Verschärfungen der Sätze über die Methode der konvexen Berührungsfunktionen ohne Divergenzpunkt

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Abstract. In [1/II] an iteration family of second order without point of divergence, the method of tangential concave functions was given as a generalization of the always convergent method of tangential parabolas [1/I, 1/III]. In this paper we shall prove, under weaker conditions, the theorem of convergence and a more generalized and practicable (a posteriori) form of the error estimates of this iteration family.

Résumé. In généralisant la méthode des paraboles tangentes sans point de divergence [1/I, 1/III] nous avons introduites dans [1/II] une famille de méthodes d'itération de second ordre de convergence, celle des fonctions tangentielles concaves. Dans ce travail nous prouvons la convevgence ainsi que la forme générale et capable d'applications practiques de l'estimation des erreurs, en utilisant des hypothèses plus faibles.

Als eine Verallgemeinerung des divergenzpunktlosen Verfahrens der Berührungsparabeln [1/I, 1/III] wurde in [1/II] eine Familie im Sinne der Definition von J. F. TRAUB optimaler [2] Methoden von zweiter Konvergenzordnung: die TCF-Methode* (die Methode von konvexen (oder konkaven) Berührungsfunktionen) mit ihren Konvergenzbedingungen, Fehlerabschätzungen und zwei konkreten Verfahrenbeispielen angegeben. Bei den Abschwächungen der Bedingungen werden wir in diesem Beitrag die Konvergenz, und die allgemeinere und praktisch anwendbare a posteriori Form der Fehlerabschätzung beweisen, ferner einige numerische Iterationsbeispiele angeben.

Die Bezeichnungen und Definitionen in [1/III] werden auch jetzt gebraucht. Es wird vorausgesetzt, daß

(1) $\begin{cases} \text{die Funktion} \\ \qquad f\colon [a, b] \doteq I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ \text{in I zweimal differenzierbar ist, und es eine Konstante } M_2>0 \text{ mit} \\ \qquad |f''(x)| \leqq M_2, \quad x \in I \\ \text{gibt.} \end{cases}$

Definition. Die mit der Funktion f verbundene Iterationsfunktion $F(x; r)$ und auch das entsprechende Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = F(x_n, r), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

* TCF ~ Method of tangential convex functions

wird in I *stets konvergent* (oder *divergenzpunktlos*) genannt, falls die aus dem Wert $x_0 \in I$ ausgehende und durch (2) erhaltene Iterationsfolge

1° monoton ist, und

2° gegen die rechts (bzw. links)

von x_0 nächstliegende Nullstelle $\alpha \in I$ von f konvergiert, vorausgesetzt, daß der Wert des "Richtungsparameters" r im ganzen Laufe der Iteration auf eine konsequente Weise $+1$ (bzw. -1) gewählt wird;

3° wenn es keine Nullstelle $\alpha \in [x_0, b]$ (bzw. $\alpha \in [a, x_0]$) von f gibt, dann verläßt $\{x_n\}$ die Strecke I. Die Familie von Iterationsfunktionen mit diesen Eigenschaften wird mit $A(f, I)$ bezeichnet (A: class of **a**lways convergent iteration functions).

(3) Es sei k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine beliebige, von unten konvexe und zweimal differenzierbare Funktion in $\mathbf{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$k(0) = k'(0) = 0,$$

$$k'(\infty) = -k'(-\infty) = \infty,$$

$$\exists \delta > 0: \quad \delta \leqq k''(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Im Falle $x_0 \in I, f(x_0) \neq 0$ passen wir in erster Ordnung die parallel verschobene Funktionskurve

$$K(x) = \lambda - sck(x - \mu)$$

$$[c > 0, \; s \doteq \operatorname{sign}(f(x_0)); \; \lambda, \mu \in \mathbf{R}]$$

an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Die Parameterswerte λ und μ in der Approximationsfunktion K werden aus den Gleichungen

$$K^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1$$

d. h. aus

$$\lambda - sck(x_0 - \mu) = f(x_0)$$

und

$$-sck'(x_0 - \mu) = f'(x_0)$$

bestimmt. Aus (3) folgt, daß die Funktion k' im ganzen $\mathbf{R}$ invertierbar ist. Deshalb sind

$$\lambda = f(x_0) + sck(v)$$

und

$$\mu = x_0 - v,$$

wobei

$$v \doteq k'^{-1}\left[-\frac{s}{c} f'(x_0)\right]$$

ist. Die die Kurve f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ in erster Ordnung berührende konvexe Funktion ist also von der Gestalt

$$K(x) = f(x_0) - sc[k(x - x_0 + v) - k(v)]. \tag{4}$$

Der Konvergenzsatz kann mit Hilfe der folgenden Aussage bewiesen werden.

Lemma. *Wenn die Voraussetzungen* (1) *und* (3) *erfüllt sind, ferner* $c=\frac{M_2}{\delta}$ *und* $f(x_0)\neq 0$ *im Ausgangspunkt* $x_0\in I$ *gilt, dann ist der Wert der durch die Gleichung* (4) *gegebenen (entsprechenden) Funktion* $K(x)$ *in der Strecke* I *im Fall* $f(x_0)>0$ (*bzw.* $f(x_0)<0$) *nicht größer (bzw. nicht kleiner) als* $f(x)$.

BEWEIS. Es sei $s=1$. Nach den Bedingungen kann der Taylor'sche Satz auf die Funktionen $f(x)$ und $k(x-x_0+v)$ angewendet werden:

$$(5)\qquad \begin{cases} f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2, \quad \xi\in(x_0,\,x); \\ k(x-x_0+v)-k(v)=k'(v)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}k''(\eta)(x-x_0)^2= \\ =-\dfrac{1}{c}f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}k''(\eta)(x-x_0)^2, \\ \eta=v+\vartheta(x-x_0), \quad \vartheta\in(0,\,1). \end{cases}$$

Wir beweisen, daß die Differenzfunktion

$$D(x)=f(x)-K(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2+\frac{c}{2}k''(\eta)(x-x_0)^2$$

in dem abgeschlossenen Intervall I nicht negativ ist. Dazu ist es genug die Ungleichheit

$$-f''(\xi)\leqq ck''(\eta)$$

einzusehen, deren Wahrheit aus den Relationen

$$|f''(\xi)|\leqq M_2\leqq M_2\frac{k''(\eta)}{\delta}=ck''(\eta)$$

folgt. Im Fall $s=-1$ ist der Beweis ganz ähnlich. Es gilt also das Lemma.

Die Funktion k kann als zwei (streng monotone) Funktionszweige betrachtet werden:

$$k(x)=\begin{cases} k_-(x), & \text{falls} \quad x\leqq 0; \\ k_+(x), & \text{falls} \quad x\geqq 0. \end{cases}$$

Die Nullstellen x_1 und x_1' von K werden in der Form

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_1' \end{matrix}\right\}=x_0-v+k_r^{-1}\left[\frac{|f(x_0)|}{c}+k(v)\right], \quad r=\pm 1$$

hergestellt. Mit Hilfe der aus [1] bekannten Gedankenfolge kann der Konvergenzsatz der TCF-Methode erhalten werden:

Satz 1. *Aus den Bedingungen* (1), (3) *und* $c=\frac{M_2}{\delta}$ *folgt die Relation*

$$F_{\mathrm{TCF}}(x;\,r)\doteq x-v+k_r^{-1}\left[\frac{|f(x)|}{c}+k(v)\right]\in A(f,\,I),$$

wobei

$$v \doteq k'^{-1}\left[-\frac{1}{c}\operatorname{sign}(f(x_0))f'(x)\right]$$

ist, und im Falle $r=1$ (bzw. $r=-1$) wird bei der Inversenbildung k_r^{-1} der Funktionszweig $k_+(x)=k(x)$, $x\geqq 0$ (bzw. $k_-(x)=k(x)$, $x\leqq 0$) in Betracht genommen.

Die Beispiele $k(x)=x^2$, $\delta=2$ und $k(x)=\operatorname{ch} x-1$, $\delta=1$ ferner die entsprechenden Iterationsfunktionen

$$F_{\mathrm{TP}}(x;r) \doteq x+s\frac{f'(x)}{M_2}+r\sqrt{\frac{2|f(x)|}{M_2}+\left[\frac{f'(x)}{M_2}\right]^2}\in A(f,I)$$

bzw.

$$F_{\mathrm{TCH}}(x;r) \doteq x+\ln\frac{H+r\sqrt{H^2-c^2}}{G-sf'(x)}\in A(f,I)$$

$$\Big(s \doteq \operatorname{sign}(f(x_0)),$$

$$G \doteq \sqrt{c^2+f'^2(x)},$$

$$H \doteq |f(x)|+G\Big)$$

sind bekannt [1/II].*
Numerische Lösungen von 5 Gleichungen mit Hilfe von F_{TP} sind in [1/III], mit Hilfe von F_{TCH} sind in der Tabelle 1 dargestellt. (Es werden die Iterierten $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$|x_i-\alpha| \geqq 10^{-6}, \quad i<n$$

und

$$|x_n-\alpha| < 10^{-6}$$

aufgeschrieben, wobei $\alpha\in I$ die Lösung der entsprechenden Gleichung ist.)

Die Fehlerabschätzungen der stets konvergenten Methode der konvexen Berührungsfunktionen sind dargestellt in dem

Satz 2. *Es seien die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt, es existiere der entsprechende Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ für ingendeinen Ausgangspunkt $x_0\in I$ und er sei eine einfache Nullstelle von f in I, ferner es gebe drei Konstanten m_1, M_1 und Δ mit*

$$0<m_1\leqq |f'(x)|\leqq M_1, \quad x\in[x_0,\alpha]\subseteqq I$$

und mit $k''(x)\leqq\Delta$, $x\in\mathbf{R}$. Dann gelten die Fehlerabschätzungen

1° $$|e_{n+1}|\leqq L_2(1+N)|e_n|^2,$$

2° $$|e_{n+1}|\leqq NL_2^2|d_n|^3+L_2(L_1+N)|d_n|^2, \quad n=0,1,2,\ldots$$

wobei $e_j\doteq\alpha-x_j$, $d_j\doteq x_{j+1}-x_j$, $N\doteq\frac{\Delta}{2\delta}$ und $L_i\doteq\frac{M_i}{m_1}$ $(i=1,2)$ sind.

* TP ~ Method of tangential parabolas; TCH ~ Method of tangential cosinus hiperbolicus functions

Tabelle 1.

I. $f(x)=2^x-5x+2,\ x\in[0,1];\ \alpha=0.7322442555\pm 10^{-10};\ M_2=0.961$

$x_0=1$
$x_1=0.75651366$
$x_2=0.73248221$
$x_3=0.73224428$

II. $f(x)=e^x-x^2+1,\ x\in[-2,0];\ \alpha=-1.1477576322\pm 10^{-10};\ M_2=2$

$x_0=0$
$x_1=-0.90135948$
$x_2=-1.13200394$
$x_3=-1.14768219$
$x_4=-1.14775763$

III. $f(x)=\sin x-0.5x,\ x\in[1.5,3];\ \alpha=1.8954942670\pm 10^{-10};\ M_2=1$

$x_0=1.5$
$x_1=1.88101706$
$x_2=1.89545140$
$x_3=1.89549427$

IV. $f(x)=e^x+10x-2,\ x\in[0,1];\ \alpha=0.0905251013\pm 10^{-10};\ M_2=2.72$

$x_0=0$
$x_1=0.08690704$
$x_2=0.09051902$
$x_3=0.09052510$

V. $f(x)=x^3-3x^2-x+9,\ x\in[-2,-1.5];\ \alpha=-1.5251022548\pm 10^{-10};\ M_2=18$

$x_0=-1.5$
$x_1=-1.52493081$
$x_2=-1.52510225$

BEWEIS. Es sei z. B. $f(x_0)>0$ und $x_0<\alpha (r=1)$. Da die Nullstelle α einfach ist, ist die Relation

$$f'(x)<0,\quad x\in[x_0,\alpha]$$

nach den Bedingungen erfüllt. Wir setzen voraus, daß $f(x_n)\neq 0,\ n=0,1,2,\ldots$. (Im Falle $f(x_n)=0$ gilt $x_{n+1}=x_n=\alpha$, und die Behauptungen sind natürlich erfüllt.)

Es sei n eine beliebige, feste und nicht negative ganze Zahl. Aus der Gleichheit $K(x_{n+1})=0$ mit Hilfe von (4) und (5) kann der Wert von $f(x_n)$ folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$f(x_n)=\frac{c}{2}k''(\eta)\,d_n^2-f'(x_n)\,d_n.$$

Da $0\neq -f(x_n)=f(\alpha)-f(x_n)=f'(\xi)e_n,\ \xi\in(x_n,\alpha)$ ist, deshalb kann man mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Relationen

$$e_{n+1} = e_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n = \frac{c}{2}\frac{k''(\eta)}{|f'(\xi)|} d_n^2 + \frac{f'(\xi)-f'(x_n)}{|f'(\xi)|} d_n \leqq$$

$$\leqq \frac{M_2 \Delta}{2\delta m_1} d_n^2 + \frac{f''(\tau)(\xi - x_n)}{|f'(\xi)|} d_n \leqq NL_2 d_n^2 + L_2(\xi - x_n) d_n,$$

$$\xi \in (x_n, \alpha), \quad \tau \in (x_n, \xi)$$

erhalten.

(Gilt die Ungleichung

$$f(x_0) f''(x) \leqq 0$$

in der Strecke $[x_0, \alpha]$ (d. h. stimmt die Konvexität von f und K in dem Segment überein), so gilt

$$|e_{n+1}| \leqq NL_2 d_n^2.)$$

Auf Grund von $|d_n| \leqq |e_n|$ und $|\xi - x_n| < |e_n|$ ergibt sich die zu beweisende Abschätzung 1°. Aus den Relationen

$$(0<)\, \xi - x_n < e_n = \frac{1}{|f'(\xi)|}\left[\frac{c}{2} k''(\eta) d_n^2 + |f'(x_n)|\, d_n\right] \leqq NL_2 d_n^2 + L_1 d_n$$

erhält man die Behauptung 2°.

In den mit den Vorzeichen von $\alpha - x_0$ und $f(x_0)$ verbundenen drei weiteren Fällen kann der Beweis ähnlich gefürt werden.

Bemerkung. In dem Fall $k(x) = x^2$ stimmen unsere Fehlerabschätzungen mit den im Satz 10 [1/III] erhaltenen Abschätzungen der TP-Methode überein, falls $\Delta = \delta (=2)$.

Literatur

[1] Z. Szabó, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I—III. *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233; **21** (1974), 285—293; **27** (1980), 185—200.

[2] J. F. Traub, Iterative methods for the solution of equations, *Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J.* 1964.

ADRESSE DES AUTORS:
ZOLTÁN SZABÓ
MATHEM. INST. DER UNIV.
4010 DEBRECEN, UNGARN

(Eingegangen am 30. Juli 1981.)