\gamma_i})\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *что для каждого* (a_α) *существует идеал* (a_{γ_j}), *удовлетворяющий условию* $(a_\alpha) \leqq (a_{\gamma_j})$.

Доказательство. Обозначим через S мультипликативную полугруппу всех ненулевых (всех) главных идеалов кольца R, если R целостно (нецелостно). В силу лемм 4 и 6 полугруппа S изоморфна подполугруппе одной из полугрупп D_1, D_2, D_3, указанных в лемме 4. Из геометрической интерпретации этих полугрупп непосредственно следует, что в каждой полугруппе D_i из любого бесконечного подмножества элементов $\{\lambda_\alpha\}$ можно выделить такое счётное подмножество $\{\lambda_{\gamma_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что для любого λ_α найдётся такой элемент λ_{γ_i}, что $\lambda_{\gamma_i} \geqq \lambda_\alpha$. Предложение доказано.

Пусть I — идеал в R. Обозначим через $\tau(I)$ такое кардинальное число, что I обладает множеством образующих мощности $\tau(I)$ и не имеет системы образующих меньшей мощности. Пусть, как обычно, $\aleph_0$ обозначает мощность счётного множества.

Теорема 2. *Пусть R — ненётерогво кольцо, I — неглавый идеал в R и $P=P(I)$. Тогда.*

$$\tau(I)=\begin{cases}\aleph_0, & \text{если } I \text{ есть } P\text{-главный идеал и } \tau_r(P)=1 \text{ или если } I \text{ — не}\\ & P\text{-главный идеал и } \tau_l(P)=1.\\ \tau_r(P), & \text{если } \tau_r(P)>1 \text{ и } I \text{ есть } P\text{-главный идеал.}\\ \tau_l(P), & \text{если } \tau_l(P)>1 \text{ и } P \text{ не является } P\text{-главным идеалом.}\end{cases}$$

Доказательство. 1) Предположим, что I есть Р-главный идеал и $\tau_r(P)=\tau$. Рассмотрим сначала случай, когда $\tau_r(P)>1$, т. е. P не является левым концом минимального интервала в спектре R. Тогда

$$P=\bigcap_{\alpha} P_\alpha, \tag{7}$$

где α пробегает линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ индексов мощности τ, а идеалы $P_\alpha\supset P$ — левые концы минимальных интервалов (P_α, Q_α), взаимно однозначно соответствующие индексам α. При этом $P_{\alpha_1}\subset P_{\alpha_2}$, если $\alpha_1<\alpha_2$. В силу следствия 1 из леммы 1 для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ существует такой главный идеал $(a_\alpha)\subset R$, что

$$P\subset(a_\alpha)\subset P_\alpha. \tag{8}$$

Тогда из (7) следует, что

$$P=\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}}(a_\alpha),\quad (a_\alpha)\supset P. \tag{9}$$

Так как I является P-главным идеалом, то I есть объединение всех главных идеалов вида $\left(\frac{a}{r}\right)$, где $a\neq 0$ — фиксированный элемент идеала I, а r пробегает $S(I)=R\setminus P$. Ввиду (9), для каждого $r\in S(I)$ существует такой элемент a_α, что $(a_\alpha)\subset(r)$ и тогда

$$\left(\frac{a}{r}\right)\subset\left(\frac{a}{a_\alpha}\right). \tag{10}$$

Значит, идеал I имеет систему образующих $\left\{\frac{a}{a_\alpha}\right\}(\alpha\in\mathfrak{A})$ мощности τ. Покажем, что I не обладает множеством образующих меньшей мощности. Действительно, предположим, что I имеет множество образующих мощности $\tau_1<\tau$. Тогда из (10) вытекает, что из множества $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ можно выделить такое подмножество $\mathfrak{A}_1=\{\gamma\}$ мощности τ_1, что элементы $\left\{\frac{a}{a_\gamma}\right\}$ порождают идеал I. Положим $I'=\bigcap_{\gamma\in\mathfrak{A}_1}(a_\gamma)$. В силу (8), для каждого $a_\gamma, \gamma\in\mathfrak{A}_1$ существует такой простой идеал $P_{i_\gamma}(i_\gamma\in\mathfrak{A}_1)$, что $P\subset P_{i_\gamma}\subset(a_\gamma)$. Есил $I'=P$, то $P=\bigcap_{\gamma\in\mathfrak{A}} P_{i_\gamma}$, что противоречит равенству $\tau_r(P)=\tau$. Значит, $P\subset I'$ и существует такой простой идеал P_{α_0}, участвующий в (7), что

$$P\subset P_{\alpha_0}\subset I'.$$

Теперь на основании (8) получим, что

(11) $$(a_{\alpha_0}) \subset (a_\gamma) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \mathfrak{A}_1.$$

С другой стороны, $\dfrac{a}{a_{\alpha_0}} \in I$ и так как $\left\{\dfrac{a}{a_\gamma}\right\}$ — система образующих идеала I, то для некоторого $\gamma_0 \in \mathfrak{A}_1$ имеем $\left(\dfrac{a}{a_{\alpha_0}}\right) \subseteqq \left(\dfrac{a}{a_{\gamma_0}}\right)$, откуда

(12) $$(a_{\alpha_0}) \supseteqq (a_{\gamma_0}).$$

Соотношения (11) и (12) дают противоречие.

Итак, если идеал $P = P(I)$ не является левым концом минимального интервала в спектре кольца R, то $\tau(I) = \tau_r(P)$.

Пр дложим теперь, что P — левый конец минимального интервала (P, Q). Тогда ввиду леммы 5 идеал P представляется в виде пересечения счётного числа главных идеалов $P = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (a_i)$ и, значит, идеал I имеет счётную систему образующих $\left\{\dfrac{a}{a_i}\right\}$.

2) Преположим теперь, что I не является P-главным идеалом. Изучим сначала случай, когда идеал P не является правым концом минимального интервала в спектре R. Пусть $\tau_l(P) = \tau$. Тогда

(13) $$P = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} Q_\alpha,$$

где Q_α пробегает правые концы минимальных интервалов спектра, линейно упорядоченные по включению, а индекс α — соответствующее линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$. При этом для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$

(14) $$Q_\alpha \subset P, \quad Q_{\alpha_1} \subset Q_{\alpha_2}, \quad \text{при} \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Для каждого фиксированного $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такой элемент $a_\alpha \in I$, что для всех $(a) \supset (a_\alpha)$, $a \in I$

(15) $$a = b_\alpha a_\alpha, \quad \text{где} \quad Q_\alpha \subset (b_\alpha) \subset P.$$

В самом деле, в противном случае каждый элемент $a \in I$ имеет вид $a = bc$, где $b \in Q_\alpha$, откуда вытекает, что каждый элемент $d \notin Q_\alpha$ принадлежит стабилизатору $S(I)$, а это в силу (14) противоречит равенству $S(I) = P$. Из (14) и (15) сразу следует, что множество $\{a_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathfrak{A})$ мощности τ порождает идеал I. Покажем, что I не обладает множеством образующих меньшей мощности. В самом деле, если I обладает системой образующих мощности $\tau_1 < \tau$, то, очевидно, из множества $\{a_\alpha\}$ можно выделить подмножество $\{a_\gamma\}$ мощности τ_1, порождающее идеал I, где индекс γ пробегает подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Положим $Q = \bigcup\limits_{\gamma \in \mathfrak{A}_1} P_\gamma$. Тогда $Q \subset P$, ибо $\tau_l(P) = \tau > \tau_1$. В силу (13) и (14) существует такой индекс $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что $Q \subset P_{\alpha_0} \subset P$, откуда в силу (15)

(16) $$a_\gamma = b_\gamma a_{\alpha_0}$$

для всех $\gamma\in\mathfrak{A}_1$, где

(17) $$P_{\alpha_0}\subset(b_\gamma)\subset P.$$

С другой стороны, так как множество $\{a_\gamma\}$, $\gamma\in\mathfrak{A}_1$ порождает идеал I, для некоторого $\gamma_0\in\mathfrak{A}_1$ выполняется равенство

(18) $$a_\alpha=c\cdot a_{\gamma_0}.$$

Ввиду (16) и (18) $a_{\gamma_0}=b_{\gamma_0}ca_{\gamma_0}$ и, значит, b_{γ_0} — обрятимый в R элемент, что противоречит (17). Итак, $\tau(I)=\tau_l(P)$.

Рассмотрим в заключение второй случай, когда $P=P(I)$ правый конец минимального интервала (P_1, P). Покажем, что в этом случае идеал I обладает счётной системой образующих. Прежде всего заметим, что идеал I содержит такой элемент a, что для всех $(b)\supset(a), b\in I$ имеем $a=cb$, где $c\notin P_1$. В противном случае $R\diagdown P_1\in S(I)=R\diagdown P$, что невозможно. Фиксируем такой элемент $a\in I$. Тогда для любых элементов $c, d\in I$ таких, что $(d)\supset(c)\supseteqq(a)$ имеем $c=dt$, где $t\notin P_1$. Далее, для любого элемента $b\in I$ найдётся такой элемент $c\in I, (b)\supset\supset(c)$, что $b=dc$, где $d\notin P$. Действительно, если для всех $(c)\supset(b)$ выполняется равенство $b=dc$, где $d\notin P$, то I есть P-главный идеал $(b)_p$, порождённый элементом b, а это противоречит условию. Из предыдущих замечаний следует, что I можно представить в виде объединения трансфинитной возрастающей последовательности главных идеалов

$$(a)\subset(a_1)\subset\ldots$$

где

(19) $$a_\alpha=c_{\alpha,\beta}a_\beta,\quad P_1\subset(c_{\alpha,\beta})\subset P\quad\text{при}\quad(a_\alpha)\subset(a_\beta).$$

Пусть $a=d_\alpha a_\alpha$. Тогда

(20) $$(d_1)\supset(d_2)\supset\ldots.$$

Если $\alpha<\beta$, то ввиду (19) $a=d_\alpha a_\alpha=d_\alpha c_{\alpha,\beta}a_\beta$, откуда

(21) $$d_\beta=d_\alpha\cdot c_{\alpha,\beta},\quad c_{\alpha,\beta}\in Q.$$

Из (20) и (21) вытекает, что

(22) $$(d_1)_p\supset(d_2)_p\supset\ldots,$$

где $(d_\alpha)_p$ — P-главный идеал, порождённый элементом d_α.

Пусть R_p — кольцо частных кольца R относительно идеала P, а $\bar P$, $\bar P_1$, $(\bar d_\alpha)$ — соотвественно образы идеалов $P, P_1, (d_\alpha)_p$ в R_p. Вследствие (22)

(23) $$(\bar d_1)\supset(\bar d_2)\supset\ldots.$$

Так как $\bar P$ — максимальный идеал в R_p, то кольцо R_p примарно, и в силу следствия из леммы 6 существует такая счётная убывающая подпоследовательность

$$(\bar d_{\gamma_1})\supset(\bar d_{\gamma_2})\supset\ldots$$

трансфинитной последовательности (23), что $(\bar d_\alpha)\supset(\bar d_{\gamma_j})$ для каждого идеала $(\bar d_\alpha)$ и некоторого идеала $(\bar d_{\gamma_j})$, зависящего от $(\bar d_\alpha)$. Теперь нетрудно видеть, что счётное множество элементов $\{a_{\gamma_i}\}, a=d_{\gamma_i}a_{\gamma_i}$ (см. (19)) порождает идеал I, т. е. $\tau(I)$ — сётная мощность. Теорема доказана.

Замечание. Пусть P — такой простой идеал кольца R, что $\tau_{\iota}(P)>1$. Тогда $\tau(P)=\tau_l(P)$. Это сразу следует из того, что для любого элемента $a\in P$ существует такой простой идеал Q, что $(a)\subset Q\subset P$, и из того, что $\tau_l(P)>1$.

Теорема 3. *Линейно упорядоченное множество M тогда и только тогда изоморфно спектру некоторого кольца нормирования, когда M — полное нигде не плотное в себе множество. При этом существует как целостное, так и нецелостное кольцо нормирования R, спектр которого изоморфен множеству M.*

Доказательство. Лемма 3 доказывает необходимость условия теоремы. Установим его достаточность.

Пусть M — полное нигде не плотное в себе множество. Как и выше будем обозначать через m_2 (m_1) максимальный (минимальный) элемент множества M. Если $m_1=m_2$, то M состоит из одного элемента. Легко построить целостные и нецелостное кольца нормирования R, спектр которых содержит точно один простой идеал. Среди целостных колец такими кольцами являются только поля, а среди нецелостных — примарные кольца нормирования, максимальный идеал который есть нильидеал. Примерами последних являются групповая алгебра конечной циклической p-группы (нётерово кольцо) или групповая алгебра группы типа p^∞ (ненётерово кольцо) над полем характеристики p.

В дальнейшем мы можем предполагать, что M состоит более чем из одного элемента. В этом случае в силу свойства 2) определения 1 в M обязательно имеются минимальные интервалы. Пусть $A_1=\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ — множество всех минимальных интервалов множества M, дополненное символическим интервалом $(-\infty, m_1)$. Тогда по-предыдущему можно считать, что индексы α, взаимно однозначно соответствующие интервалам $(a_\alpha, b_\alpha)\in A_1$, образуют линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}_1$, причём при $\alpha_1<\alpha_2$ имеем $a_{\alpha_1}<b_{\alpha_1}\leqq a_{\alpha_2}<b_{\alpha_2}$.

Пусть интервалу $(-\infty, m_1)$ соответствует индекс $\gamma_0\in\mathfrak{A}_1$. Тогда γ_0 наименьший элемент множества $\mathfrak{A}_1$. Сопоставим каждому элементу $\alpha\in\mathfrak{A}_1$, $\alpha\neq\gamma_0$. произвольную ненулевую подгруппу G_α аддитивной группы Q всех вещественных чисел, а индексу γ_0 — мультипликативную полугруппу G_{γ_0}, которая удовлетворяет условиям теоремы 1 и все элементы которой, отличные от 1, нильпотентны. В качестве G_{γ_0} можно взять, например, конечную нильполугруппу

$$\{a^0=1, a, \dots, a^{n-1}, a^n=0\}$$

($n\geqq 1$ — показатель нильпотентности элемента a) с присоединенной единицей.

Обозначим через G_α^+ ($\alpha>\gamma_0$) полугруппу всех положительных элементов группу G_α и положим $G_{\gamma_0}^+=G_{\gamma_0}$. Заметим, что $G_\alpha(\alpha>\gamma_0)$ — линейно упорядоченные группы, а G_α^+-линейно упорядоченные по делимости полугруппы с сокращением.

Условимся теперь записывать групповую операцию в группе G_α ($\alpha\neq\gamma_0$) мультипликативно и образуем прямое произведение

$$\hat{G}=G_{\gamma_0}\times H, \quad \text{где} \quad H=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A},\,\alpha\neq\gamma_0}\times G_\alpha \tag{24}$$

Элементы полугруппы $\hat{G}$ вида $0\cdot h$, $h\in H$, очевидно, образуют идеал I в $\hat{G}$. Обозначим через G фактор-группу Рисса $\hat{G}/I$ по этому идеалу. Тогда можно считать, что

$$G = \{fh \in \hat{G} \ \ (h \in H,\ f \in G_\gamma,\ f \neq 0),\ 0\},$$

где 0 — нуль полугруппы G.

Каждый элемент $g \in G$, $g \neq 0, 1$ однозначно записывается в виде произведения

$$g = g_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_r} \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r). \tag{25}$$

где $1 \neq g_{\alpha_j} \in G_{\alpha_j}$ $(j=1, \ldots r)$, $g_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}^+, g_{\alpha_1} \neq 0$ при $\alpha_1 = \gamma_0$.

Будем называть элементы $g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_r}$ соответственно первой, … r-ой компонентами элемента g, а число r компонент g обозначать через $l(g)$. Если $g=0, 1$, то будем считать, что $l(g)=1$ и g совпадает с своей первой компонентой.

Пусть S — подмножество полугруппы G, содержащее 0 и 1, а также все элементы $g \neq 0, 1$ вида (25), где $g_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1}^+$. Если $G_{\gamma_0} = \{0, 1\}$, то все ненулевые элементы S лежат в H. Легко проверить, что S — подполугруппа полугруппы G.

Из того, что каждая из полугрупп G_α^+, G_{γ_0} есть полугруппа с сокращением и G_α $(\alpha > \gamma_0)$ суть группы, сразу вытекает, что S — полугруппа с сокращением.

Заметим далее, что для любых двух элементов, $t_1, t_2 \in G_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{A}_1)$ всегда выполняется одна из равенств $t_1 = t_2 t'$, $t_2 = t_1 t''$, где $t', t'' \in G_\alpha^+$. Возмём любые два элемента $g, f \in S$ вида (25):

$$g = g_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_n}, \quad f = f_{\beta_1} \cdot \ldots \cdot f_{\beta_m}.$$

Если $\alpha_1 < \beta_1$, то $g = f\,t$, $t \in S$. Пусть $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_r = \beta_r$ и

$$g_{\alpha_1} = f_{\beta_1}, \ldots, g_{\alpha_r} = f_{\beta_r}.$$

Если $r < n \leqq m$ и $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ или если $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, но в $G_{\alpha_{n+1}}$ выполняется равенство $g_{\alpha_{n+1}} = f_{\alpha_{n+1}} \cdot t'$, $t' \in G_{\alpha_{n+1}}^+$, то $g = f\,t$, $t \in S$. Наконец, если $r = n \leqq m$ и $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, то $g = f$ при $n = m$ и $g = ft_1$, $f = gt_2$ $(t_1, t_2 \in S)$, если $n < m$ и соответственно $f_{\beta_{n+1}} \notin G_{\beta_{n+1}}^+$, $f_{\beta_{n+1}} \in G_{\beta_{n+1}}^+$. Из этих рассуждений следует, что из двух элементов, $g, f \in S$ один всегда делится на другой, причём $g = f$, если g делится на f, а f делится на g. Ввиду замечания 1 теперь заключаем, что S — линейно упорядоченная по делимости полугруппа с сокращением.

Покажем, что множество всех простых идеалов полугруппы S как линейно упорядоченное множество изоморфно множеству M.

Пусть b — произвольный элемент множества M. Ввиду леммы 2

$$b = \sup_\alpha b_\alpha, \quad b_\alpha \leqq b, \quad (a_\alpha, b_\alpha) \in A_1. \tag{27}$$

Обозначим через P_b подмножество полугруппы S, состоящее из нуля и всевозможных элементов $g = g_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_r}$ вида (25), где для индекса $\alpha_1 \in \mathfrak{A}_1$ существует такой индекс $\alpha \in \mathfrak{A}_1$, что выполняется (27) и $\alpha_1 \leqq \alpha$. Тогда P_b — простой идеал в S. В самом деле, произведение любого элемента из P_b на произвольный элемент из S, очевидно, снова лежит в P_b. Пусть $f \in S$, $gf \notin P_b$, $f \neq 1$. Тогда $f = f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_t}$, где $\beta_1 \in \mathfrak{A}_1$ — такой индекс, что $\beta_1 > \alpha$ для всех индексов α, удовлетворяющих (27). Следовательно, произвольный элемент $g \in P_b$ делится в S на элемент f, причём $g = f\,t$, где $t \in P_b$.

Таким образом, $P_b = fP_b$ для всех $f \notin P_b$, что в силу леммы 1 и замечания 3 к ней доказывает простоту идеала P_b при $P_b \neq 0$. Заметим, что идеал P_b

— нулевой тогда и только тогда, когда b — минимальный элемент множества M и $G_{\gamma_0}=\{0, 1\}$. Тогда все ненулевые элеенты полугруппы S лежат в группе H и образуют мультипликативную систему. Следовательно, и в этом случае $P_b=0$ — простой идеал в S.

Пусть $b, c\in M$, $b<c$. Тогда для некоторого минимального интервала $(a_\alpha, b_\alpha)\in A_1$, $b\leqq a_\alpha<b_\alpha\leqq c$. Следовательно, идеал P_c содержит элемент вида

$$g_\alpha g_{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot g_{\alpha_r}\quad (\alpha<\alpha_2<\ldots<\alpha_r),$$

$(g_\alpha\in G_\alpha^+)$, которые не входят в идеал P_b. С другой стороны, из определения идеалов P_a $(a\in M)$ сразу следует, что $P_b\subseteqq P_c$. Итак, при $b<c$ имеет место строгое включение $P_b\subset P_c$.

Пусть теперь $P\neq 0$ — произвольный простой идеал в S. Любой ненулевой элемент из P записывается в виде (25)

$$g_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot g_{\alpha_r}\quad (\alpha_1<\ldots<\alpha_r),\quad g_{\alpha_1}\in G_{\alpha_1}^+,\quad (a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1})\in A_1. \tag{28}$$

Пусть, $b=\sup b_{\alpha_1}$, где индексы $\alpha_1\in\mathfrak{A}_1$ соответствуют всевозможным элементам (28) из P. Тогда в силу (27) и (28) идеал P совпадает с идеалом P_b, соответствующим элементу $b\in M$. Следовательно, отображение $\varphi: b\to P_b$ является сюръективным отображением множества M на множество $\mathfrak{M}$ всех простых идеалов полугруппы S.

Как было показано выше, $P_c\subset P_d$, если $c<d$. Следовательно, φ — изоморфизм линейно упорядоченных множеств M и $\mathfrak{M}$. По теореме 1 существует кольцо нормирования R, мультипликативная полугруппа главных идеалов Γ которого изоморфна S, а спектр R изоморфен спектру S. Коьцо R является искомым.

Если полугруппа $G_{\gamma_0}=\{0, 1\}$, то R — целостное кольцо, так как его минимальный простой идеал совпадает с нулем кольца R. Если полугруппа G_{γ_0} содержит ненулевые нильпотентные элементы, то кольцо R нецелостно. Нильрадикал этого кольца является объединением главных идеалов кольца, порождённых всевозможными элементами вида $g_{\gamma_0}g_{\alpha_2}\ldots g_{\alpha_r}$, где $g_{\gamma_0}\in G_{\gamma_0}^+$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть τ — произвольное бесконечное кардинальное число. Тогда существует такое кольцо нормирования R, что R содержит идеал I, который порождается множеством образующих мощности τ и не порождается множеством меньшей мощности.*

Доказательство. Пусть $\{1, 2, \ldots, \gamma\}=M$ — такое множество порядковых чисел, что γ наименьшее число, соответствующее мощности τ. Так как множество M вполне упорядочено, то M — полное нигде не плотное в себе линейно упорядоченное множество. При этом в силу выбора порядкового числа γ имеет место равенство $\tau_l(\gamma)=\tau$. По теореме 3 существует кольцо нормирования R, спектр которого как линейно упорядоченное множество изоморфен множеству M. При этом изоморфизме элементу $\gamma\in M$ соответствует максимальный идеал $V\in R$, причём $\tau_l(V)=\tau$. Теперь в силу замечания к теореме 2 получаем, что $\tau(V)=\tau$ (т. е. V порождается множеством образующих мощности τ и не порождается множеством меньшей мощности). Теорема доказана.

Литература

[1] Бурбаки, Коммутативная алгебра. *Изд. Мир. Москва.* 1971.
[2] Н. И. Вишнякова—С. Д. Берман, О модулях над ненётеровыми кольцами нормирования. *Доклады АН Армянской ССР, т.* **60** № 3 (1975) 144—149.
[3] С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), ...
[4] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы. *Изд. Мир. Москва* 1965.

Поступило 13. VII. 1979.

[7] Л. Я. Куликов, К теореми абелевеих групп произвольной мошносме,

Некоторые

HUNGARY
COLUMBIA

*) [3], 31.